L'intégrale tronquée

A.Balan

January 21, 2017

1 Définition

On considère une fonction réelle lisse f telle que $f(t) \neq 0$, $\forall t$. On définit alors l'intégrale tronquée :

$$I_B(s) = \int_1^B (t^{s-1} + t^{-s}) f(t) dt$$

$\forall s \in \mathbb{C}$.
On définit HRA pour une fonction $J(s)$:

$$\exists A \geq 0, \forall s = x + iy, (x \in [0,1]) \wedge (y \geq A) \wedge (J(s) = 0) \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

2 Le théorème de l'intégrale tronquée

Théorème :
Pour tout B, on a HRA pour l'intégrale tronquée I_B.

Démonstration :
On fait un changement de variable $t = \exp(u)$, ce qui donne :

$$I_B(s) = \int_0^{\ln(B)} [\exp(su) + \exp((1-s)u)] \tilde{f}(u) du = 0$$

avec $\tilde{f}(u) = f(\exp(u))$.
On sépare alors les parties réelle et imaginaire :

$$Re = \int_0^{\ln(B)} cos(yu)[\exp(xu) + \exp((1-x)u)] \tilde{f}(u) du = 0$$

$$Im = \int_0^{\ln(B)} sin(yu)[\exp(xu) - \ exp((1-x)u)]\tilde{f}(u)du = 0$$

On applique alors la formule de Taylor-Lagrange à la partie imaginaire, ce qui permet de factoriser $(2x-1)$:

$$Im = (2x-1)\int_0^{\ln(B)} sin(yu)u\exp(cu)\tilde{f}(u)du$$

avec $c \in]x, 1-x[$.
On fait alors des intégrations par parties sur les deux parties réelle et imaginaire :

$$Re = \frac{sin(y\ln(B))}{y}[B^x + B^{1-x}]f(B) -$$

$$-\int_0^{\ln(B)} \frac{sin(yu)}{y}[(\exp(xu) + \exp((1-x)u))\tilde{f}(u)]'du = 0$$

$$Im = (2x-1)[-\frac{cos(y\ln(B))}{y}\ln(B)B^c f(B) +$$

$$+\int_0^{\ln(B)} \frac{cos(yu)}{y}[u\exp(cu)\tilde{f}(u)]'du] = 0$$

Une nouvelle intégration par parties implique que l'on a de manière uniforme en x :

$$Re = \frac{sin(y\ln(B))}{y}[B^x + B^{1-x}]f(B) + o(\frac{1}{y}) = 0$$

$$Im = (2x-1)[-\frac{cos(y\ln(B))}{y}\ln(B)B^c f(B) + o(\frac{1}{y})] = 0$$

Cela entraîne, le cosinus et le sinus ne pouvant être petits en même temps, qu'il existe une borne $A \geq 0$, $x = \frac{1}{2}$ pour $y \geq A$.