The truth about the energy-momentum tensor and pseudotensor

R.I. Khrapko*
Moscow Aviation Institute
(State University of Aerospace Technologies),
Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia

Аннотация

The operational and canonical definitions of an energy-momentum tensor are considered as well as the tensor and nontensor conservation laws. It is shown that the canonical energy-momentum tensor contradicts experiments and the operational definition, the Belinfante-Rozenfelf procedure worsens the situation, and the nontensor “conservation laws” is senseless. A definition of the 4-momentum of a system demands a translator, as an integration of vectors is senseless. The mass of a liquid sphere is calculated. It is shown, that, according to the standard energy-momentum pseudotensor, mass-energy of a gravitational field is positive. This contradicts the idea of negative gravitational energy and discredits the pseudotensor. And what is more, integral 4-pseudovectors are senseless in general, as reference frames for their components are not determined even for coordinates, which are Galilean at infinity

Рассмотрены операционное и каноническое определение тензора энергии-импульса, а так же тензорный и нетензорный законы сохранения. Показано, что канонический тензор энергии-импульса противоречит эксперименту и операционному определению, процедура Белинфанте-Розенфельда ухудшает ситуацию, а нетензорный "закон сохранения"бессмысленен. Определение (сохраняющегося) 4-импульса системы требует транслятора, поскольку интегрирование компонентов векторов самих по себе бессмысленно. Вычислена масса шара из жидкости. Показано, что, согласно стандартному псевдотензору энергии-импульса, масса-энергия гравитационного поля положительна, что противоречит идее отрицательной гравитационной энергии и дискредитирует псевдотензор энергии-импульса. Больше того, интегральный 4-псевдовектор вообще бессмыслен, так как для его компонентов не определен репер даже при координатах, галилеевых на бесконечности.

PACS: 04.02.-q, 02.40.-k

Some of notations

Indices: $i, j, \ldots = t, x, y, z$ or t, r, θ, φ; $\alpha, \beta, \ldots = x, y, z$ or r, θ, φ.
(Standard) pseudotensor of Einstein-Eddington-Tolman: $H^i_{\wedge k} = H^i_k \sqrt{g}_\wedge$.

*Email: khrapko_ri@mai.ru, khrapko_ri@hotmail.com

Pseudotensor of Landau-Lifshitz: $h^{ik}_{\wedge\wedge} = h^{ik} g_{\wedge\wedge}$.
Mass-energy of a body with its gravitation field, according to the pseudotensor: J.
Mass-energy of a body, i.e. the modulus of its 4-momentum: P.
Pressure in the interior of a massive ball: p.

1 Introduction

Если частицы или тела притягиваются друг к другу силами какого-то реального поля и соединяются, то масса соединения оказывается меньше, чем сумма масс исходных тел. Это называется (отрицательный) *дефект массы*. Самый простой пример дает электростатика. Протон и электрон, находящиеся далеко друг от друга, притягиваются друг к другу электрическими силами. При этом масса-энергия их собственных полей составляет часть их масс. Другую часть составляет вещество протона и электрона (если таковое существует). В процессе соединения протона и электрона в нейтральный атом водорода часть поля элиминирует вследствие интерференции, а соответствующая энергии превращается в кинетическую энергию этих частиц. Поэтому в процессе сближения сохраняется полная масса системы. Просто часть энергии поля превращается в кинетическую энергию частиц. Однако на заключительном этапе, при возникновении атома, часть кинетической энергии уходит в пространство в виде излучения. В результате масса атома водорода оказывается меньше, чем сумма масс свободных протона и электрона на 13,6 эВ. Но масса системы, атом + излучение, сохраняется.

При гравитационном притяжении ситуация иная. Рассмотрим вместо удаленных протона и электрона (пылевое) облако, окруженное собственным гравитационным полем. В процессе сжатия, как и в случае электростатики, частицы облака приобретают кинетическую энергию. От этого масса-энергия облака увеличивается (положительный дефект массы). Но гравитационное поле облака при этом не только не элиминирует, а, наборот, усиливается, распространяясь на освобожденную облаком территорию. А масса системы, облако + гравитационное поле, сохраняется по теореме Биркгофа и остается равной шварцшильдовскому параметру m. Поэтому гравитационному полю приходится приписывать *отрицательную* массу-энергию.

Для учета этой отрицательной гравитационной энергии используется стандартный псевдотензор гравитационного поля вместе с находящимся в нем веществом, $H^i_{\wedge k} = T^i_{\wedge k} + t^i_{\wedge k}$. [1, (89.3)]. Он равен сумме тензора энергии-импульса вещества и псевдотензора гравитационного поля. Последний, согласно существующему мнению, и обеспечивает отрицательный вклад, поскольку утверждается, что масса-энергия тела вместе с его гравитационным полем равна m. Это выражается формулой [1, 91,92,97]

$$J_t = \int (T^t_{\wedge t} + t^t_{\wedge t}) dV^\wedge_t = m.$$

В настоящей статье мы показываем, что такой вывод ошибочен. В действительности, псевдотензор гравитационного поля $t^i_{\wedge k}$ дает положительный вклад в этот интеграл. И это полностью дискредитирует идею псевдотензора гравитационного поля. Величина J_t не является ни массой, ни даже временной компонентой 4-импульса чего бы то ни было, поскольку она получена интегрированием *компоненты* $dJ_t = H^i_{\wedge t} dV^\wedge_i$

инфинитезимального 4-импульса, а не его модуля dJ. Однако начинаем мы статью с определения тензора энергии-импульса материи и рассмотрения проблем, связанных с его интегрированием.

2 The operational definition of an energy-momentum tensor

В настоящее время параллельно существуют два различных определения тензора энергии-импульса материи. С одной стороны, существует локальное операционное определение тензора энергии-импульса материи $T^{ik}_{\wedge}$ такого типа [2]:
Трехмерный инфинитезимальный элемент среды dV содержит или пропускает через себя инфинитезимальный 4-импульс

$$dP^i = T^{ik}_{\wedge} dV^{\wedge}_k. \tag{2.1}$$

Поясним это определение. «Тензор энергии-импульса» в действительности является тензорной *плотностью* (но мы будем для простоты называть его тензором). Для написания плотностей мы не пользуемся готическим шрифтом, как это обычно делается, см., например [3, 96]. Вместо этого мы отмечаем плотности знаком 'wedge' $\wedge$. Такое обозначение использовал И.А. Кунин [4] при переводе на русский язык монографии [5]. Однако в отличие от [4], мы ставим знак $\wedge$ на уровне нижних или верхних индексов для плотностей веса $+1$ или -1, соответственно. Символы Леви-Чивиты обозначаются $\epsilon^{\wedge}_{ijkl}$, $\epsilon^{ijkl}_{\wedge}$, а элемент объема или элементарная площадка с внешней ориентацией, которые являются плотностями веса -1 , обозначаются в пространстве-времени $dV^{\wedge}_k$ или $da^{\wedge}_{ik}$, соответственно; корень из определителя метрического тензора обозначается $\sqrt{g}_{\wedge}$. Например, при использовании сферических координат, $\sqrt{g}_{\wedge} = r^2 \sin\theta$; неподвижный 3-объем имеет компоненты

$$dV^{\wedge}_t = dV^{r\theta\varphi}\epsilon^{\wedge}_{tr\theta\varphi} = dr d\theta d\varphi, \quad dV^{\wedge}_r = dV^{\wedge}_\theta = dV^{\wedge}_\varphi = 0, \text{ or}$$
$$dV_t = dV^{\wedge}_t \sqrt{g}_{\wedge} = dr d\theta d\varphi r^2 \sin\theta;$$

элемент сферической поверхности имеет компоненты

$$da^{\wedge}_{tr} = da^{\theta\varphi}\epsilon^{\wedge}_{tr\theta\varphi} = d\theta d\varphi, \text{ or}$$
$$da_{tr} = da^{\wedge}_{tr}\sqrt{g}_{\wedge} = d\theta d\varphi r^2 \sin\theta;$$

тот же элемент поверхности, развернутый во времени, является 3-объемом с компонентами

$$dV^{\wedge}_r = dV^{t\theta\varphi}\epsilon^{\wedge}_{tr\theta\varphi} = dt d\theta d\varphi, \quad dV^{\wedge}_t = dV^{\wedge}_\theta = dV^{\wedge}_\varphi = 0.$$

Компонеты 4-импульса в неподвижном объеме равны

$$dP^i = T^{it}_{\wedge} dV^{\wedge}_t = T^{it}_{\wedge} dr d\theta d\varphi = T^{it}\sqrt{g}_{\wedge} dr d\theta d\varphi,$$

а 4-импульс, прошедший за dt через площадку $da^{\wedge}_{tr}$ имеет компоненты

$$dP^i = T^{ir}_{\wedge} dV^{\wedge}_r = T^{ir}_{\wedge} dt d\theta d\varphi.$$

Сам определитель метрического тензора является скалярной плотностью веса $+2$: $g_{\wedge\wedge}$. Важно отметить, что определение (2.1) даёт лишь координатную компоненту dP^i. Физическая компонента получается при учете соответствующего метрического коэффициента: $dP^{\hat{i}} = dP^i \sqrt{g_{ii}}$. Например, масса равна $dP^{\hat{t}} = dP^t \sqrt{g_{tt}}$.

Операционное определение тензора энергии-импульса использует, например, Synge [6] (сохранены обозначения автора):
“We borrow from the statistical model the interpretation of the energy tensor in terms of fluxes, and we make the following statement:

(flux of 4-momentum across a polarized 3-target dS_j) $= T^{ij} dS_j$”.

Рашевский [7] пишет:
“Допустим, что нас интересует общая картина распределения и движения энергии и импульса в пространстве и времени. Для ее описания мы должны построить в четырехмерном пространстве событий соответствующим образом подобранный дважды контравариантный симметрический тензор T^{ik} - тензор энергии-импульса”.

Локальную интерпретацию тензора энергии-импульса поддерживают (иногда) Ландау и Лифшиц [3, 96]:
“If the tensor T_{ik} is zero at some world point, then this is the case for any reference system, so that we may say that at this point there is no matter or electromagnetic field”.

Локальное определение тензора энергии-импульса дает *однозначно* значение инфинитезимального 4-импульса (2.1), которым обладает элемент $dV^{\wedge}_k$, и эта величина *наблюдается* экспериментально. Например, в случае электромагнитного поля, инфинитезимальная площадка $da^{\wedge}_{\beta}$, поглощающая электромагнитное излучение, то есть “черная площадка”, вне всякого сомнения, принимает мощность dI, силу давления света dF^i и импульс dP^i, согласно формулам:

$$dI = T^{t\beta}_{\wedge} da^{\wedge}_{\beta}, \quad dF^{\alpha} = T^{\alpha\beta}_{\wedge} da^{\wedge}_{\beta}, \quad dP^{\alpha} = T^{\alpha\beta}_{\wedge} da^{\wedge}_{\beta} dt. \tag{2.2}$$

Here

$$T^{\alpha\beta}_{\wedge} = g^{\alpha\gamma}(-F_{\gamma i} F^{\beta i}_{\wedge} + \delta^{\beta}_{\gamma} F_{ij} F^{ij}_{\wedge}/4), \tag{2.3}$$

есть максвелловский тензор напряжений, который является пространственной частью тензора энергии-импульса электродинамики (Максвелла)

$$T^{ik}_{\wedge} = g^{ij}(-F_{jl} F^{kl}_{\wedge} + \delta^k_j F_{lm} F^{im}_{\wedge}/4), \tag{2.4}$$

а $T^{t\beta}_{\wedge}$ есть вектор Пойнтинга.

Добавление любых членов к тензору энергии-импульса Максвелла приведет к нарушению совпадения расчетного результата с результатом эксперимента. А потому такое добавление недопустимо. Мы уже обращали на это внимание [8].

При необходимости определить 4-импульс P^i *макроскопического* тела или его части или, скажем, электромагнитного поля в резонаторе приходится интегрировать элементы (2.1) по всему объему.

$$P^i = \int dP^i = \int T^{ik}_{\wedge} dV^{\wedge}_k. \tag{2.5}$$

Это интегрирование не представляет проблем в декартовых координатах. Однако при использовании криволинейных координат компоненты интеграла (2.5) не образуют геометрическую величину (вектор) по двум причинам:

1) Формула (2.5) предполагает арифметическое сложение компонентов векторов dP^i, принадлежащих различным точкам пространства, в которых координатные реперы могут быть не параллельны. Поэтому **не существует репера**, к которому могли бы относиться компоненты интеграла P^i.

2) При замене координат $x^i = f^i(y^a)$ **не существует закона** преобразования компонентов P^i в компоненты P^a.

Ввиду этого, интеграл (2.5), вообще говоря, бессмысленен при использовании криволинейных координат. Мы будем называть такие величины *псевдовекторами.*

Для того чтобы интегрирование в криволинейных координатах имело геометрический смысл, неизбежно использование двухточечной тензорной функции, называемой транслятором, $\Psi_i^{i'}(x', x)$ [8, 9, 10]. С помощью такого транслятора перед интегрированием осуществляется перенос элементарных векторов $dP^i = T_\wedge^{ik} dV_k^\wedge$ в некоторую общую точку x', $dP^{i'}(x') = \Psi_i^{i'}(x', x) dP^i(x)$, где и производится интегрирование

$$P^{i'}(x') = \int \Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik} dV_k^\wedge. \tag{2.6}$$

Интегрирование (2.6) представляет собой интегрирование элементов $\Psi_i^{i'}(x', x) T_\wedge^{ik} dV_k^\wedge$, скалярных в точках x, и криволинейные координаты не вызывают проблем.

Если выполнить интегрирование (2.6) по замкнутой трехмерной гиперповерхности, дважды пересекающей мировую трубки изолированного тела в пространстве-времени, и это интегрирование дает ноль,

$$\oint \Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik} dV_k^\wedge = 0, \tag{2.7}$$

то возникает ковариантный закон сохранения. Преобразуем интеграл (2.7) к интегралу по 4-объему Ω, охваченному замкнутой гиперповерхностью $V = \partial\Omega$, по теореме Гаусса (которая, конечно, предполагает частное дифференцирование)

$$0 = \oint_{\partial\Omega} \Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik} dV_k^\wedge = \oint_{\Omega} \partial_k (\Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik}) d\Omega^\wedge. \tag{2.8}$$

Полученное выражение (2.8) удается упростить, потому что частная производная ∂_k в точке x от векторной плотности $\Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik}$ в точке x равна ковариантной производной: $\partial_k(\Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik}) = \nabla_k(\Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik})$. Так что

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Omega} \partial_k (\Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik}) d\Omega^\wedge = \oint_{\Omega} \nabla_k (\Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik}) d\Omega^\wedge \\ &= \oint_{\Omega} \nabla_k \Psi_i^{i'} T_\wedge^{ik} d\Omega^\wedge + \oint_{\Omega} \Psi_i^{i'} \nabla_k T_\wedge^{ik} d\Omega^\wedge. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Разумно вычислять импульс тела, считая транслятор $\Psi_i^{i'}(x', x)$ транслятором параллельного переноса. В этом случае, поскольку ковариантная производная ∇_k тоже основана на параллельном переносе, для плоского пространства будет

$$\nabla_k \Psi_i^{i'} = 0, \tag{2.10}$$

и из (2.9) мы получаем локальный ковариантный закон сохранения

$$\nabla_k T^{ik}_{\wedge} = 0, \tag{2.11}$$

который обеспечивает сохранение макроскопического импульса $P^{i'}(x\prime)$ изолированного тела при вычислении его в фиксированной мировой точке. Если мировая точка x' находится на гиперповерхности интегрирования интеграла (2.6) и двигается вместе с ней, то вектор $P^{i'}(x\prime)$ будет переноситься параллельно. В этом и заключается ковариантный закон сохранения макроскопической величины $P^{i'}(x\prime)$.

Важно, однако, что если рассматриваемое тело не изолировано, или рассматривается некая среда, испытывающая внешнее воздействие, то закон сохранения (2.11) нарушается. В этом случае тензор энергии-импульса среды таков, что

$$\nabla_k T^{ik}_{\wedge} = f^i_{\wedge}, \tag{2.12}$$

где $f^i_{\wedge}$ есть плотность 4-силы, действующей на рассматриваемую среду со стороны другой среды или поля. Это может быть сила Лоренца, сила светового давления, гравитационная сила (не геометризованная по Эйнштейну). Например, для тензора Максвелла электромагнитного поля, взаимодействующего с электрическими зарядами и токами, будет:

$$\nabla_k T^{ik}_{\wedge} = -g^{ij} F_{jl} j^i_{\wedge}. \tag{2.13}$$

Ковариантная производная от транслятора параллельного переноса равна нулю (2.10) в плоском пространстве, где этот транслятор не зависит от пути. Действительно, пусть в точке x' задан некий ковектор $f_{i'}$. Тогда транслятор $\Psi^{i'}_i$ индуцирует в окрестности точки x ковекторное поле $\Psi^{i'}_i(x', x+\xi) f_{i'}$, которое, однако, можно получить тем же параллельным переносом ковектора $\Psi^{i'}_i(x', x) f_{i'}$ из точки x в точки $x + \xi$:

$$\Psi^{i'}_i(x', x+\xi) f_{i'} = \Psi^{j}_i(x, x+\xi) \Psi^{i'}_j(x', x) f_{i'}. \tag{2.14}$$

Поэтому это поле, $\Psi^{i'}_i(x', x+\xi) f_{i'}$, оказывается ковариантно постоянным, что и доказывает (2.10). А вот при наличии кривизны пространства-времени поле $\Psi^{i'}_i(x', x+\xi) f_{i'}$ не будет ковариантно постоянным в окрестности точки x, $\nabla_k \Psi^{i'}_i \neq 0$, потому что оно будет отличаться от правой части равенства (2.14). В этом случае локальный закон сохранения не обеспечивает сохранение макроскопического импульса изолированного тела во времени. Изменение величины $P^{i'}$, приложенной в точке x', даёт выражение

$$\int_{\Omega} \nabla_k \Psi^{i'}_i T^{ik}_{\wedge} d\Omega^{\wedge}$$

. Пример рождения вещества в искривленном пространстве-времени был приведен в [11].

3 Canonical definition of an energy-momentum tensor

Одновременно с операциональным определением существует формальное определение тензора энергии-импульса материи как бездивергентной двузначковой тензорной плотности (причем имеется в виду *частная*, а не ковариантная дивергенция). С целью получения такой плотности записывается градиент лагранжиана материи [3]:

$$\partial_i \Lambda_\wedge = \frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial q}\partial_i q + \frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial(\partial_k q)}\partial_i \partial_k q$$

$$= \partial_k \frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial(\partial_k q)}\partial_i q + \frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial(\partial_k q)}\partial_i \partial_k q = \partial_k \left(\frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial(\partial_k q)}\partial_i q\right), \tag{3.1}$$

при использовании в нем производной из уравнений Эйлера-Лагранжа,

$$\frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial q} = \partial_k \frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial(\partial_k q)}. \tag{3.2}$$

После этого все переносится в одну сторону равенства (3.1) и обнаруживается, что

$$\partial_k \underset{c}{T}{}^{k}_{\wedge i} = 0, \tag{3.3}$$

где величина $\underset{c}{T}{}^{k}_{\wedge i}$ названа каноническим тензором энергии-импульса:

$$\underset{c}{T}{}^{k}_{\wedge i} = \frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial(\partial_k q)}\partial_i q - \delta^k_i \Lambda_\wedge. \tag{3.4}$$

Однако сама цель вызывает недоумение. Материя с бездивергентным тензором энергии-импульса ненаблюдаема, потому что для наблюдения нужно взаимодействие с наблюдателем, а при наличии взаимодействия дивергенция тензора энергии-импульса не равна нулю (2.12)!

Сравнение канонического тензора энергии-импульса (3.4) с операционным тензором раздела 2 путем использования его в уравнениях типа (2.1) затруднительно, потому что не ясен лагранжиан упругого вещества, имеющего механические напряжения. Насколько известно, никто этим не занимался. Популярен канонический тензор энергии-импульса электродинамики,

$$\underset{c}{T}{}^{ik}_{\wedge} = \frac{\partial \Lambda_\wedge}{\partial(\partial_k A_j)}\partial^i A_j - g^{ik}\Lambda_\wedge = g^{ij}(-\partial_j A_i F^{ki}_\wedge + \delta^k_j F_{lm} F^{lm}_\wedge/4), \tag{3.5}$$

получаемый с использованием лагранжиана свободного электромагнитного поля

$$\Lambda_\wedge = -F_{ij}F^{ij}_\wedge/4. \tag{3.6}$$

Однако тензор (3.5) физически абсурден в качестве тензора энергии-импульса: он не симметричен, он дает отрицательную плотность энергии в однородном электрическом поле $E_x = E$ [12],

$$\underset{c}{T}{}^{tt} = F_{xt}F^{xt}/2 = -E^2/2, \tag{3.7}$$

он никак не похож на экспериментально обоснованный тензор Максвелла (2.4), и дивергенция его, вопреки провозглашенной цели, не равна нулю,

$$\partial_k \underset{c}{T}{}^{ik}_{\wedge} = -g^{ij}\partial_j A_l j^l_\wedge, \tag{3.8}$$

и отличается от дивергенции тензора Максвелла (2.13). Это отличие дивергенции означает, что даже никакие бездивергентные добавки типа $\partial_l \Psi^{ikl}$, $\Psi^{ikl} = -\Psi^{ilk}$ не могут превратить канонический тензор (3.5) в тензор Максвелла (2.4). И это притом, что никакие добавки к истинному тензору энергии-импульса недопустимы вообще.

Тем не менее, знаменитая процедура Белинфанте-Розенфельда [13, 14] заключается именно в добавлении величины такого типа, $\partial_l(A^i F^{kl})$, к каноническому тензору энергии-импульса (3.5). В результате получается тензор, который мы назвали стандартным тензором [15]:

$$\underset{st}{T}{}^{ik}_{\wedge} = g^{ij}(-\partial_j A_i F^{ki}_{\wedge} + \delta^k_j F_{lm} F^{lm}_{\wedge}/4) + \partial_l(A^i F^{kl}) = T^{ik}_{\wedge} + A^i j^k_{\wedge}. \tag{3.9}$$

Этот тензор по-прежнему несимметричен и еще более нелеп, чем канонический тензор, поскольку явно содержит плотность тока $j^k_{\wedge}$, величину, которая является инородной к электромагнитному полю. Естественно, ни канонический, ни стандартный тензор нигде не используются в практических расчетах.

Не получив тензора Максвелла в рамках канонического формализма, но желая спасти престиж этого формализма, физики, устами Фейнмана [16], prefered to put on sackcloth and ashes:

“We would like to say that we have not really ‘proved’ the Poynting formulas. How do we know that by juggling the terms around some more we couldn’t find another formulas for ‘u’ and another formulas for ‘$\mathbf{S}$’? The new $\mathbf{S}$ and the new u would be different, but they would still satisfy

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -du/dt - \nabla \cdot \mathbf{S}.$$

It’s possible. There are, in fact, an infinite number of different possibilities for u and $\mathbf{S}$, and so far no one has thought of an experimental way to tell which one is right!”

Очевидно, что это весьма странное заявление полностью противоречит реальности (и разделу 2 настоящей статьи), однако представление о неопределенности и нелокализуемости энергии поля преподносится всеми учебниками. Например:

“Локализация потока энергии приводит к парадоксам” [17]

“Необходимо заметить, что [каноническое] определение тензора энергии-импульса T^{ik} по существу не однозначно” [3]

“It is clear from the definition that $\theta^{\mu\nu}$ is not, in general, symmetric. On the other hand, neither is it unique, for we may add a term $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$” [18]

“Нас будут интересовать лишь интегральные динамические величины, подобные 4-вектору энергии-импульса P^α . Структура тензора $T^{\alpha\beta}$, который в нашем изложении не является даже однозначным, приобретает самостоятельный интерес лишь в последовательной теории, включающей учет гравитационных эффектов” [19]

(Более полное цитирование классиков приведено в [8]).

Заканчивая этот раздел, мы вспомнили высказывание Отца Ельчанинова. Несколько адаптированное, оно звучит так:

“В свете любви (канонического формализма) разум принимает видимые абсурды веры (в канонический формализм)”.

Кроме того, в данной статье важно отметить, что, в свете изложенного, грандиозные построения, основанные на неких лагранжианах с целью решить проблему энергии в теории тяготения Эйнштейна (см., например [20]), выглядят не убедительными.

4 Nontensor conservation law

Как было отмечено в разделе 2, *ковариантный* локальный закон сохранения (2.11),

$$\nabla_k T^{ik}_{\wedge} = 0, \tag{4.1}$$

в любых криволинейных координатах плоского пространства-времени обеспечивает сохранение во времени макроскопического 4-вектора импульса (2.6), создаваемого в точке x' при использовании транслятора $\Psi^{i'}_i$, то есть независимость его от пространственно подобной гиперповерхности V:

$$P^{i'}(x') = \int_{V_1} \Psi^{i'}_i T^{ik}_{\wedge} dV^{\wedge}_k = \int_{V_2} \Psi^{i'}_i T^{ik}_{\wedge} dV^{\wedge}_k. \tag{4.2}$$

(гиперповерхности V_1, V_2 имеют общую границу, некоторую замкнутую поверхность).

Нетензорный закон, использующий частную дивергенцию тензора или нетензора, безразлично,

$$\partial_k T^{ik} = 0, \tag{4.3}$$

обеспечивает сохранение во времени *нетензорной* интегральной величины, псевдо вектора (2.5)

$$P^i = \int T^{ik} dV_k^{;} \tag{4.4}$$

в любом пространстве и в любых координатах. Действительно,

$$\int_{V_2} T^{ik} dV_k - \int_{V_1} T^{ik} dV_k = \oint_{\partial\Omega} T^{ik} dV_k = \int_{\Omega} \partial_k T^{ik} d\Omega = 0,$$

$$P^i = \int_{V_1} T^{ik} dV_k = \int_{V_2} T^{ik} dV_k, \tag{4.5}$$

Однако в этом мало хорошего. Между формулами (4.2) и (4.5) имеется принципиальная разница. Вектор $P^{i'}(x')$ (4.2) *приложен* к конкретной точке $x\prime$, а четверка чисел P^i (4.4), (4.5) не является функцией точки; у этой величины нет аргумента; результат интегрирования (2.5), (4.4) не приложен ни к какой конкретной точке пространства-времени и поэтому лишен геометрического смысла, ибо не известен репер, к которому относятся компоненты P^i, и не существует закона их преобразования при замене координат. Чтобы ощутить бессмысленность нетензорных формул (4.3), (4.4) в криволинейных координатах, рассмотрим плоскость с механическими напряжениями. Пусть тензор напряжений отличен от нуля в правой полуплоскости и задан в полярных координатах r, φ при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ формулами:

$$T^{rr}_{\wedge} = r \sin\varphi,\ T^{r\varphi}_{\wedge} = T^{\varphi r}_{\wedge} = \cos\varphi,\ T^{\varphi\varphi}_{\wedge} = 0. \tag{4.8}$$

Нетензорный закон сохранения (4.3) выполняется для этого тензора:

$$\partial_r T_\wedge^{rr} + \partial_\varphi T_\wedge^{r\varphi} = \sin\varphi - \sin\varphi = 0,\ \partial_r T_\wedge^{\varphi r} + \partial_\varphi T_\wedge^{\varphi\varphi} = 0. \tag{4.9}$$

Соответственно, нетензорный интеграл (4.4), получаемый интегрированием по окружности $r = const$, не зависит от радиуса окружности,

$$F^r = \int T_\wedge^{rr} dl_r^\wedge = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\sin\varphi d\varphi = 0,\ F^\varphi = \int T_\wedge^{\varphi r} dl_r^\wedge = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2. \tag{4.10}$$

Эти интегралы претендуют на то, что дают компоненты силы F^i, которая действует на дугу радиуса r в этой напряженной полуплоскости, и не зависит от радиуса дуги. Однако эти компоненты не определяют какое-либо *направление*, ибо они не приложены к какой-то конкретной точке, а вектор с компонентой $F^\varphi = 2$ имеет различное направление в пространстве, в зависимости от точки его приложения. Поэтому псевдо векторные интегралы (4.10) бессмысленны.

Итак, наше сравнение ковариантного условия (4.1) и нетензорного условия (4.3) показало бессмысленность нетензорного условия. Однако в [3, 96], к сожалению, утверждается прямо противоположное, что *ковариантное* уравнение (4.1) не влечет сохранение чего бы то ни было, а *нетензорное* уравнение типа (4.3) следует использовать для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей. Поэтому целью теории становится введение нетензорной конструкции с нулевой частной дивергенцией вместо тензора энергии-импульса с нулевой ковариантной дивергенцией. Мы проследуем за рассуждениями [3, 96] в разделах 6 и 7.

5 The mass of a sphere of perfect fluid

Как отмечено во Введении, важно правильно подсчитывать массу-энергию вещества вместе с его гравитационным полем. К сожалению, определение интегрального 4-импульса макроскопического тела в искривленном пространстве общей теории относительности (ОТО), вообще говоря, проблематично. И, на наш взгляд, вовсе не обязательно существует адекватное определение этой величины. Не все желаемое существует! Однако в отдельных простых случаях такое определение возможно при использовании транслятора и формулы (2.6). Так, в частности, можно определить массу сферы из идеальной жидкости, что важно для дальнейшего.

Рассмотрим (внутреннее и внешнее) пространство Шварцшильда, которое описывает сферу из идеальной жидкости. Внутреннее пространство зависит от двух параметров, R и r_1, причем $0 \le r \le r_1 \le R$ [1]:

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{5.1}$$

$$\sqrt{-g}_\wedge = \sqrt{-g_{tt} g_{rr}}\, r^2 \sin\theta. \tag{5.2}$$

Здесь R есть радиус кривизны пространства, определяемый постоянной плотностью жидкости $\rho = 3/(8\pi R^2)$, а r_1 есть координата поверхности сферы, где и происходит сшивка с внешним пространством Шварцшильда, которое зависит от одного параметра $m = r_g/2$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{5.3}$$

Видно, что при гладкой сшивке $m = r_1^3/2R^2$.

Для расчета массы-энергии жидкости нашей сферы надо знать тензор энергии-импульса жидкости, и вычислить его можно через тензор Эйнштейна:

$$T^{ik} = G^{ik}/8\pi = (R^{ik} - g^{ik} R^{lm} g_{lm}/2)/8\pi. \tag{5.4}$$

Сфера неподвижна, поэтому из компонент T^{it} только компонента T^{tt} отлична от нуля. Компонента T_t^t вычислена в [1]. По формуле [1, (96.7)], $T_t^t = \rho = 3/(8\pi R^2)$.

Если применить нетензорную формулу (2.5), получится компонента интегрального псевдовектора

$$P_t = \int T_t^t \sqrt{-g_\wedge} dr d\theta d\varphi = \int_0^{r_1} \frac{3}{8\pi R^2} \sqrt{g_{tt}} \sqrt{-g_{rr}} r^2 dr 4\pi. \tag{5.5}$$

Эта величина, конечно, не является массой сферы уже потому, что масса является модулем 4-вектора P. Можно подумать, что масса получится делением этой величины на метрический коэффициент, $P = P_t/\sqrt{g_{tt}}$. Однако напоминаем, индекс t тут “псевдо вектроный”, то есть фиктивный, поскольку не определено, в какой точке области интегрирования приложен псевдовектор P_t. А это существенно, потому что $\sqrt{g_{tt}}$ изменяется в области интегрирования от $(3\sqrt{1 - r_1^2/R^2} - 1)/2$ до $\sqrt{1 - r_1^2/R^2}$. Если положить для наглядности $r_1 = 2$, $R^2 = 8$, $m = 1/2$, то $\sqrt{g_{tt}}$ изменяется в пределах $0.57 < \sqrt{g_{tt}} < 0.71$. Так что, во-первых, компонента псевдовектора P_t (5.5) не помогает найти массу, а, во-вторых, она оказывается значительно меньше массы P, $P_t \approx 0.64P$ для выбранных значений параметров. И нелепо прикладывать P_t к точке на бесконечности, где $\sqrt{g_{tt}} = 1$.

Для получения правильного значения массы жидкости P воспользуемся тем, что в данном случае инфинитезимальные векторы dP^i все параллельны между собой, а потому можно складывать их модули, которые не изменяются при переносе транслятором в единую точку для суммирования. Поэтому можно беспрепятственно интегрировать инфинитезимальные модули $dP = dP_t/\sqrt{g_{tt}}$, и, вместо (5.5), мы получим:

$$P = \int dP_t/\sqrt{g_{tt}} = \int T_t^t \frac{\sqrt{-g_\wedge}}{\sqrt{g_{tt}}} dr d\theta d\varphi = \int_0^{r_1} T_t^t \sqrt{-g_{rr}} r^2 dr 4\pi = \int_0^{r_1} \frac{3}{2R} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \tag{5.6}$$

Интегрирование дает:

$$P = \frac{3R}{4}(\arcsin\xi - \xi\sqrt{1 - \xi^2}), \ \xi = \frac{r_1}{R}. \tag{5.7}$$

Ограничившись двумя членами разложения по ξ в формуле (5.7), получим

$$P = m(1 + \frac{3r_1^2}{10R^2} + \ldots). \tag{5.8}$$

Превышение массы сферы P над шварцильдовским параметром m названо в [3, 100] (положительным) гравитационным дефектом массы. Псевотензору гравитационного поля, который мы рассматриваем в следующем разделе, предназначено внести отрицательный вклад в полную массу системы: вещество + гравитационное поле, чтобы сделать эту полную массу равной швабршильдовскому параметру m.

Интересно, что интегрирование формулы (5.5) показывает, что величина P_t не только меньше, чем масса P, но и меньше, чем шварцшильдовский параметр m:

$$P = m(1 - \frac{3r_1^2}{10R^2} + \ldots). \tag{5.9}$$

6 The standard energy-momentum pseudotensor of the gravitational field

Идея связать материю с геометрией была реализована Эйнштейном, когда он приравнял тензор энергии-импульса материи, имеющий нулевую ковариантную дивергенцию, единственному геометрическому тензору (Эйнштейна) с нулевой ковариантной дивергенцией:

$$T^{ik} = G^{ik}/8\pi = (R^{ik} - g^{ik}R^{lm}g_{lm}/2)/8\pi, \quad \nabla_k T^{ik}_{\wedge} = 0. \ \nabla_k G^{ik}_{\wedge} = 0. \tag{6.1}$$

Таким образом, было ликвидировано (геометризовано) гравитационное поле. В рамках ОТО решаются все динамические задачи, однако, в связи с ликвидацией гравитационного поля, с самого начала возникла проблема энергии-импульса (ликвидированного) гравитационного поля. Хотя все отдавали себе отчет в том, что понятие энергии является некоторой роскошью, без которой можно обойтись при решении задач, тем не менее, хотелось ввести “энергию гравитационного поля”, и ввести её для того, чтобы распространить на гравитацию закон сохранения полной энергии.

Для материализации идеи энергии-импульса гравитационного поля и для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей была предложена *нетензорная* плотность с нулевой *частной* дивергенцией, в соответствии с верой в то, что *нетензорное* уравнение типа (4.3) обеспечивает сохранение чего-то. Эта плотность, мы обозначаем ее $H^i_{\wedge k}$, содержит производные первого и второго порядков метрического тензора используемой системы координат. В [1, (89.3)] она приведена в виде частной дивергенции (но не от антисимметричной величины, как это обычно бывает). Эта плотность называется псевдотензором энергии-импульса материи вместе с гравитационным полем:

$$H^i_{\wedge k} = \partial_l H^{il}_{\wedge k} = \partial_l [g^{im}_{\wedge}(\Gamma^l_{km} - \delta^l_{(k}\Gamma_{m)} - \delta^i_k g^{mn}_{\wedge}(\Gamma^l_{mn} - \delta^l_m \Gamma_n)/2]/8\pi, \quad \Gamma_m = \Gamma^n_{mn}. \tag{6.2}$$

Частная дивергенция псевдотенора $H^i_{\wedge k}$ удивительным образом равна нулю в любой системе координат:

$$\partial_i H^i_{\wedge k} = 0. \tag{6.3}$$

Равенство нулю *ковариантной* дивергенции *тензора* в любой системе координат не удивительно. Однако здесь нулевая частная дивергенция псевдотензора сохраняется при замене координат за счет того, что изменяется геометрическое содержание самого псевдотензора в том смысле, что изменяется значение свертки $H^i_{\wedge k} V_i^\wedge V^k$ с фиксированными векторами. В случае *тензора*, чей геометрический смысл фиксирован, *частная* бездивергентность обычно нарушается при замене координат.

Единственность бездивергентного псевдотензора (6.2), видимо, не исследовалась, и, по-видимому, нет сведений о псевдотензоре с двумя верхними индексами, $H^{ij}_\wedge$, $\partial_j H^{ij}_\wedge = 0$.

Псевдотензор (6.2) называется псевдотензором энергии-импульса материи вместе с гравитационным полем потому, что, если используемая система координат оказывается локально галилеевой в некоторой точке пространства-времени, то псевдотензор (6.2) совпадает в этой точке с тензором Эйнштейна, и, соответственно, с тензором энергии-импульса материи, находящейся в этой точке: $H^i_{\wedge k} \cong G^i_{\wedge k}/8\pi = T^i_{\wedge k}$. (Мы обозначаем знаком приближенного равенства $\cong$ равенства, справедливые в центре локально галилеевой системы координат). В остальных точках псевдотензор отличается от тензора энергии-импульса материи. Разница называется *псевдотензором гравитационного поля* $t^i_{\wedge k}$. Так что псевдотензор (6.2) представляет собой сумму тензора энергии-импульса материи и псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля: $H^i_{\wedge k} = (T^i_\wedge + t^i_\wedge)\sqrt{-g}_\wedge$.

Материализация идеи энергии-импульса гравитационного поля, осуществленная с помощью псевдотензора $H^I_{\wedge k}$, заключается в следующем **определении**:

4-импульс материи вместе с гравитационным полем дается интегралом [1, (88.4)]

$$J_k = \int_V H^i_k \sqrt{-g}_\wedge dV_i^\wedge = \int_V (T^i_k + t^i_k)\sqrt{-g}_\wedge dV_i^\wedge \tag{6.4}$$

при интегрировании по гиперповерхности V, включающей в себя всё трёхмерное пространство, и компоненты этого интеграла имеют одинаковые значения для двух гиперповерхностей V_1 и V_2, опирающихся на общую границу в виде замкнутой двумерной поверхности, в силу (6.3). То есть

$$J_k = \int_{V_1} H^i_k dV_i = \int_{V_2} H^i_k dV_i, \tag{6.5}$$

как и в (4.5).

Естественно, интеграл (6.4) вызывает критику, высказанную в разделе 4: четверка чисел J_k (6.4) не приложена ни к какой конкретной точке пространства-времени и поэтому лишена геометрического смысла, ибо не известен репер, к которому относятся компоненты J_k.

Но оставим в стороне фатальные претензии, связанные с отсутствием репера, поддерживающего компоненты J_k. Посмотрим, как на практике используется псевдотензор (6.2) в простейшем случае, разобранном в разделе 4, то есть при подсчете массы материи шара вместе с его гравитационным полем.

В [1, (92.4),(97.2)] приведена явная форма псевдотензора гравитационного поля,

$$t^t_t = 3p, \tag{6.6}$$

где p обозначает давление внутри шара. Этот псевдотензор гравитационного поля используется в формуле (6.4) в системе координат с изотропной метрикой

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{6.7}$$

и после вычислений в [1, 97] приводится результат:

$$J_t = \int (T_t^t + 3p)\sqrt{-g}_\wedge dxdydz = P_t + \int 3p\sqrt{-g}_\wedge dxdydz = m. \tag{6.8}$$

Этот результат понятен: псевдокомпонента P_t меньше m, как было отмечено в разделе 5; пседотензор гравитационного поля приносит положительную добавку; в результате сумма равна m.

Однако псевдокомпоненты $J_t,\ P_t$ не представляют массы. Действительная масса материи шара вместе с его гравитационным полем в контексте использования псевдотензора гравитационного поля дается формулой типа (5.6)

$$J = \int H_t^t \frac{\sqrt{-g}_\wedge}{\sqrt{g_{tt}}} dxdydz = \int (T_t^t + 3p)\frac{\sqrt{-g}_\wedge}{\sqrt{g_{tt}}} dxdydz = P + \int 3p \frac{\sqrt{-g}_\wedge}{\sqrt{g_{tt}}} dxdydz > m. \tag{6.9}$$

Эта масса существенно больше, чем m, поскольку уже масса одной материи $P > m$. Положительный вклад псевдотензора гравитационного поля, означает полный крах всей конструкции, потому что псевдотензору назначено внести отрицательный вклад, соответствующий отрицательной гравитационной массе-энергии.

Одновременно оказывается скомпрометирован гамильтонов подход к решению проблемы энергии в теории тяготения Эйнштейна, основанный на неких лагранжианах, и упомянутый в конце раздела 3. Ибо в [20] констатируется "совпадение результатов гамильтонова подхода и подхода, основанного на использовании псевдотензора энергии-импульса к определению полной энергии в асимптотически плоском пространстве-времени".

7 The Landau-Lifshitz pseudotensor of the gravitational field

Ландау и Лифшиц [3, 96] нашли гораздо более простую конструкцию псевдотензора, чем (6.2), к тому же представленную в виде дивергенции от антисимметричной величины, что автоматически обеспечивает нулевую частную дивергенцию,

$$h_{\wedge\wedge}^{ik} = \partial_l h_{\wedge\wedge}^{ikl} = \partial_{lm}^2(-g_{\wedge\wedge} g^{i[k} g^{l]m})/8\pi, \tag{7.1}$$

$$\partial_k h_{\wedge\wedge}^{ik} = 0. \tag{7.2}$$

К сожалению, псевдотензор (7.1) является плотностью веса +2, так что в точках пространства-времени, где используемая система координат делается локально галилеевой, этот псевдотензор совпадает с тензорной плотностью Эйнштейна с точностью до множителя $\sqrt{-g}_\wedge$:

$$h_{\wedge\wedge}^{ik} \cong \sqrt{-g}_\wedge G_\wedge^{ik}/8\pi = -g_{\wedge\wedge}(R^{ik} - g^{ik}R/2)/8\pi = -g_{\wedge\wedge}T^{ik}. \tag{7.3}$$

Разумеется, в других точках пространства-времени псевдотензор $h_{\wedge\wedge}^{ik}$ отличается от тензора $-g_{\wedge\wedge}T^{ik}$. Разница называется псевдотензором гравитационного поля t^{ik}.

Так что псевдотензор (7.1) рассматривается как сумма тензора энергии-импульса материи и псевдотензора ЭИ гравитационного поля:

$$h^{ik}_{\wedge\wedge} = -g_{\wedge\wedge}(T^{ik} + t^{ik}), \quad t^{ik} \cong 0. \tag{7.4}$$

Интегрирование псевдотензора (7.1) по гиперповерхности V, включающей в себя всё трёхмерное пространство,

$$J^i_\wedge = \int h^{ik}_{\wedge\wedge} dV^\wedge_k, \tag{7.5}$$

по определению, представляет массу-энергию материи вместе с гравитационным полем. В отличие от (6.4), интеграл (7.5) является векторной плотностью. Вычисление массы-энергии для сферы из жидкости с использованием (7.1), по-видимому, не производилось.

При отсутствии гравитационного поля в галилеевых координатах $h^{ik}_{\wedge\wedge} = 0$ всюду (так же, как и $H^i_{\wedge k} = 0$). Это, в частности, означает, что интеграл (7.5) равен нулю в соответствии с тем, что в плоском пространстве-времени материя и гравитационное поле отсутствуют. Однако в [3, 96] про интеграл (7.5),

$$J^i_\wedge = \int (-g_{\wedge\wedge})(T^{ik} + t^{ik}) dV^\wedge_k, \tag{7.6}$$

сказано, что он в плоском пространстве не равен нулю, а переходит в $\int T^{ik} dV_k$, т.е. в 4-импульс материи без гравитационного поля. Это противоречие возникло ввиду двусмысленности обозначений. В формуле [3, (96,7)] подразумевается, что

$$T^{ik} = (R^{ik} - g^{ik}R/2)/8\pi, \tag{7.7}$$

а в других местах, по-видимому, T^{ik} не связан с кривизной пространства.

Нетензорный интеграл (7.5) вызывает те же возражения, что и интеграл (6.4). Они связаны с отсутствием репера, поддерживающего компоненты интеграла $J^i_\wedge$. Нелепо прикладывать $J^i_\wedge$ к точке на бесконечности, где $\sqrt{g_{tt}} = 1$. Поскольку репер компонентов (7.5) не определен, этот «сохраняющийся» интеграл бессмысленен.

8 Conclusion

Псевдотензор энергии-импульса не решает проблему гравитационной энергии в силу двух причин:
1) Псевдотензор не имеет физического смысла из-за нетензорности его определения. Использование асимптотически плоского окружения не снимает этот фатальный диагноз.
2) Приписываемый псевдотензору физический смысл – ошибочен, поскольку, согласно псевдотензору, например, энергия гравитационного поля массивного шара положительна.

Возможно, понятие массы-энергии гравитационного поля не адекватно природе так же, как и само понятие гравитационного поля, которое, согласно ОТО Эйнштейна, заменено искривленным пространством-временем. Отмечено, что масса-энергия материальных систем и полей может подсчитываться в искривленном пространстве при использовании трансляторов.

Список литературы

[1] Tolman R. C. "Relativity Thermodynamics and Cosmology (Oxford Clarendon 1969)

[2] Khrapko R. I. Classical spin in space with and without torsion. Gravitation & Cosmology, 10, No. 1-2, 91-98 (2004)
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=18&module=files

[3] Landau L. D., Lifshitz E. M. The Classical Theory of Fields. (Pergamon, N. Y. 1975).

[4] Схоутен Я.А. Тензорный анализ для фзиков. (М.: Наука, 1965)

[5] Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicists (Clarendon, Oxford, 1951)

[6] Synge J. L. Relativity: The General Theory (North-Holland Amsterdam 1960)

[7] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. (М.: Гостехиздат, 1967) с.304.

[8] Khrapko R. I. "Energy-momentum Localization and Spin". Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Physic. 2002, 10(1), p. 35
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?module=files&id=32

[9] Храпко Р.И., Теорема Остроградского-Гаусса в искривленном пространстве. Тезисы докладов всесоюзной гравитационной конференции (ГР-IV, Минск, 1-3 июля, 1976 г.) с. 64.

[10] Khrapko R. I. Path-dependent functions Theoretical and Mathematical Physics Volume 65, Issue 3, December 1985 p. 1196
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=19&module=files

[11] Khrapko R. I. An example of creation of matter in a gravitation field. Soviet Physics JETP 35 (3) 441-442 (1972)
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=93&module=files

[12] Khrapko R. I. Spin flux gives rise to antisymmetric stress tensor
http://mai.ru/publications/index.php?ID=8925 (2009)

[13] Belinfante F. J., Physica 6, 887 (1939).

[14] Rosenfeld L., Sur le Tenseur D'Impulsion-Energie. Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Belgiques 8 No 6 (1940).

[15] Khrapko R.I., Mechanical stresses produced by a light beam. J. Modern Optics, 55, 1487-1500 (2008)
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=9&module=files

[16] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., The Feynman Lectures on Physics (Addison–Wesley, London, 1965) Vol. 3.

[17] Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике (М.: Наука, 1972) с. 19

[18] Ryder L. H., Quantum Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge 1985)

[19] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. (М.: ГИТТЛ, 1957) с.23

[20] Фаддеев Л.Д. Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна. УФН, 136, 435 (1982)