SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS,
BOLETÍN N.º 61, JUNIO DE 2002

Propiedades y Problemas relacionados con las Funciones de Smarandache

Sebastián Martín Ruiz

Avda. De Regla, 43, Chipiona 11550 (Cádiz)

Minh Perez

Rehoboth, Box 141, NM 87301, EE. UU.
e-mail: minh@yahoo.com

Abstract

In this paper we present the definitions and some properties of several Smarandache type functions that are involved in many proposed solved and unsolved problems and conjectures in number theory and recreational mathematics. Examples are also provided. Interesting problems related to them are proposed as addenda to this article.

1. Introducción

La *Función de Smarandache* más conocida, la cual ha llegado a ser una función clásica en teoría de números es la siguiente:

S: N → N*, S(1)=1,S(n) es el menor entero tal que S(n)! es divisible por n.*

Por ejemplo: S(6)=3, ya que 3!=1·2·3=6 que es divisible por 6, y 3 es el menor número con esta propiedad, i.e. 2! no es divisible por 6. S(8)=4, S(11)=11.

Esta función ha sido muy estudiada la pasada década y se han descubierto interesantes propiedades en relación a ella.

2. Propiedades

2.1. Max{p, p es primo y p divide n} $\leq S(n) \leq n$ para cualquier entero positivo n.

2.2. Si $n = (p_1\char`^s_1) \cdot (p_2\char`^s_2) \cdot\ldots\cdot (p_k\char`^s_k)$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son primos distintos entonces $S(n) = \max\limits_{1\leq i\leq k} \{S(p_i\char`^s_i)\} \leq \max\limits_{1\leq i\leq k}\{p_i\cdot s_i\}$.

2.3.Caracterización de los números primos
Sea p un entero > 4. Entonces: p es primo si y solo si S(p)=p.

Demostración: Sea p un número primo>4 y supongamos que S(p)=m<p, entonces m! no es divisible por p, por tanto S(p)=p. Por otro lado, sea S(p) = p y p ≠ 4; supongamos que p no es primo, por tanto existen dos enteros s y t, con s≤t<p, tal que p = s·t, pero entonces S(p) ≤ t ≠ p ya que t! es divisible por s y t a la vez (i.e. t! es divisible por p). Contradicción.

2.4 *Una fórmula exacta para calcular el número de primos menores o iguales que x* (L. Seagull): Si x es un entero ≥ 4, entonces el número de primos ≤ x es:

$$\prod(x) = -1 + \sum_{k=2}^{x} \left\lfloor \frac{S(k)}{k} \right\rfloor$$

donde S(k) es la Función de Smarandache clásica, y $\lfloor a \rfloor$ es la parte entera de a (el mayor entero menor o igual que a).

Demostración: Conocemos que la función de Smarandache tiene la propiedad que si p > 4 entonces S(p) = p si y solo si p es primo, además S(k)<=k para todo k, y S(4)=4 (la única excepción para lo primero), con esto podemos encontrar fácilmente la fórmula exacta para el número de primos menores o iguales que x.

3. Conjeturas

3.1. La ecuación diofántica S(n) = S(n+1) no tiene solución. (L. Tutescu)

3.2. La ecuación diofántica S(n) + S(n+1) = S(n+2) tiene infinitas soluciones (I. M. Radu)

4. Mas Tipos de Funciones de Smarandache

Las siguientes han sido consideradas y estudiadas:

4.1 La *Función Doble Factorial de Smarandache*:
Sdf(n) es el menor entero tal que Sdf(n)!! es divisible por n, donde el doble factorial se define como: m!! = 1·3·5·...·m, si m es impar; y m!! = 2·4·6·...·m, si m es par.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
SDF(n)	1	2	3	4	5	6	7	4	9	10	11	6	13	14	5	6

4.2 *Función de Smarandache-Kurepa*:
Para un primo p, SK(p) es el menor entero tal que !SK(p) es divisible por p, donde !m = 0! + 1! + 2! + ... + (m-1)!

Por ejemplo:

p	2	3	7	11	17	19	23	31	37	41	61	71	73	89
SK(p)	2	4	6	6	5	7	7	12	22	16	55	54	42	24

4.3 *Función de Smarandache-Wagstaff*:
Para un primo p, SW(p) es el menor entero tal que W(SW(p)) es divisible por p, donde W(m) = 1! + 2! + ... + (m)!

Por ejemplo:

p	3	11	17	23	29	37	41	43	53	67	73	79	97
SW(p)	2	4	5	12	19	24	32	19	20	20	7	57	6

4.4 *La función Superior de Smarandache de orden k*:
Sk(n) es el menor entero para el cual n divide a Sk(n)^k

Por ejemplo, para k=2, tenemos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S2(n)	1	2	3	2	5	6	7	4	3	10	11	6	13	14	15	4

4.5 *Función Pseudo-Smarandache:*

Z(n) es el menor entero tal que 1 + 2 + ... + Z(n) es divisible por n.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7
Z(n)	1	3	2	3	4	3	6

4.6 *Función Entorno al Primorial de Smarandache*:
SNTP(n) es el menor primo tal que alguno de estos tres valores p# - 1, p#, o p# + 1 es divisible por n, donde p# , para un número primo p, es el producto de todos los primos menores o iguales que p. Esta función solo existe para valores de n libres de cuadrados.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	59	...
SNTP(n)	2	2	2	?	3	3	3	?	?	5	11	...	13	...

5. Otros tipos de funciones de Smarandache

Las siguientes han sido estudiadas los últimos años:

5.1 Sea f: $Z \rightarrow Z$ una función estrictamente creciente y x un elemento de R, Entonces:

a) *f-Parte Inferior de Smarandache* de x, ISf(x), es el menor k tal que $f(k) \leq x < f(k+1)$.
b) *f-parte Superior Smarandache* de x, SSf(x) es el menor k tal que $f(k) < x \leq f(k+1)$.

Casos Particulares:

a) Parte S-Prima Inferior:
Para cualquier número real n positivo definimos ISp(n) como el mayor primo menor o igual que n.
Los primeros valores de esta función son:
2,3,3,5,5,7,7,7,7,11,11,13,13,13,13,17,17,19,19,19,19,23,23.

b) Parte S-Prima Superior:
Para cualquier número real positivo n definimos SSp(n) es el menor primo mayor o igual que n:
Los primeros valores de esta función son:
2,2,2,3,5,5,7,7,11,11,11,11,13,13,17,17,17,17,19,19,23,23,23.

c) Parte S-Cuadrada Inferior:
Para cualquier número real positivo n definimos ISs(n) como el mayor cuadrado menor o igual que n:
Los primeros valores de esta función son:
0,1,1,1,4,4,4,4,4,9,9,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,16,25,25.

d) Parte S-Cuadrada Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSs(n) como el menor cuadrado mayor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,4,4,4,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,25,25,25,25,25,25,25,25,25,36.

e) Parte S-Cúbica Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos ISc(n) el mayor cubo menor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,1,1,1,1,1,1,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27.

f) Parte S-Cúbica Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSc(n) es el menor cubo mayor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,8,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27.

g) Parte S-Factorial Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos ISf(n) el mayor factorial menor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

1,2,2,2,2,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24.

h) Parte S-Factorial Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSf(n) el menor factorial mayor o igual que n:

Los primeros valores de esta función son:

1,2,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,120.

Comentario 1: Esto es una generalización de la parte entera superior/inferior de un número.

5.2. Sea f: $Z \to Z$ una función estrictamente creciente y x un elemento de R. Entonces:

definimos la *f-Parte Fraccionaria de Smarandache* de x, FSf(x)=x-ISf(x), donde ISf(x) es la f-Parte Inferior de Smarandache definida arriba.

Casos Particulares:

a) Parte S-Prima Fraccionaria:

FSp(x)=x – ISp(x),

donde ISp(x) es la Parte S-Prima Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSp(12.501) = 12.501 - 11 = 1.501.

b) Parte S-Cuadrada Fraccionaria:

$FSs(x) = x - ISs(x)$,

donde $ISs(x)$ es la Parte S-Cuadrada Inferior definida arriba.

Ejemplo: $FSs(12.501) = 12.501 - 9 = 3.501$.

c) Parte S-Cúbica Fraccionaria:

$FSc(x) = x - ISc(x)$,

donde $ISc(x)$ es la Parte S-Cúbica Inferior definida arriba.

Ejemplo: $FSc(12.501) = 12.501 - 8 = 4.501$.

d) Parte S-Factorial Fraccionaria:

$FSf(x) = x - ISf(x)$,

donde $ISf(x)$ es la Parte S-Factorial Inferior definida arriba.

Ejemplo: $FSf(12.501) = 12.501 - 6 = 6.501$.

Comentario 2.1: Esto es una generalización de la parte fraccionaria de un número.

Comentario 2.2: De forma similar podemos definir:

– La f-Parte Inferior Fraccionaria de Smarandache:

$IFSf(x) = x - ISf(x) = FSf(x)$;

– La f-Parte Superior Fraccionaria de Smarandache:

$SFSf(x) = SSf(x) - x$;

Por ejemplo: Parte Cúbica Superior Fraccionaria de Smarandache de 12.501 = 27 - 12.501 = 14.499.

5.3 Sea $g: A \to A$ una función estrictamente creciente, y sea "~" una ley de composición interna en A. Entonces decimos que $f: A \to A$ es la *función complementaria de Smarandache respecto de la función g y la ley interna "~"* si:

$f(x)$ es el menor k tal que existe un z en A que verifica $x \sim k = g(z)$

Casos Particulares:

a) Función de Smarandache Complementario del Cuadrado:

$f: N \to N$, $f(x)$ = es el menor k tal que $x \cdot k$ es un cuadrado perfecto.

Los primeros valores de esta función son:

1,2,3,1,5,6,7,2,1,10,11,3,14,15,1,17,2,19,5,21,22,23,6,1,26,3,7.

b) Función de Smarandache Complementario del Cubo:

$f: N \to N$, $f(x)$ = es el menor k tal que $x \cdot k$ es un cubo perfecto.

Los primeros valores de esta función son:

1,4,9,2,25,36,49,1,3,100,121,18,169,196,225,4,289,12,361,50.

De forma más general:

c) Función de Smarandache Complementario de la Potencia m-ésima:

f: N → N, f(x) = menor k tal que x·k es una potencia m-ésima

d) Función de Smarandache Complementario del primo:

f: N → N, f(x) = es el menor k tal que x+k es un número primo.

Los primeros valores de esta función son:

1,0,0,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,5,4,3,2,1,0,1,0,5.

5.4 *Función S-Multiplicativa*:

es una función f : N* → N* tal que para cualquier (a, b) = 1, f(a·b) = max {f(a), f(b)}; [i.e. cumple la principal propiedad de la función de Smarandache].
Las siguientes funciones son obviamente S-multiplicativas:
a) La función constante f :N* → N*, f(n) = 1.
b) La función de Smarandache S:N* → N, S(n) = max{ p| p! : n}.
Ciertamente muchas propiedades de funciones multiplicativas pueden ser trasladadas a funciones S-multiplicativas.

6. Iteraciones Funcionales de Smarandache

6.1 *Iteración funcional de Smarandache de Primera Especie*:

Sea f: A → A una función, tal que f(x) ≤ x para todo x, y

min {f(x), x ∈ A} ≥ m_0 ≠ -∞.

Supongamos que f tiene en p ≥ 1 un punto fijo: $m_0 \le x_1 < x_2 < ... < x_p$.

[Un punto x es llamado punto fijo si f(x) = x.] Entonces:

$SI1_f$ (x) = es el menor número de iteraciones k tal que f(f(...f(x)...)) = constante iterada k veces.

Ejemplo: Sea n > 1 un número entero, y d(n) el número de divisores positivos de n, d: N → N. Entonces $SI1_d$ (n) es el menor número de iteraciones tal que d(d(...d(n)...)) = 2, iterada k veces, puesto que d(n) < n para n > 2, y el punto fijo de la función d es 1 y 2. Tenemos que $SI1_d$ (6) = 3, ya que d(d(d(6))) = d(d(4)) = d(3) = 2 = constante. $SI1_d$ (5) = 1, puesto que d(5) = 2.

6.2. *Iteración funcional de Smarandache de Segunda especie*:

Sea g: A → A una función, tal que g(x) > x para todo x, y sea b > x. Entonces:

$SI2_g$ (x, b) = es el menor número de iteraciones tal que g(g(...g(x)...)) ≥ b iterada k veces

Ejemplo: Sea $n > 1$ un número entero, y $\Sigma(n)$ la suma de los divisores positivos de n (1 y n incluidos), $\Sigma: N \to N$. Entonces $SI2_{\Sigma}$ (n, b) es el menor número de iteraciones k tal que $\Sigma(\Sigma(...\Sigma(n)...)) \geq b$, iterada k veces puesto que $\Sigma(n) > n$ para $n > 1$. Se tiene $SI2_{\Sigma}(4, 11) = 3$, ya que $\Sigma(\Sigma(\Sigma(4))) = \Sigma(\Sigma(7)) = \Sigma(8) = 15 \geq 11$.

6.3 *Iteración Funcional de Smarandache de Tercera Especie*:

Sea h: $\to$ A una función, tal que $h(x) < x$ para todo x, y sea $b < x$. Estonces:
$SI3_h$ (x, b) = es el menor número de iteraciones k tal que $h(h(...h(x)...)) \leq b$, iterada k veces.

Ejemplo: Sea n un número entero y gd(n) el mayor divisor de n, menor que n, gd: $N^* \to N^*$ con $gd(n) < n$ para $n > 1$. $SI3_{gd}(60, 3) = 4$, puesto que $gd(gd(gd(gd(60)))) = gd(gd(gd(30))) = gd(gd(15)) = gd(5) = 1 \leq 3$.

Referencias

[1] ASHBACHER, C., "A Note on the Smarandache Near-To-Primordial Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 46-49, 1996.

[2] ASHBACHER, C., "Some Properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions", <Mathematics and Informatics Quarterly>, Vol. 7, No. 3, pp. 114-116, 1997.

[3] BEGAY, A., "Smarandache Ceil Functions", in <Bulletin of Pure and Applied Sciences>, India, Vol. 16E, No. 2, 227-229, 1997.

[4] CASTILLO, Jose, "Other Smarandache Type Functions", http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/funct2.txt

[5] DUMITRESCU, C., SELEACU, V., "Some notions and questions in number theory", Erhus Univ. Press, Glendale, 1994. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/snaqint.txt

[6] IBSTEDT, H., "Smarandache Iterations of First and Second Kinds", <Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society>, Vol. 17, No. 4, Issue 106, 680, 1996.

[7] KASHIHARA, K., "Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems", Erhus Univ. Press, Vail, USA, 1996. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/Kashihara.pdf

[8] MUDGE, Mike, "The Smarandache Near-To-Primordial (S.N.T.P.) Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 45, 1996.

[9] POPESCU, Marcela, Nicolescu, Mariana, "About the Smarandache Complementary Cubic Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, no. 1-2-3, 54-62, 1996.

[10] POPESCU, Marcela, Seleacu, Vasile, "About the Smarandache Complementary Prime Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 12-22, 1996.
[11] RUIZ, Sebastian Martin, "Applications of Smarandache Function, Prime and Coprime Functions", American Research Press, Rehoboth, 2002;
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SMRuiz-eBook.pdf
[12] SEAGULL, L., "The smarandache Function and the number of primes up to x",
<Mathematical Spectrum>, University of Shielfield, Vol. 28, No. 3, 53, 1995/6. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/FORMULA.TXT
[13] SMARANDACHE, F., "A Function in Number Theory", Analele Univ. Timisoara, XVIII, fasc. 1, 79-88, 1980;
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SFBook1.pdf
[14] SMARANDACHE, Florentin, "Only Problems, not Solutions!", Xiquan Publishing House, Phoenix-Chicago, 1990, 1991, 1993;
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/OPNS.pdf
[15] "The Florentin Smarandache papers" Special Collection, Arizona State University, Hayden Library, Tempe, Box 871006, AZ 85287-1006, USA;
[16] TABIRCA, Sabin, "About S-Multiplicative Functions", <Octogon>, Brasov, Vol. 7, No. 1, 169-170, 1999.
[17] Weisstein, Eric W., "CRC Concise Encyclopedia of Mathematics", CRC Press, Boca Raton, 1998.

Otros libros electrónicos de Sucesiones y Funciones de Smarandache pueden bajarse de Internet en la dirección

http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

y hay trabajos de investigación en

http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/math.htm.