# Démonstration de la conjecture de Polignac .

BADO Olivier Idriss

($ISE$ 2)
*Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie.*
*08 BP 03 Abidjan 08, COTE D'IVOIRE.*
*E-mail : virostake@gmail.com*

**Abstract** :
In this paper we will first establish that there are many primes $p$ such that $p+n$ is prime for an even integer n , by using the Chébotarev-Artin's theorem, the inclusion-exclusion principle of Moivre, Mertens formula. With these tools we get a function whose counts the number of primes $p$ such that $p+n$ is prime between $X+n$ and $\sqrt{X}+n$ where $X$ is real number . For $m=\inf\{n\in 2\mathbb{N}^*: p+n\in\mathbb{P}\}$ we deduce Polignac's conjecture.

# 1 Introduction

En théorie des nombres , la Conjecture de Polignac a été introduite par Alphonse de Polignac en 1849 et elle stipule :
qu'étant donné un entier pair $n$ ,il existe une infinité d'entiers premiers consécutifs de différence $n$ .Autrement dit pour un entier $n$ pair donné ,il existe une infinité de nombres premiers $p$ tel que $p+n$ soient simultanément premiers consécutifs .Notre objective est de prouver dans ce présent papier cette vieille conjecture .
Nous proposons ici une preuve de cette conjecture en prouvant la conjecture des nombres premiers d'écart pair qui affirme qu'il existe pour un entier $n$ pair donné une infinité d'entiers premiers p tel que $p+n$ soit premier

## 1.1 Principle de démonstration

Soit $X\in\mathbb{R}$ et $n$ un entier pair pour démontrer la Conjecture des nombres premiers d 'écart pair ,nous allons montrer que l'intervalle $[\sqrt{X},X]$ contient une infinité de nombres premiers d 'écart pair .Nous trouvons

$$\alpha_n(X)-\alpha_n(\sqrt{X})\geq\frac{c_2(X)\Pi(X+n)}{2\ln X}\prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}}\frac{p-1}{p-2}-\Pi(n+1)$$

, ensuite nous décomposons l 'ensemble $C_X=\{9,15,21,25,27,33......\}$ constitué d'entiers impairs composés de $[9,X]$ via les suites
aritmétiques

$$A_{2p,p\geq 3}=\{3p,5p,7p,.......(1+2p\lfloor\frac{X-p}{2p}\rfloor)p\}$$

de premier terme $3p$ et de raison $2p$ où $p$ est un nombre premier inférieur à $\sqrt{X}$,nous notérons $\mathcal{P}_{\sqrt{X}}$ cet ensemble.
Nous allons évaluer la quantité de nombres premiers de $\bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\sqrt{X}}}(A_{2p}+n)$ et appliquer à chaque suite

$$A_{2p}+n = A_{2p+n} = \{3p+n, 5p+n, 7p+n, .......(1+2p\lfloor\frac{X-p}{2p}\rfloor)p+n\}$$

qui est une suite arithmétique de premier terme $3p+n$ et de raison $2p$ ,le théorème de Chébotarev-Artin dans le cas où $p \nmid n$ avant de conclure.

### 1.2 Notations et quelques résultats

Soit $X>0$ un réel arbitrairement grand et $n$ un entier pair ,désignons par $C_X$ l'ensemble des nombres premiers impairs composés de $[9,X]$.
Soit l'application bijective $\begin{array}{rcl} f_n : C_X & \rightarrow & C_X+n \\ c & \mapsto & c+n \end{array}$
Désignons par $IC_{\leq X+n}$ le sous ensemble de $C_X+n$ constitué d'entiers composés impairs
et $G_{\leq X+n}$ celui des nombres premiers . Soit $\mathcal{P}_{\leq X+n}$ l'ensemble des nombres premiers $p$ tels que $p\leq X+n$,
$\delta_n(X) = card(G_{\leq X+n})$,$\alpha_n(X) = card(p\in\mathcal{P}_{\leq X+n}\backslash G_{\leq X+n} : p\geq n+1)$ et
$\Pi(X+n) = card(\mathcal{P}_{\leq X+n})$ . Nous avons $\Pi(X+n) = \delta_n(X)+\alpha_n(X)+\Pi(n+1)$
Sans perte de généralité ,observons que chaque entier $c\in C_X$ admet au moins un diviseur premier $p\leq\sqrt{X}$ .
Soit $\mathcal{P}_{\leq\sqrt{X}} = \{p_1,p_2,....,p_r\}$ où $p_1=2$,$p_2=3$,...$p_r = \max(\mathcal{P}_{\leq\sqrt{X}})$.
De plus en rémarquant que

$$C_X = \bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\leq\sqrt{X}},p\geq 3} A_{2p}$$

alors

$$C_X+n = \bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\leq\sqrt{X}},p\geq 3} A_{2p+n}$$

### 1.3 lemme

$\forall n$ pair ,$\forall p\in\mathcal{P}_{\leq X+n}\backslash G_{\leq X+n}, p>n+1$ alors $p-n\in\mathcal{P}_{\leq X}$

### 1.4 preuve

$\forall n$ pair ,$\forall p\in\mathcal{P}_{\leq X+n}\backslash G_{\leq X+n}, p>n+1$ alors $p-n\in[1,X]\backslash C_X$ comme $p-n$ est impair alors deux situation se presente : soit $p-n<9$,ou $p-n\geq 9$ .Dans le premier cas p-n est premier dans le second $p-n\notin C_X$ donc premier.
Notre objectif sera de montrer que $\lim_{X\mapsto+\infty}\alpha_n(X) = +\infty$ et d'après le lemme nous aurons démontré la conjecture des nombres premiers d'écart pair. Pour mener à bien notre démarche comme nous l'avons signalé ,nous allons appliquer dans un premier temps le principle d'inclusion-exclusion de Moivre et dans un second temps le théorème de Chébotarev-Artin afin d'évaluer les nombres premiers de $\bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\leq\sqrt{X}},p\geq 3} A_{2p+n}$

## 2 Théorème1

Soit $a,b>0$ tel que $pgcd(a,b)=1$,$\Pi(X,a,b) = card(p\leq X, p\equiv a[b])$ alors $\exists c>0$ tel que $\Pi(X,a,b) = \frac{L_i(X)}{\phi(b)} + \bigcirc(cXe^{-\sqrt{\ln X}})$

Le théorème des nombres premiers affirme que $L_i(X) \sim_{+\infty} \Pi(X)$ donc
$\Pi(X,a,b) = \frac{\Pi(X)}{\phi(b)} + \bigcirc(cXe^{-\sqrt{\ln X}})$

# 3 Théorème 2

Soit $a,b>0$ tel que $pgcd(a,b)=1, \Pi(X,a,b) = card(p \leq X, p \equiv a[b])$ alors $\exists c>0$ tel que

$$\frac{\Pi(X,a,b)}{\Pi(X)} = \frac{1}{\phi(b)} + \bigcirc(c \ln X e^{-\sqrt{\ln X}})$$

.
D'un point de vue probabiliste ,la probabilité des nombres premiers inférieurs ou égaux à X dans une progression arithmétique de raison b et de premier terme a tel que pgcd(a,b)=1 vaut $\frac{1}{\phi(b)} + \bigcirc(c \ln X e^{-\sqrt{\ln X}})$ pour X suffisamment grand .Dans la suite nous allons justifier l'application du théorème de Chébotarev-Artin aux ensembles $\bigcap_{j=1,p_{i_j} \in \mathcal{P}_{\leq \sqrt{X}}}^{k} A_{2p_{i_j}+n}$
pour $1 \leq i_1 < i_2 < ..... < i_k$

## 3.1 Remarques

Il est évident de remarquer que pour $k>2$, $\bigcap_{j=2,p_{i_j} \in \mathcal{P}_{\leq \sqrt{X}}}^{k} A_{2p_{i_j}}$ est l'ensemble des multiples de $\prod_{j=2}^{k} p_{i_j}$ ce qui nous permet d 'écrire

$$\bigcap_{j=2,p_{i_j} \in \mathcal{P}_{\leq \sqrt{X}}}^{k} A_{2p_{i_j}+n} = \{m \prod_{j=2}^{k} p_{i_j} + n | 1 \leq m \leq \lfloor \frac{X - \prod_{j=2}^{k} p_{i_j}}{2\prod_{j=2}^{k} p_{i_j}} \rfloor \}$$

Cet ensemble est bien une suite aritmétique de raison $2\prod_{j=2}^{k} p_{i_j}$ et de premier terme $\prod_{j=2}^{k} p_{i_j} + n$ .Les hypothéses d'application du théorème de Chébotarev-Artin seront justifiées si et seulement si $pgcd(2\prod_{j=2}^{k} p_{i_j}, \prod_{j=2}^{k} p_{i_j} + n) = 1$ ce qui est le cas si $\prod_{j=2}^{k} p_{i_j} \nmid n$

# 4 Démonstration de la conjecture de Polignac

## 4.1 Théorème

Soient $X>0$ arbitrairement grand,n un entier pair ,$c_2$ la constante des nombres premiers jumeaux ,$\alpha_n(X)$ le nombre d'entiers premiers $p \leq X$ tel que $p+n$ soit premier alors $\exists$ une fonction $\beta_n(X) = \frac{c_2(X)}{2} \prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2}$ et $X_0$ tels que $\forall X \geq X_0$

$$\alpha_n(X) - \alpha_n(\sqrt{X}) \geq \frac{\beta_n(X)\Pi(X+n)}{\ln X} - \Pi(n+1)$$

## 4.2 Lemme utile

Soient $a_1, a_2, ......a_r$ r nombres strictement positifs alors

$$1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{a_i a_j} + ..... + \frac{(-1)^r}{a_1 a_2 .... a_r} = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i - 1}{a_i}$$

## 4.3 preuve du lemme

Considérons le polynôme :$P(X)=\prod_{i=1}^{r}(X-\frac{1}{a_i})$ d'après les relations coéfficients -racines

$$P(X)=X^r+\sum_{k=1}^{r}\sum_{1\le i_1<i_2<....<i_k\le r}\frac{(-1)^k X^{r-k}}{\prod_{j=1}^{k}a_{i_j}}$$

en prenant $X=1$, le lemme est ainsi prouvé.

## 4.4 preuve du Théorème

D'après le principle d'inclusion -exclusion de Moivre nous avons :

$$\varrho(\bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\le\sqrt{X}},p\ge3,p\nmid n}A_{2p+n})=\sum_{k=2}^{r}(-1)^k\sum_{2\le i_2<i_3<....<i_k\le r}\varrho(\bigcap_{j=2,p_{i_j}\in\mathcal{P}_{\le\sqrt{X}},p_{i_j}\nmid n}^{k}A_{2p_{i_j}+n})$$

où $\varrho$ répresente la probabilité des nombres premiers donc

$$\varrho(C_X+n)=\varrho(\bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\le\sqrt{X}},p\ge3,p\nmid n}A_{2p+n})=\frac{\delta_n(X)}{\Pi(X+n)}$$

. D'après le théorème de Chébotarev -Artin : $\forall k\ge3$

$$\varrho(\bigcap_{j=2,p_{i_j}\in\mathcal{P}_{\le\sqrt{X}},p_{i_j}\nmid n}^{k}A_{2p_{i_j}+n})=\frac{1}{\phi(2\prod_{j=2}^{k}p_{i_j})}+h(X+n)$$

$\forall i\ge2$

$$\varrho(A_{2p_i+n,p_i\nmid n})=\frac{1}{\phi(2p_i)}-\frac{\psi_{p_i+n}}{\Pi(X+n)}+h(X+n)$$

où $\psi_{p_i+n}=1,0$ suivant que $p_i+n$ soit un nombre premier ou non
avec $h(X+n)=\bigcirc(c\ln(X+n)e^{-\sqrt{\ln(X+n)}})$
Ainsi

$$\frac{\delta_n(X)}{\Pi(X+n)}=h(X+n)-\sum_{k=2}^{r}\frac{\psi_{p_k+n}}{\Pi(X+n)}+\sum_{k=2}^{r}\sum_{2\le i_2<i_3<...<i_k\le r}\frac{(-1)^k}{\prod_{j=2}^{k}(p_{i_j}-1),p_{i_j}\nmid n}$$

.En remarquant que $\sum_{k=2}^{r}\psi_{p_k+n}=\alpha_n(r)$ et en appliquant le lemme utile nous avons :

$$\frac{\delta_n(X)}{\Pi(X+n)}=h(X+n)-\frac{\alpha_n(r)}{\Pi(X+n)}+(1-\prod_{i=2,p_i\nmid n}^{r}\frac{p_i-2}{p_i-1})$$

.Comme $\delta_n(X)=\Pi(X+n)-\alpha_n(X)-\Pi(n+1)$ et $r=\max(i|p_i\le\sqrt{X})$ alors

$$\alpha_n(X)-\alpha_n(\sqrt{X})=\Pi(X+n)\prod_{p=3,p\nmid n}^{\sqrt{X}}\frac{p-2}{p-1}-\Pi(n+1)-\Pi(X+n)h(X+n)$$

.Dans la suite nous allons appliquer le théorème de Mertens pour évaluer $c_n(X)=\prod_{p=3,p\nmid n}^{\sqrt{X}}\frac{p-2}{p-1}$
.
Comme

$$\prod_{p=3}^{\sqrt{X}}\frac{p-2}{p-1}=\prod_{p=3,p\nmid n}^{\sqrt{X}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}}\frac{p-2}{p-1}$$

d'où

$$c_n(X) = \prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2}$$

La formule de Mertens s'écrit

$$\prod_{p \leq X} (1 - \frac{1}{p}) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln X}(1 + \bigcirc(\frac{1}{\ln X}))$$

donc

$$\prod_{p \leq \sqrt{X}} (1 - \frac{1}{p}) = \frac{2e^{-\gamma}}{\ln X}(1 + \bigcirc(\frac{1}{\ln X}))$$

Posons

$$c_2(X) = \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p}{p-1} \prod_{p=3}^{\sqrt{X}} \frac{p-2}{p-1}$$

d'où

$$c_n(X) = 2c_2(X) \prod_{p=2}^{\sqrt{X}} (1 - \frac{1}{p}) \prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2}$$

D'après la partie précedente

$$c_n(X) = \frac{4c_2(X)e^{-\gamma}}{\ln X}(1 + \bigcirc(\frac{1}{\ln X})) \prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$\alpha_n(X) - \alpha_n(\sqrt{X}) + \Pi(n+1) = \Pi(X+n)[\frac{4c_2(X)e^{-\gamma}}{\ln X} \prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2} - h(X+n) + \bigcirc(\prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2} \frac{1}{\ln^2 X})]$$

$\exists X_0 \ \forall X \geq X_0$

$$h(X+n) \leq \frac{c_2(X)(4e^{-\gamma} - \frac{1}{2})}{\ln X} \prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2}$$

$\forall X \geq X_0$

$$\alpha_n(X) - \alpha_n(\sqrt{X}) \geq \frac{c_2(X)\Pi(X+n)}{2\ln X} \prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}} \frac{p-1}{p-2} - \Pi(n+1)$$

# 5 LEMME

$\forall X \geq 2, \forall n \geq 1$ on a : $\ln(\Pi(X+2n)) < \ln(X+2n) < 2\ln(\Pi(X+2n))$

## 5.1 preuve

De manière évidente nous avons avons $\forall X > 0 \ \Pi(X+2n) < X+2n$
Pour conclure nous allons montré que :
$\forall X > 2$ ,$\sqrt{X+2n} > \ln(X+2n)$ ce qui est évident
En utilisant le fait que $[\Pi(X+2n)]^2 \simeq \frac{(X+2n)^2}{(\ln(X+2n))^2}$
Le résultat s'ensuit

## 5.2 corrolaire

Soit $X$ un réel arbitrairement grand et $n$ un entier pair fixé

$$\forall X > 5000, n^2 \ll X, \alpha_n(X) > \frac{4\beta_n(X)\Pi(\Pi(X+n)}{9\ln X}$$

## 5.3 Preuve

En utilisant une inégalité de Tchebytchev on a : $\forall X > 599$

$$\frac{7}{8} < \frac{\Pi(X)\ln(X)}{X} < \frac{9}{8}$$

, en substituant X par $\Pi(X+n)$ pour n pair fixé
D'après le lemme précedent on a $\forall X > 5000$,$1 < \frac{\ln(X+n)}{\ln(\Pi(X+n))} < 2$ Alors $\forall X > 5000$, $\frac{7}{8} < \frac{\Pi(\Pi(X+n))\ln\Pi(X+n)}{\Pi(X+n)} < \frac{9}{8}$

$$\frac{4\beta_n(X)\Pi(\Pi(X+n))}{9\ln X} - \Pi(n+1) < \frac{c_2(X)\Pi(X+n)}{2\ln X}\prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}}\frac{p-1}{p-2} - \Pi(n+1)$$

comme

$$\alpha_n(X) - \alpha_n(\sqrt{X}) \geq \frac{c_2(X)\Pi(X+n)}{2\ln X}\prod_{p=3,p|n}^{\sqrt{X}}\frac{p-1}{p-2} - \Pi(n+1)$$

alors $\forall X > 5000, n^2 \ll X$ ,$\alpha_n(\sqrt{X}) > \Pi(n+1)$
donc

$$\forall X > 5000, n^2 \ll X, \alpha_n(X) > \frac{4\beta_n(X)\Pi(\Pi(X+n))}{9\ln X}$$

## 5.4 Conjecture de Polignac

Il existe une infinité d 'entiers premiers consécutifs d'écart pair

## 5.5 Preuve de la conjecture de polignac

Soit $X$un réel arbitrairement grand et $n$ un entier pair fixé

$$\forall X > 5000, n^2 \ll X$$

d'après le corrolaire précedent $m = \min\{n \in 2\mathbb{N}^* : p+n \in \mathbb{P}\}$ existe et on a

$$\alpha_m(X) > \frac{4\beta_m(X)\Pi(\Pi(X+m))}{9\ln X}$$

## 5.6 Acknowledgments

The author wish to express their appreciation and sincere thanks to Professor Tanoé François(Université Félix-Houphouet Boigny Ufr de Maths-info) and Professor Pascal Adjamogbo (Université Paris 6) for their encouragements

# Références

[1] Not always buried deep selection from analytic and combunatorial number theory 2003,2004 Paul POLLACK

[2] An amazing prime heuristic Chris K. CALDWELL

[3] The little book of the bigger primes.Second edition,Spriger-Verlag Ribenboim-P

[4] A REMARK ON POLIGNAC'S CONJECTURE .Paulo Ribenboim

[5] generatingfunctionology ,Herbert S.Wilf

[6] Lecture on NX(p) Jean pierre serre

[7] Les nombres premiers entre l'ordre et le chaos. Gerald TENEMBAUM

[8] S. Lang , Algebra chapitres VII et VIII Addison-Wesley World Student Series Edition.
PRINCIPLES AND TECHNIQUES IN COMBINATORICS, CHEN CHUAN-CHONG and KOH KHEEMENG