Хмельник С.И.

Решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением

Оглавление

Аннотация

Приводится решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением, которое является развитием непротиворечивого (соответствующего закону сохранения энергии) решения уравнений Максвелла для вакуума. Показано, что в электромагнитной волне, распространяющейся через конденсатор, поток электромагнитной энергии не изменяется во времени. Показано, что существует продольная (вдоль радиуса) стоячая электромагнитная волна.

Для простой проверки полученных выводов приводится подробное доказательство.

1. Введение

В [1, 2] предлагается новое решение уравнений Максвелла для монохроматической волны в непроводящей среде. Диэлектрик конденсатора также является такой средой. Если на обкладках конденсатора присутствует монохроматическое переменное напряжение, то в его диэлектрике также должна присутствовать монохроматическая волна с электрической и магнитной напряженностями. Эта волна распространяется между обкладками конденсатора. По существующему представлению, в потоке энергии через конденсатор сохраняется только среднее (по времени) значение потока энергии [3]. Это противоречит закону сохранения энергии (об этом уже говорилось в [1, 2] для бегущей волны). Поэтому ниже предлагается новое решение уравнений Максвелла для конденсатора.

Уравнения Максвелла для свободных электромагнитных колебаний в неограниченной среде имеют вид

$$\mathrm{rot}(E)+\mu\frac{\partial H}{\partial t}=0, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}(H)-\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=0, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}(E)=0, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}(H)=0. \tag{4}$$

В [1, 2] получено решение этих уравнений в предположении, что $E_z \equiv 0$. Ниже это ограничение снимается.

2. Решение уравнений Максвелла

Также, как в [1, 2], будем использовать цилиндрические координаты $r,\ \varphi,\ z$ и применять следующие обозначения:

$$\mathrm{co}=\cos(\alpha\varphi+\chi z+\omega t), \tag{1}$$

$$\mathrm{si}=\sin(\alpha\varphi+\chi z+\omega t), \tag{2}$$

где $\alpha,\ \chi,\ \omega$ – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r.=h_r(r)\cdot\mathrm{co}, \tag{3}$$

$$H_\varphi.=h_\varphi(r)\cdot\mathrm{si}, \tag{4}$$

$$H_z.=h_z(r)\cdot\mathrm{si}, \tag{5}$$

$$E_r. = e_r(r)\cdot \mathrm{si}, \tag{6}$$
$$E_\varphi. = e_\varphi(r)\cdot \mathrm{co}, \tag{7}$$
$$E_z. = -e_z(r)\cdot \mathrm{co}. \tag{8}$$

Тогда система уравнений Максвелла примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha + \chi\cdot e_z(r) = 0, \tag{9}$$
$$\frac{e_z(r)}{r}\alpha + e_\varphi(r)\chi - \mu\omega h_r(r) = 0, \tag{10}$$
$$e_r(r)\chi + e'_z(r) + \mu\omega h_\varphi(r) = 0, \tag{11}$$
$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha + \mu\omega h_z(r) = 0, \tag{12}$$
$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha - \chi\cdot h_z(r) = 0, \tag{13}$$
$$-\frac{h_z(r)}{r}\alpha - h_\varphi(r)\chi - \varepsilon\omega e_r(r) = 0, \tag{14}$$
$$-h_r(r)\chi - h'_z(r) + \varepsilon\omega e_\varphi(r) = 0, \tag{15}$$
$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r}\cdot\alpha - \varepsilon\omega e_z(r) = 0, \tag{16}$$

где $h(r),\ e(r)$ - некоторые функции координаты r.

Здесь мы не можем воспользоваться решением, полученным в [1, 2], т.к. там при поиске решения предполагалось, что $e(r)\equiv 0$. Здесь такое утверждение не выполняется по условию задачи.

Мы будем искать решение, в котором напряженности связаны соотношением

$$h_z(r)\equiv 0, \tag{17}$$

что следует из физических соображений. Тогда система уравнений (9-16) примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha + \chi\cdot e_z(r) = 0, \tag{18}$$
$$\frac{e_z(r)}{r}\alpha + e_\varphi(r)\chi - \mu\omega h_r(r) = 0, \tag{19}$$
$$e_r(r)\chi + e'_z(r) + \mu\omega h_\varphi(r) = 0, \tag{20}$$
$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha = 0, \tag{21}$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h_r'(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha = 0, \tag{22}$$

$$-h_\varphi(r)\chi - \varepsilon\omega e_r(r) = 0, \tag{23}$$

$$-h_r(r)\chi + \varepsilon\omega e_\varphi(r) = 0, \tag{24}$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h_\varphi'(r) + \frac{h_r(r)}{r}\cdot\alpha - \varepsilon\omega e_z(r) = 0. \tag{25}$$

В приложении 1 показано, что существует определенная функция Бесселя, обозначаемая как $F_\alpha(r)$, от которой зависят функции напряженностей, а именно

$$e_z(r) = F_\alpha(r),$$

$$e_\varphi(r) \equiv \frac{1}{r}F_\alpha(r),\ h_r(r) \equiv \frac{1}{r}F_\alpha(r),$$

$$e_r(r) \equiv \frac{d}{dt}F_\alpha(r),\ h_\varphi(r) \equiv \frac{d}{dt}F_\alpha(r).$$

Точнее,

$$e_z(r) = F_\alpha(r), \tag{26}$$

$$e_z'(r) = \frac{d}{dt}F_\alpha(r), \tag{27}$$

$$e_r(r) = \frac{\chi}{q}e_z'(r), \tag{28}$$

$$e_\varphi(r) = -\frac{\chi\alpha}{q}\frac{e_z(r)}{r}, \tag{29}$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{\chi}e_\varphi(r), \tag{30}$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi}e_r(r), \tag{31}$$

где

$$q = \chi^2 - \mu\varepsilon\omega^2 > 0. \tag{32}$$

Функция $F_\alpha(r)$ является решение уравнения вида

$$e_z''(r) + \frac{e_z'(r)}{r} + e_z(r)\cdot\left(q - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) = 0. \tag{33}$$

Для существования этого решения **величина q должна быть положительной.**

3. Скорость распространения электромагнитной волны

В [1, 2] показано, что в подобном решении для свободной волны, распространяющейся со скоростью света,

$$\chi = \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \pm\frac{\omega}{c}. \qquad (1)$$

В рассматриваемом случае величина (2.32) должна быть положительной, т.е.

$$\chi^2 - \mu\varepsilon\omega^2 \ge 0 \qquad (2)$$

или

$$\chi \ge \left|\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\right| = \frac{\omega}{c}, \text{ причем } \chi_{\min} = \frac{\omega}{c}. \qquad (3)$$

Очевидно, скорость распространения электромагнитной волны равна производной $\frac{dz}{dt}$ от функции $z(t)$, заданной неявно в виде функций (2.3-2.8). Определив эту производную, найдем скорость распространения монохроматической электромагнитной волны

$$v_m = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\chi}. \qquad (4)$$

Совмещая (3, 4), получим:

$$v_m = \left|\frac{\omega}{\chi \ge \left|\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\right|}\right| \le \frac{1}{\left|\ge\sqrt{\mu\varepsilon}\right|} \le \frac{1}{\left|\ge\frac{1}{c}\right|}. \qquad (5)$$

Итак,

$$v_m \le c. \qquad (6)$$

Следовательно, <u>скорость распространения электромагнитной волны в конденсаторе **меньше** скорости света</u>.

4. Плотность энергии

Плотность энергии равна

$$W = \left(\frac{\varepsilon}{2}E^2 + \frac{\mu}{2}H^2\right) \qquad (1)$$

или, с учетом предыдущих формул,

$$W=\begin{Bmatrix}\frac{\varepsilon}{2}\left((e_r(r)\mathrm{si})^2+(e_\varphi(r)\mathrm{co})^2+(e_z(r)\mathrm{co})^2\right)+\\+\frac{\mu}{2}\left((h_r(r)\mathrm{co})^2+(h_\varphi(r)\mathrm{si})^2\right)\end{Bmatrix} \tag{2}$$

Учитывая (2.29, 2.30), получаем:

$$W=\begin{Bmatrix}\frac{\varepsilon}{2}\left((e_r(r)\mathrm{si})^2+(e_\varphi(r)\mathrm{co})^2+(e_z(r)\mathrm{co})^2\right)+\\+\left(\frac{\varepsilon\omega}{\chi}\right)^2\frac{\mu}{2}\left((e_\varphi(r)\mathrm{co})^2+(e_r(r)\mathrm{si})^2\right)\end{Bmatrix}$$

или

$$W=\left\{\frac{\varepsilon}{2}(e_z(r)\mathrm{co})^2+\left(\left(\frac{\varepsilon\omega}{\chi}\right)^2\frac{\mu}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left((e_\varphi(r)\mathrm{co})^2+(e_r(r)\mathrm{si})^2\right)\right\} \tag{3}$$

Таким образом, **<u>плотность энергии электромагнитной волны в конденсаторе постоянна во времени и одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса</u>.**

5. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S=\eta E\times H\ , \tag{1}$$

где

$$\eta=c/4\pi\ . \tag{2}$$

В цилиндрических координатах r, φ, z плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты S_r, S_φ, S_z, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси z соответственно. Они определяются по формуле (как показано в [1, 2])

$$S=\begin{bmatrix}S_r\\S_\varphi\\S_z\end{bmatrix}=\eta(E\times H)=\eta\begin{bmatrix}E_\varphi H_z-E_zH_\varphi\\E_zH_r-E_rH_z\\E_rH_\varphi-E_\varphi H_r\end{bmatrix}. \tag{3}$$

или, с учетом предыдущих формул,

$$S=\begin{bmatrix}S_r\\S_\varphi\\S_z\end{bmatrix}=\eta\begin{bmatrix}s_r\cdot si^2\\s_\varphi\cdot si\cdot co\\s_z\cdot si\cdot co\end{bmatrix}. \tag{4}$$

где

$$s_r = \left(e_\varphi h_z - e_z h_\varphi\right)$$
$$s_\varphi = \left(e_z h_r - e_r h_z\right). \qquad (5)$$
$$s_z = \left(e_r h_\varphi - e_\varphi h_r\right)$$

Учитывая (5, 2.27-2.31), получаем:

$$s_r = -e_z h_\varphi = e_z \frac{\varepsilon\omega}{\chi} e_r = -e_z \left(\frac{\varepsilon\omega}{q}\right) e'_z, \qquad (7)$$

$$s_\varphi = \left(e_z h_r\right) = e_z \frac{\varepsilon\omega}{\chi} e_\varphi = -\frac{\varepsilon\omega\alpha}{q} \frac{e_z^2}{r}, \qquad (8)$$

$$s_z = \left(e_r h_\varphi - e_\varphi h_r\right) = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi}\left(e_r^2 + \alpha e_\varphi^2\right). \qquad (9)$$

Поток энергии, который распространяется по радиусу <u>из всей окружности</u> данного радиуса, как следует из (4), равен

$$\overline{S_r} = \eta \int_0^{2\pi} - e_z \left(\frac{\varepsilon\omega}{q}\right) e'_z \cdot \mathrm{si}^2 \cdot r \cdot d\varphi = \eta \frac{\varepsilon\omega}{q} \cdot e_z e'_z \cdot r \int_0^{2\pi} \mathrm{si}^2 \cdot d\varphi. \qquad (10)$$

Будем называть этот поток радиальным потоком энергии. Интеграл в (10) является постоянной величиной. В приложении 3 показано, что величина $\Phi = \left(e_z e'_z \cdot r\right)$ является периодической функцией от r. Это означает, что **радиальный поток энергии колеблется вдоль радиуса, а его суммарное значение равно нулю**.

Поток энергии, который распространяется по окружности данного радиуса, как следует из (4), равен

$$\overline{S_r} = -\eta \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\omega\alpha}{q} \frac{e_z^2}{r} \cdot \mathrm{co} \cdot \mathrm{si} \cdot r \cdot d\varphi = -\eta \frac{\varepsilon\omega\alpha}{q} \cdot e_z^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{co} \cdot \mathrm{si} \cdot d\varphi. \qquad (10a)$$

Интеграл в (10а) является постоянной величиной. В приложении 3 показано, что величина $\left(e_z^2\right)$ имеет существенное значение только в центре конденсатора.

Поток энергии, который распространяется вдоль оси oz через сечение конденсатора, равен

$$\overline{S_z} = \eta \iint_{r,\varphi} \left[s_z \cdot \mathrm{si} \cdot \mathrm{co}\right] dr \cdot d\varphi. \qquad (11)$$

Учитывая (9), получаем:

$$\overline{S_z} = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi} \eta \iint_{r,\varphi} \left[\left(e_r^2 + \alpha e_\varphi^2\right) \mathrm{si} \cdot \mathrm{co}\right] dr \cdot d\varphi \qquad (12)$$

или

$$\overline{S_z} = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi}\eta\left(\int_r \left(e_r^2 + \alpha e_\varphi^2\right)^2 dr\right)\left(\int_\varphi \mathrm{si}\cdot\mathrm{co}\cdot d\varphi\right) \qquad (13)$$

Оба интеграла в (13) являются постоянными величинами, не зависящими от координат z и t (как показано в [1, 2]). Следовательно, **<u>поток энергии электромагнитной волны является постояным во времени</u>**. Этот поток является активной мощностью $P = \overline{S_z}$, передаваемой через конденсатор. Эта мощность не зависит от конструкции конденсатора. Величина мощности не зависит от напряженностей. Есть только один параметр, который в математической модели волны не определен – это параметр χ и от него зависит мощность. Точнее, наоборот, <u>мощность</u> $P = \overline{S_z}$ <u>определяет значение параметра</u> χ.

6. Радиальная волна

В конденсаторе существует волна вдоль радиуса с напряженностями

$$H_r. = h_r(r)\cdot\cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t),$$

$$E_r. = e_r(r)\cdot\sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)$$

- см. (2.3) и (2.6). Им соответствует радиальный поток энергии (5.10), рассмотренный выше. Видно, что эти <u>напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода</u>. В приложении 3 показаны зависимости этих напряженностей и потока энергии от радиуса. Видно, что эти напряженности составляют <u>продольную стоячую волну</u>, колеблющуюся <u>вдоль</u> радиуса.

7. Напряжение в конденсаторе

Напряженности в найденном решении определены с точностью до постоянного множителя. Например, напряженность (2.8) следует с учетом (2.26) записать в виде:

$$E_z. = -A\cdot F_\alpha(r)\cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \qquad (1)$$

где A – неопределенный пока постоянный для всех напряженностей коэффициент.

Будем полагать, что потенциал на нижней пластине при $z = 0$ и некоторых φ_o, r_o равен нулю, а потенциал на верхней пластине при $z = d$ и тех же φ_o, r_o численно равен напряжению U на конденсаторе. Тогда

$$U = -A \cdot F_\alpha(r_o)\cos(\alpha\varphi_o + \chi d + \omega t), \qquad (2)$$

что можно использовать для определения коэффициента А. При некотором промежуточном значении z напряжение при тех же φ_o, r_o будет равно

$$u(z) = -A \cdot F_\alpha(r_o)\cos(\alpha\varphi_o + \chi z + \omega t), \qquad (3)$$

т.е. напряжение вдоль конденсатора меняется по функции $\cos(\chi z)$.

8. Обсуждение

Предлагаемое решение уравнений Максвелла для конденсатора, находящегося под переменным напряжением, интерпретируется как электромагнитная волна с тремя электрическими напряженностями и двумя магнитными напряженностями (отсутствует магнитная напряженность, направленная вдоль оси конденсатора). Отметим следующие особенности этой волны:

1. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат r, φ, z <u>сдвинуты по фазе на четверть периода.</u>
2. Векторы электрической и магнитной напряженностей <u>ортогональны</u>.
3. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии через конденсатор **не** изменяется во времени, что <u>соответствует закону сохранения энергии</u>.
4. Поток энергии равен активной мощности, передаваемой через конденсатор.
5. Скорость распространения электромагнитной волны меньше скорости света
6. Эта скорость уменьшается с увеличением передаваемой мощности (в частности, при отсутствии мощности скорость равна нулю и волна становится стоячей)
7. Волна распространяется также по радиусам; при этом напряженности изменяются по функции Бесселя от радиуса.
8. Существует продольная стоячая волна, в которой напряженности и поток энергии колеблются <u>вдоль радиуса</u>; при этом суммарное значение потока энергии равно нулю.

Приложение 1

Обозначим:

$$e_{r\varphi} = e_r + e_\varphi, \tag{1}$$

Предположим, что

$$e_{r\varphi} = e_r + e_\varphi = \vartheta\left(h_\varphi - h_r\right) \tag{2}$$

Найдем сумму уравнений (2.19, 2.20):

$$e_{r\varphi} g + \frac{e_z}{r}\alpha + e'_z = 0. \tag{3}$$

где

$$g = -\left(\chi + \frac{\mu\omega}{\vartheta}\right). \tag{4}$$

Найдем сумму уравнений (2.18, 2.21):

$$e'_{\varphi r} + \frac{e_{\varphi r}}{r}\cdot\left(1-\alpha\right) + \chi e_z = 0. \tag{5}$$

Из (3) находим:

$$e_{r\varphi} = -\left(e'_z + \frac{e_z}{r}\alpha\right)\frac{1}{g}, \tag{6}$$

$$e'_{r\varphi} = -\left(e''_z + \frac{e'_z}{r}\alpha - \frac{e_z}{r^2}\alpha\right)\frac{1}{g}. \tag{7}$$

Из (5-7) находим:

$$\left(e''_z + \frac{e'_z}{r}\alpha - \frac{e_z}{r^2}\alpha\right)\frac{1}{g} + \left(e'_z + \frac{e_z}{r}\alpha\right)\frac{1}{g}\frac{1}{r}\cdot\left(1-\alpha\right) - \chi e_z = 0, \tag{8}$$

или

$$\left(e''_z + \frac{e'_z}{r}\alpha - \frac{e_z}{r^2}\alpha\right) + \left(e'_z + \frac{e_z}{r}\alpha\right)\frac{\left(1-\alpha\right)}{r} + e_z q = 0, \tag{9}$$

где

$$q = -g\chi. \tag{10}$$

После упрощения (9), получаем:

$$e''_z + \frac{e'_z}{r} + e_z\left(q - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) = 0. \tag{11}$$

Ниже будет показано, что $q > 0$. Поэтому (11) является уравнением Бесселя – см. приложение 2. Далее мы будем обозначать это решение как $F_\alpha(r)$. Итак,

$$e_z(r) = F_\alpha(r), \tag{12}$$

$$e_z'(r) = \frac{d}{dr} F_\alpha(r), \tag{15}$$

Из (2.21, 1) находим

$$e_\varphi' + \frac{1}{r} e_\varphi (1+\alpha) - \frac{\alpha}{r} e_{r\varphi} = 0, \tag{16}$$

Из (6, 16) находим

$$e_\varphi' + \frac{1}{r} e_\varphi (1+\alpha) + \frac{\alpha}{r} \left(e_z' + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g} = 0, \tag{17}$$

Предположим, что

$$e_\varphi = K \left(\frac{e_z}{r} \right) \tag{18}$$

$$e_\varphi' = K \left(\frac{e_z'}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right) \tag{19}$$

Подставим (18, 19) в (17) и найдем:

$$K \left(\frac{e_z'}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right) + \frac{1}{r} K \left(\frac{e_z}{r} \right) (1+\alpha) + \frac{\alpha}{r} \left(e_z' + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g} = 0,$$

$$\frac{e_z}{r^2} \left(-K + K(1+\alpha) + \frac{\alpha^2}{g} \right) + \frac{e_z'}{r} \left(K + \frac{\alpha}{g} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{e_z}{r^2} \alpha + \frac{e_z'}{r} \right) \left(K + \frac{\alpha}{g} \right) = 0,$$

$$K = -\frac{\alpha}{g}. \tag{20}$$

Итак, из (18--20) находим

$$e_\varphi = -\frac{\alpha}{g} \left(\frac{e_z}{r} \right), \tag{21}$$

$$e_\varphi' = -\frac{\alpha}{g} \left(\frac{e_z'}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right). \tag{21a}$$

Из (1, 6, 21) находим

$$e_r = e_{r\varphi} - e_\varphi = -\left(e_z' + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g} + \frac{\alpha}{g} \left(\frac{e_z}{r} \right) = -e_z' \frac{1}{g}$$

или, с учетом (10),

$$e_r = -\frac{1}{g} e_z' = -\frac{\chi}{q} e_z'. \tag{22}$$

Рассмотрим уравнения (2.22-2.25). Вычитая (2.24) из (2.23), находим

$$-\left(h_\varphi - h_r\right)\chi - \varepsilon\omega\left(e_r + e_\varphi\right) = 0, \tag{23}$$

Из (2, 23) находим

$$\vartheta = -\frac{\chi}{\varepsilon\omega} \tag{24}$$

Тогда из (4, 24, 10) получим:

$$g = -\left(\chi - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi}\right). \tag{24a}$$

$$q = \chi^2 - \mu\varepsilon\omega^2 . \tag{25}$$

Вычитая (2.22) из (2.25), находим

$$\frac{h_\varphi - h_r}{r} + h'_\varphi - h'_r + \frac{h_r - h_\varphi}{r} \cdot \alpha - \varepsilon\omega e_z = 0 . \tag{26}$$

Из (2, 26) находим

$$\frac{e_{r\varphi}}{\vartheta r} + \frac{e'_{r\varphi}}{\vartheta} - \frac{e_{r\varphi}}{\vartheta r} \cdot \alpha - \varepsilon\omega e_z = 0 \tag{27}$$

или

$$\frac{e_{r\varphi}}{r}\left(1 - \alpha\right) + e'_{r\varphi} - \vartheta\varepsilon\omega e_z = 0 . \tag{28}$$

Из (24, 28) находим

$$\frac{e_{r\varphi}}{r}\left(1 - \alpha\right) + e'_{r\varphi} + \chi e_z = 0 . \tag{29}$$

Уравнение (29) совпадает с (5) Это означает, что сделанные предположения выполняются.

Из (2) находим:

$$h_\varphi = \frac{e_{r\varphi}}{\vartheta} + h_r \tag{30}$$

Из (2.22, 30) находим:

$$\frac{h_r}{r} + h'_r + \frac{\alpha}{r}\left(\frac{e_{r\varphi}}{\vartheta} + h_r\right) = 0 , \tag{31}$$

или

$$-\vartheta h'_r - \vartheta h_r \frac{1 + \alpha}{r} - \frac{\alpha}{r} e_{r\varphi} = 0 , \tag{32}$$

Сравнивая (32) и (16), замечаем, что

$$-\vartheta h_r = e_\varphi \tag{33}$$

Из (33, 24) находим:

$$h_r = -\frac{e_\varphi}{\vartheta} = e_\varphi \frac{\varepsilon\omega}{\chi} \tag{34}$$

Из (30, 34, 1) находим:

$$h_\varphi = \frac{e_{r\varphi}}{\vartheta} + h_r = \frac{e_{r\varphi}}{\vartheta} - \frac{e_\varphi}{\vartheta} = \frac{e_r}{\vartheta}$$

или, с учетом (24, 22),

$$h_\varphi = -e_r \frac{\varepsilon\omega}{\chi} = \frac{\varepsilon\omega}{q} e_z'. \tag{35}$$

Рассмотрим уравнение (2.20)

$$e_r(r)\chi - e_z'(r) + \mu\omega h_\varphi(r) = 0$$

и подставим в него (35, 22). Тогда получим:

$$e_r(r)\chi - g e_r(r) - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi} e_r(r) = 0 \tag{36}$$

или

$$\chi - g - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi} = 0 \tag{37}$$

или, с учетом (24а),

$$\chi - \left(\chi - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi}\right) - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi} = 0. \tag{38}$$

Таким образом, уравнение (2.20) превращается в тождество, что и требовалось показать.

Приложение 2.

Известно уравнение Бесселя, имеющее следующий вид:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) = 0, \tag{1}$$

где ν - порядок уравнения. Обозначим через $Z_\nu(y)$ - общий интеграл уравнения Бесселя порядка ν. В [4, стр. 403] показано, что уравнение вида

$$y'' + \frac{a}{x} y' + y \cdot \left(bx^m + \frac{c}{x^2}\right) = 0. \tag{2}$$

можно преобразовать в уравнение вида (1), причем $Z_\nu(y)$ и порядок ν определяются через параметры $a,\ b,\ m,\ c$.

В частности, уравнение (11) из приложения 1 преобразуется в уравнение вида (1) следующей заменой:

$$a=1,\ b=q,\ m=0,\ c=-\alpha^2,\ \nu=\frac{1}{2}\left(\sqrt{-4\left(-\alpha^2\right)}\right)=\alpha\,. \tag{3}$$

Таким образом, решение уравнения (11)

$$e_z(r)=F_\alpha(r)=Z_\alpha\left(r\sqrt{q}\right). \tag{4}$$

Поскольку

$$\frac{d}{dy}Z_\nu(y)=\frac{1}{2}\left(Z_{\nu-1}(y)-Z_{\nu+1}(y)\right), \tag{5}$$

то

$$e_z'(r)=\frac{1}{2}\left(Z_{\alpha-1}\left(r\sqrt{q}\right)-Z_{\alpha+1}\left(r\sqrt{q}\right)\right). \tag{6}$$

Приложение 3.

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$y''+\frac{y'}{r}+y\left(1-\frac{1}{r^2}\right)=0\,, \tag{1}$$

и функцию вида

$$\Phi(r)=y(r)\cdot y'(r)\cdot r\,. \tag{2}$$

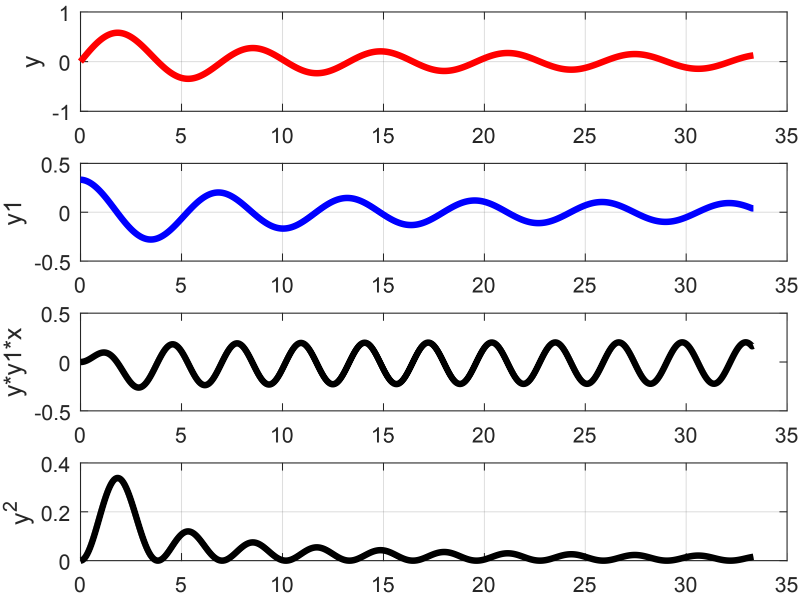
На рис. 1 показаны графики

- функции Бесселя y,
- производной y' от этой функции,
- функции $\Phi(r)$
- функции y^2

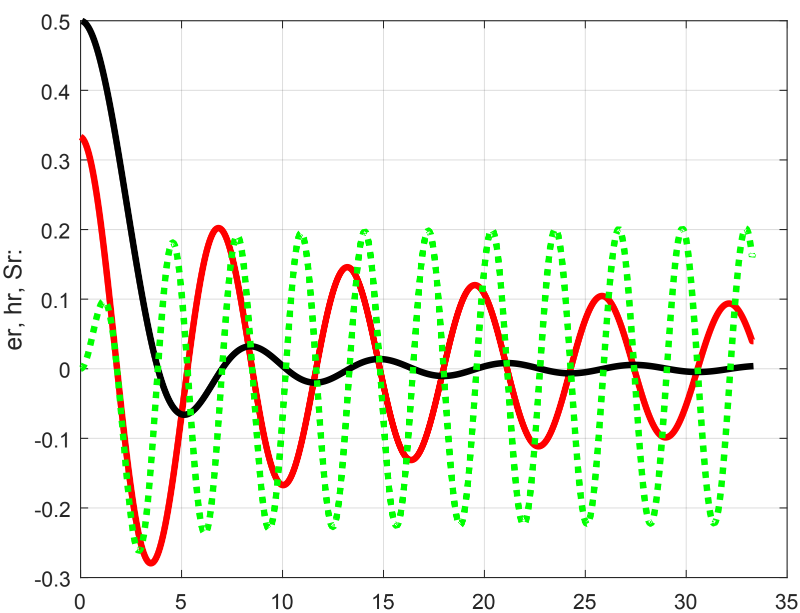
Видно, что функция $\Phi(r)$ является периодической функцией.

На рис. 2 показаны графики

- производной y', которая пропорциональна напряженности $e_r(r)$ - см. (2.28, 2.27) и сплошную кривую с большой амплитудой,
- функции y/r, которая пропорциональна напряженности $h_r(r)$ - см. (2.30, 2.29, 2.26) и сплошную кривую с малой амплитудой, приближающуюся к оси
- функции $\Phi(r)$, которая пропорциональна потоку энергии по радиусу $\overline{S_r}$ - см. (5.10) и пунктирную кривую.



Bes.m, fig. 1



Bes.m, fig. 2

Литература

1. Хмельник С.И. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. “MiC”, Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 p.
2. Хмельник С.И. Еще о непротиворечивом решении уравнений Максвелла, Vixra, 1709.0333, 2017-09-24, http://vixra.org/abs/1709.0333.
3. Джексон Дж. Классическая электродинамика. Перевод с английского Г. В. Воскресенского и Л. С. Соловьева. Под редакцией Э. Л. Бурштейна. Изд "Мир" Москва 1965. - 703 с.
4. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.