Les équations KdV-système intégrable

A.Balan

13 octobre 2017

Résumé

Des équations proches des équations KdV sont définies, leur intégrabilité est discutée.

1 Les équations KdV

1.1 Définition

Les équations KdV (voir [KdV]) sont les suivantes :

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

u est une fonction de deux variables, position et temps (x,t).

1.2 Solutions stationaires de KdV

Si $u_t = 0$, alors $u = P(z)$, la fonction de Weierstrass. En effet :

$$P' = Y, P = X$$

$$Y^2 = X^3 + pX + q$$

2 Les équations KdV modifiées

Maintenant, si

$$Q(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{sin(z+wn)},$$

alors :

$$Y = Q', X = Q$$

vérifie :

$$Y^2 = X^4 + pX^2 + q$$

(on compte les pôles sur le réseau $(2\pi,w)$), donc :

$$Q_{xxx} = Q^2Q_x + pQ_x$$

C'est pour cela que l'on peut supposer que :

$$u_t = u_{xxx} - u^2u_x - u_x$$

est un système intégrable. Si $u_t = 0$, alors $u = Q(z)$

Références

[KdV] D. J. Korteweg et G. de Vries, “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves ”, Philosophical Magazine, vol. 39, 1895, p. 422-443.