Opérateur de Dirac modifié

1 Quelques points d'algèbre

L'algèbre de Clifford est définie par générateurs, des vecteurs dans un espace métrique fixé E et relations: soit $T(E)$ l'espace libre

$$T(E) = \sum_n E^{\otimes n}$$

on modifie les relations pour définir une algèbre de Clifford modifiée. Les relations d'une algèbre de Clifford sont

$$e \otimes f + f \otimes e = -2g(e, f)$$

La seule modification possible est d'introduire une symétrie orthogonale S.

$$S^2 = id, g(S(e), S(f)) = g(e, f)$$

Les relations modifiées sont

$$S(e) \otimes f + S(f) \otimes e = -2g(e, f)$$

L'algèbre de Clifford modifiée est le quotient de $T(E)$ par les relations modifiées:

$$Cliff(S) = T(E)/\sim$$

Les vecteurs de norme un de l'espace E forment le goupe $Pin_n(S)$ duquel on définit le groupe $Spin_n(S)$ qui agit sur l'espace par conjugaison.

$$\rho_e(f) = ef\gamma(e) = [S(f)S(e) - 2g(S(e), f)]e = S(f) - 2g(e, S(f))e$$

On a ainsi un homomorphisme dans $O(n)$. $\rho_e = \tau_e \circ S$, avec τ_e la transposition de vecteur e.

$$\rho_e \circ \rho_f = \tau_e \circ \tau_{S(f)}$$

On montre que $Spin_n(S) \cong Spin_n$ car ce sont deux revêtements universels de $SO(n)$. On peut donc définir le fibré des spineurs.

2 L'opérateur de Dirac-Formules de Lichnerowicz

In fine, on obtient un opérateur de Dirac avec une symétrie orthogonale $S(D)$.

Théorème:

$$D = \sum_i e_i \nabla_{e_i}$$

et

$$S(D) = \sum_i S(e_i) \nabla_{e_i}$$

On a

$$S(D)D = \Delta + r(S)/4$$

avec $r(S)$ un scalaire qui dépend de la courbure:

$$r(S) = \sum_i S(e_i) Ric(e_i)$$

et de la symétrie S.

Démonstration:

$$S(D)D\psi - \Delta\psi = \sum_{i,j} S(e_i)\nabla_{e_i}(e_j \nabla_{e_j}\psi) +$$

$$\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi + \sum_i div(e_i)\nabla_{e_i}\psi =$$

$$\sum_{i,j} S(e_i)[(\nabla_{e_i} e_j)\nabla_{e_j}\psi + e_j \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi] +$$

$$\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi + \sum_i div(e_i)\nabla_{e_i}\psi =$$

$$\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) S(e_i) e_k \nabla_{e_j}\psi + \sum_{i,j} S(e_i) e_j \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi +$$

$$\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi + \sum_i div(e_i)\nabla_{e_i}\psi =$$

$$\sum_j \sum_{i \neq k} g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) S(e_i) e_k \nabla_{e_j}\psi + \sum_{i \neq j} S(e_i) e_j \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi +$$

car

$$\sum_j \sum_{i=k} g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) S(e_i] e_k \nabla_{e_j}\psi = -\sum_j div(e_i)\nabla_{e_j}\psi$$

par définition.

$$\sum_{i \neq j} g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) S(e_i) e_k = -\sum_{i \neq k} g(e_j, \nabla_{e_i} e_k) S(e_i) e_k =$$

$$-\sum_{i<k} g(e_j, \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{e_k} e_i) S(e_i) e_k =$$

$$\sum_{i<k} g(e_j, [e_k, e_i]) S(e_i) e_k$$

On a donc

$$S(D)D\psi - \Delta\psi = \sum_j \sum_{i<k} g(e_j, [e_k, e_i]) S(e_i) e_k \nabla_{e_j} \psi +$$

$$\sum_{i<j} S(e_i) e_j (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i}) \psi =$$

$$\sum_{i<j} S(e_i) e_j (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \nabla_{[e_i, e_j]}) \psi =$$

$$1/2 \sum_{i,j} S(e_i) e_j R(e_i, e_j) \psi = -1/4 \sum_i S(e_i) Ric(e_i) \psi$$

Théorème:

$$D = \sum_i e_i \nabla_{e_i}$$

et

$$S(D) = \sum_i S(e_i) \nabla_{e_i}$$

S est parrallèle selon la connexion spinorielle de Levi-Civita ie par le transport parrallèle les espaces propres de S sont conservés.

$$DS(D) = \Delta + r(S)/4$$

avec $r(S)$ un scalaire qui dépend de la courbure:

$$r(S) = \sum_i e_i Ric_S(e_i)$$

$$Ric_S(e) = \sum_i S(e_i) R(e, e_i)$$

et de la symétrie S.

Démonstration:

$$DS(D)\psi - \Delta\psi = \sum_{i,j} e_i \nabla_{e_i} (S(e_j) \nabla_{e_j} \psi) +$$

$$\sum_i \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \psi + \sum_i div(e_i) \nabla_{e_i} \psi =$$

$$\sum_{i,j} e_i [(S(\nabla_{e_i} e_j)) \nabla_{e_j} \psi + S(e_j) \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \psi] +$$

$$\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi + \sum_i div(e_i)\nabla_{e_i}\psi =$$

$$\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_i}e_j, e_k)e_iS(e_k)\nabla_{e_j}\psi + \sum_{i,j} e_iS(e_j)\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi +$$

$$\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi + \sum_i div(e_i)\nabla_{e_i}\psi =$$

$$\sum_j \sum_{i\neq k} g(\nabla_{e_i}e_j, e_k)e_iS(e_k)\nabla_{e_j}\psi + \sum_{i\neq j} e_iS(e_j)\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\psi$$

car

$$\sum_j \sum_{i=k} g(\nabla_{e_i}e_j, e_k)e_iS(e_k)\nabla_{e_j}\psi = -\sum_j div(e_i)\nabla_{e_j}\psi$$

par définition.

$$\sum_{i\neq j} g(\nabla_{e_i}e_j, e_k)e_iS(e_k) = -\sum_{i\neq k} g(e_j, \nabla_{e_i}e_k)e_iS(e_k) =$$

$$-\sum_{i<k} g(e_j, \nabla_{e_i}e_k - \nabla_{e_k}e_i)e_iS(e_k) =$$

$$\sum_{i<k} g(e_j, [e_k, e_i])e_iS(e_k)$$

On a donc

$$DS(D)\psi - \Delta\psi = \sum_j \sum_{i<k} g(e_j, [e_k, e_i])e_iS(e_k)\nabla_{e_j}\psi +$$

$$\sum_{i<j} e_iS(e_j)(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i})\psi =$$

$$\sum_{i<j} e_iS(e_j)(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} - \nabla_{[e_i,e_j]})\psi =$$

$$1/2 \sum_{i,j} e_iS(e_j)R(e_i, e_j)\psi = -1/4 \sum_i e_iRic_S(e_i)\psi$$

Les équations permettent de comprendre les vecteurs propres et les valeurs propres de l'opérateur de Dirac modifié car D et $S(D)$ commutent.
Remarque: la première valeur propre est la masse de l'électron.

3 Application en K-théorie

Introduire une symétrie sur les fibrés permet de donner une involution en K-théorie. Il s'agit de prendre en compte la symétrie dans les outils mathématiques, en particulier en K-théorie. On donne une graduation sur les fibrés, ce qui correspond une symétrie des fibrés. On forme le groupe de K-théorie avec involution en prenant le monoide des fibrés gradués et en quotientant par les fibrés triviaux.

4 Application aux équations de Seiberg-Witten

On peut faire usage de l'opérateur de Dirac dans les équations de Seiberg-Witten en vue d'obtenir des invariants des variétés. On veut définir des équations de Seiberg-Witten modifiées.
On rappelle que les équations de Seiberg-Witten sont donnés sur une variété de dimension quatre avec $Spin^C$ structure par:

$$D_A\psi = 0$$

$$F_A^+ = q(\psi) + i\mu$$

D_A est l'opérateur de Dirac F_A^+ est la partie autoduale de la courbure et μ est une deux forme autoduale fixée. q est définie par la multiplication de Clifford.

La multiplication de Clifford s'étend au Λ^2 par

$$cl(v \wedge w) = 1/2(cl(v)cl(w) - cl(w)cl(v))$$

par restriction on obtient une flèche

$$cl_+ : \Lambda_+^2 \otimes C \to End(S_+)$$

de sorte que

$$q(\psi) = cl_+^*(\psi \otimes \psi^*)$$

On propose de modifier ces équations par

$$S(D)_A\psi = 0$$

$$F_A^+ = q_S(\psi) + i\mu$$

on modifie q en q_S par la modification de cl en cl_S

$$cl_S(v \wedge w) = 1/2(cl(S(v))cl(w) - cl(S(w))cl(v))$$

$$q_S(\psi) = cl_{+,S}^*(\psi \otimes \psi^*)$$