ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КАТАЛАНА

Курмет Султан

АБСТРАКТ: В статье приводиться простое доказательство Гипотезы Каталана.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Гипотеза Каталана, простое доказательство.

MSC Classification Codes: 11D41

1 Введение

Гипотеза Каталана, которая предложена в 1844 году Эженом Каталаном, формулируется следующим образом [1, 2]:

Уравнение

(1) $c^q = b^n + 1$, *где* $n, q, c, b > 1$,

имеет единственное решение в натуральных числах: q = 2, n = 3, c = 3, b = 2.

Иными словами, уравнение $c^q = b^n + 1$ не имеет других решений кроме $3^2 = 2^3 + 1$.

В работе [3] отмечается, что Леви бен Герсон (1288-1344) заметил, что единственными степенями, которые отличались на 1, были 3^2 и 2^3, т.е. эта проблема старше знаменитой Последней Теоремы Ферма на более 300 лет. За это время многие ученые пытались доказать гипотезу Каталана, однако только нескольким ученым удалось получить значимые результаты для частных случаев, например, можно отметить работы [4, 5, 6]. Наконец, эту гипотезу в 2002 году доказал Преда Михайлеску [7], однако опубликованное им доказательство достаточно сложное, поскольку оно основывается на теории полей Галуа. В этой связи вопрос получения простого доказательства Гипотезы Каталана является актуальным.

2 Представление чисел по модулю 4

Для исследования натуральных степеней натуральных чисел представим их по остаткам по модулю 4, для этого воспользуемся следующей Теоремой.

Теорема 1. Натуральная степень (больше 1) любого натурального числа не имеет остаток 2 по модулю 4.

Доказательство теоремы 1. При возведении в натуральную степень (больше 1) любого натурального числа вида $4x + 2$ оно превращается в натуральное число вида $4y$, т.е.

$(4x+2)^{\,n} = 4y, n > 1$, поэтому натуральная степень (больше 1) любого натурального числа не имеет остаток 2 по модулю 4.

Например, $(4\cdot 3+2)^{\,3} = 2744$, $\frac{2744}{4} = 686$, $2744 \equiv 0\; mod\; 4$.

Из Теоремы 1 следует, что натуральные числа имеющие остаток 2 по модулю 4 не имеют представление в виде натуральной степени натурального числа, другими словами только натуральные числа имеющие остатки 0, 1 и 3 по модулю 4 могут быть представлены виде натуральной степени натурального числа.

Таким образом, согласно Теореме 1, числа b^n и c^q могут иметь следующие представление на основе остатков по модулю 4,

$b^n = 4k$; $b^n = 4k+1$; $b^n = 4k+3$; $b, k, n \in \mathbb{N}$;

$c^q = 4s$; $c^q = 4s+1$; $c^q = 4s+3$; $c, s, q \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что только в следующем случае разность c^z и b^y могут быть равна 1,

(2) $c^z - b^y = (4s+1) - 4k$,

причем только в случае, когда $s = k$, поэтому для случая $s = k$ можем написать

(3) $c^z - b^y = (4s+1) - 4s$.

Далее будем использовать следующие зависимости:

a) Натуральная степень натурального числа может иметь вид $4s$, если натуральное число имеет вид $(2y)^n$, т.е. $(2y)^n = 4s$,

(4) $(2y)^n = 4s$;

b) Натуральная степень натурального числа может иметь вид $4s+1$, если натуральное число будет иметь вид $(4x+1)^m$, $x = 1,2, \ldots$, т.е.,

(5) $4s+1 = (4x+1)^m$,

Выше было сказано, что множители s чисел $(4s+1)$ и $4s$ должны быть равны, поэтому

$(2y)^n = 4s$;
$(4x+1)^m = 4s+1$;

(6) $(2y)^n + 1 = (4x+1)^m$;

3 Основное уравнение

Рассмотрим левую часть уравнения (6):

$(2y)^n + 1 = (2y)^n + 1^n$.

Применив формулу суммы $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, получим

(7) $(2y)^n + 1^n = (2y+1)((2y)^{n-1} - (2y)^{n-2} + \ldots + 1)$.

Далее преобразуем уравнение (6) с учетом уравнения (7)

(8) $(2y+1)((2y)^{n-1} - (2y)^{n-2} + \ldots + 1) = (4x+1)^m$.

Из уравнения (8) следует, что $(4x+1)^m$ и $4x+1$ должны делиться без остатка на $(2y+1)$, т.е. должно быть $4x+1 = k(2y+1)$, поэтому можем написать

(9) $(4x+1)^m = k^m(2y+1)^m$.

Тогда уравнение (8) можно привести к следующем виду

(10) $(2y+1)((2y)^{n-1} - (2y)^{n-2} + \ldots + 1) = k^m(2y+1)^m$.

Далее, с учетом (9) уравнение (6) представим в виде

(11) $(2y)^n + 1^n = k^m(2y+1)^m$.

Отсюда получим

(12) $k^m = \frac{(2y)^n+1}{(2y+1)^m}$.

Согласно условии гипотезы должно быть $k^m = 1$, поэтому можно написать $\frac{(2y)^n+1}{(2y+1)^m} = 1$.

Например, для $y = 1, n = 3, m = 2$,

$k^m = \frac{(2\cdot1)^3+1}{(2\cdot1+1)^2} = 1$.

Таким образом, мы получили следующее тождество

(13) $(2y)^n + 1 = (2y+1)^m$; где $n > m$.

Далее примем $2y = x$, тогда на основе уравнения (13) можем написать

(14) $x^n + 1 = (x+1)^m$; или $(x+1)^m - x^n = 1$.

Поскольку чем больше x, тем меньше влияние числа 1 на разность $(x+1)^m - x^n$, поэтому можно считать, что если для больших x существует решение уравнения, то должно быть $m = n - 1$, поэтому

(15) $x^n + 1 = (x+1)^{n-1}$.

Пример. Для $x = 2, n = 3$, получим $2^3 + 1 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1$, $8 + 1 = 9$.

4 Доказательство гипотезы

Уравнение (15) можно представить в следующем виде

(16) $(x^{n+1} - x^n) + 1 = (x+1)^n - x^n$ или

(17) $((x+1)^n - x^n) - (x^{n+1} - x^n) = 1$.

Уравнение (17) показывает, что разность двух приращений числа x^n, получаемых путем повышения его основания x на 1 и степени n на 1, будет равна 1. Оно имеет только одно натуральное решение $x = 2$ и $n = 2$, так как для других натуральных значений x и n, абсолютное значение разности $((x+1)^n - x^n)$ и $(x^{n+1} - x^n)$ будет больше 1, причем значение разности будет увеличиваться с повышением x и n, т.е. для всех $x > 2$ и $n > 2$ будет справедливо следующее неравенство

(18) $|((x+1)^n - x^n) - (x^{n+1} - x^n)| > 1$.

Получить подтверждения вышесказанного утверждения можно путем анализа разностей пар приращений $((x+1)^n - x^n)$ и $(x^{n+1} - x^n)$ для $x = 2$ и нескольких n:

$n = 2$, $((2+1)^2 - 2^2) - (2^{2+1} - 2^2) = 5 - 4 = 1$;

$n = 3$, $((2+1)^3 - 2^3) - (2^{3+1} - 2^3) = 19 - 8 = 11$;

$n = 4$, $((2+1)^4 - 2^4) - (2^{4+1} - 2^4) = 65 - 16 = 49$;

$n = 5$, $((2+1)^5 - 2^5) - (2^{5+1} - 2^5) = 211 - 32 = 179$.

Отметим, что разность приращений будет положительным числом только при начальных небольших x, затем разность приращений будет отрицательной, т.е. для любого n для всех x, за исключением начальных x , будет справедливо следующее неравенство

$(x+1)^n - x^n) < (x^{n+1} - x^n)$, поэтому разность удобно приставить в следующем виде

(19) $y = |(x^{n+1} - x^n) - ((x+1)^n - x^n)|$.

Функция (19) для любого $n > 1$ и $x > 1$ является монотонной и растущей, поэтому она будет больше 1 для всех $x > 2$ и $n > 2$.

Таким образом, найдено простое доказательство верности гипотезы Каталана.

Ссылки

[1] E. Catalan. Note extraite d’une lettre adressée à l’éditeur (фр.) // J. Reine Angew. Math. — 1844. — Vol. 27, no 192. — P. 165–186.

[2] Weisstein, Eric W. "Catalan's Conjecture." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/CatalansConjecture.html

[3] Peterson, I. “MathTreek: Zeroing in on Catalan’s Conjecture” Dec.4, 2000. https://www.sciencenews.org/20001202/mathtrek.asp.

[4] Tijdeman, R. "On the Equation of Catalan." Acta Arith. 29, 197-209, 1976.

[5] Ribenboim, P. "Catalan's Conjecture." Amer. Math. Monthly 103, 529-538, 1996.

[6] Steiner, R. "Class Number Bounds and Catalan's Equation." Math. Comput. 67, 1317-1322, 1998.

[7] P. Mihăilescu. Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture (англ.) // J. Reine angew. Math. — 2004. — Vol. 572, no. 572. — P. 167–195.