Хмельник С.И.

Еще о непротиворечивом решении уравнений Максвелла

Аннотация

Приводится краткое описание непротиворечивого решения уравнений Максвелла, данного в [1], и новые дополнения.

Оглавление

1. Введение
2. Решение уравнений Максвелла
3. Напряженности
4. Потоки энергии
5. Скорость движения энергии
6. Импульс и момент импульса
7. Обсуждение
Литература

1. Вступление

"До настоящего времени не было обнаружено ни одного эффекта, который потребовал бы видоизменения уравнений Максвелла" [4]. Тем не менее, в последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Уверенность критиков уравнений Максвелла создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии в такой волне. И, действительно, "*плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «пульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?*" [3]. Безусловно, нарушается, **если** электромагнитная волна удовлетворяет **известному решению** уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: "*Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана*" [4]. Таким образом, <u>единственность решения</u>

доказывается на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

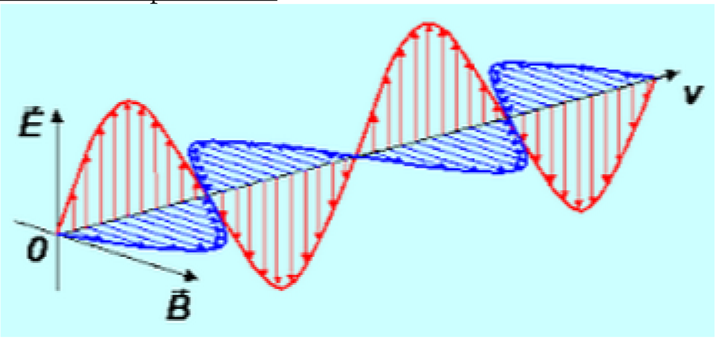

Рис. 1.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это хорошо видно на рис. 1. Но это противоречит представлению о беспрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [3], например, этот факт относится к "порокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют некоторым авторам усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти сомнительные результаты следуют **только из найденного решения**. Но это решение может быть иным (уравнения в частных производных имеют, как правило, несколько решений).

В [1] выводится другое решение уравнений Максвелла, в котором плотность потока электромагнитной энергии остается постоянной во времени, а электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

Ниже показывается, что из этого решения можно найти также скорость движения электромагнитной энергии, которая в общем случае отличается от скорости света. Даны и некоторые другие добавления к [1].

Для удобства читателя вначале кратко рассматривается предложенное в [1] решение.

2. Решение уравнений Максвелла

Система уравнений Максвелла для вакуума имеет вид

$$\mathrm{rot}(E)+\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=0, \quad (1)$$

$$\mathrm{rot}(H)-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=0, \quad (2)$$

$$\mathrm{div}(E)=0, \quad (3)$$

$$\mathrm{div}(H)=0. \quad (4)$$

В системе цилиндрических координат $r,\ \varphi,\ z$ эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r}+\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{E_\varphi}{r}+\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{H_r}{r}+\frac{\partial H_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\frac{H_\varphi}{r}+\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (12)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co=\cos(\alpha\varphi+\chi z+\omega t), \quad (13)$$

$$si=\sin(\alpha\varphi+\chi z+\omega t), \quad (14)$$

где $\alpha,\ \chi,\ \omega$ – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r.=h_r(r)co, \quad (15)$$

$$H_\varphi.=h_\varphi(r)si, \quad (16)$$

$$H_z.=h_z(r)si, \quad (17)$$

$$E_r.=e_r(r)si, \quad (18)$$

$$E_{\varphi}. = e_{\varphi}(r)co\,, \tag{19}$$

$$E_{z}. = e_{z}(r)co\,, \tag{20}$$

где $h(r)$, $e(r)$ - некоторые функции координаты r.

В [1] показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид:

$$h_z(r) = 0\,,\ e_z(r) = 0\,, \tag{21}$$

$$e_r(r) = e_{\varphi}(r) = \frac{A}{2} r^{(\alpha-1)}, \tag{22}$$

$$h_{\varphi}(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r), \tag{23}$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{\varphi}(r), \tag{24}$$

$$\chi = \pm \omega \sqrt{\mu\varepsilon} / c\,, \tag{25}$$

где $A, \varepsilon, \mu, c, \alpha, \chi, \omega$ – константы.

3. Напряженности

На рис. 2 показаны векторы напряженностей, исходящие из точки $A(r,\varphi)$. При этом **векторы** E, H **всегда** **ортогональны**.

Для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны рассмотрим функции (2.13, 2.14) и (2.15-2.20). Видно, что **в каждой точке с координатами** r, φ, z **напряженности** H, E **сдвинуты по фазе на четверть периода.**

Плотность энергии равна

$$W = \left(\frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) = \frac{A^2}{4} \cdot \varepsilon \cdot r^{2(\alpha-1)}. \tag{1}$$

Таким образом, **плотность энергии электромагнитной волны постоянна во времени и одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса**.

Решение существует и при измененных знаках функций (2.13, 2.14). Этому случаю соответствует рис. 3. Рис. 2 и рис. 3 иллюстрируют то, что возможны **два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны.**

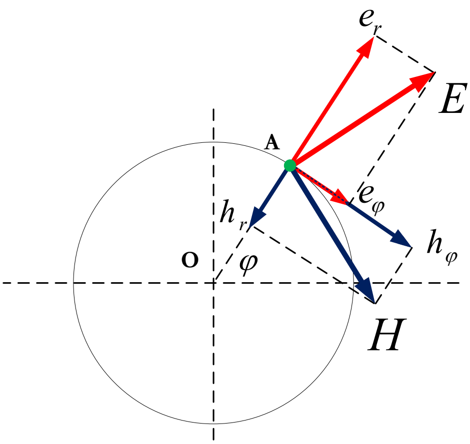

Рис. 2.

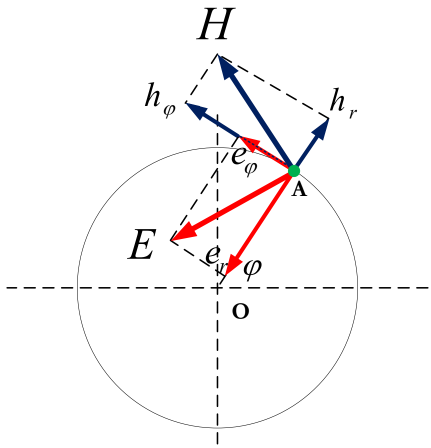

Рис. 3.

Рассмотрим функции (2.13, 2.14) и (2.25) Тогда найдем

$$co = \cos(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}z + \omega t), \tag{2}$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}z + \omega t). \tag{3}$$

Рассмотрим точку, движущуюся по цилиндру постоянного радиуса r, у которой значение напряженности зависит от времени по формуле

$$H_r. = h_r(r)\cos(\omega t) \tag{4}$$

Сравнивая эту формулу с (2.15) и учитывая (2), замечаем, что формулы (4) и (2.15) совпадают, если в любой момент времени

$$\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}z = 0 \tag{5}$$

или

$$\varphi = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha \cdot c}z. \tag{6}$$

Таким образом, на цилиндре постоянного радиуса r существует траектория точки, описываемая формулами (2, 6), где все напряженности изменяются синусоидально. С другой стороны, такая траектория является винтовой линией. Следовательно, линия, по которой точка движется так, что ее напряженность $H_r.$ изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией. Эти же рассуждения можно повторить для других напряженностей (2.16-2.20). Итак,

траектория точки, которая движется по цилиндру данного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является <u>винтовой линией</u>.	**(A)**

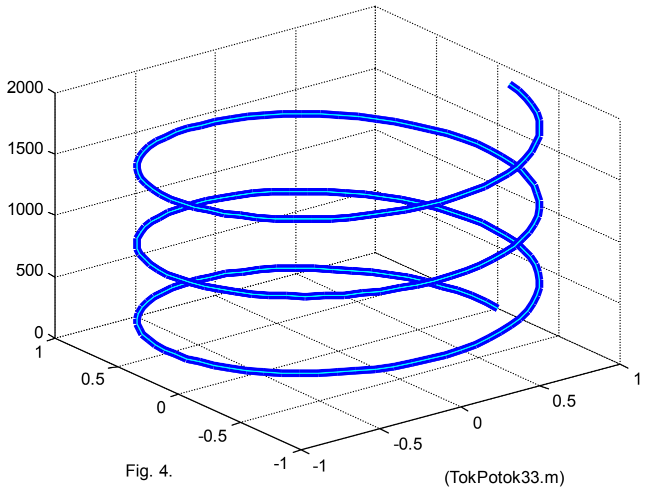

Fig. 4. (TokPotok33.m)

Например, на рис. 4 показана винтовая линия при $r=1,\ c=300000,\ \omega=3000,\ \alpha=-3,\ \varphi=[0\div 2\pi]$. На рис. 4а показаны винтовые линии при тех же условиях, но для различных значений радиуса $r=[0.5,\ 0.6,\ ...1.0,\ 1.1]$. Прямыми линиями показаны геометрические места точек с равными φ.

Обозначим $e_r(r)=e_\varphi(r)=e_{r\varphi}(r)$. Тогда из (2.21-2.25) следует, что в каждой точке имеются только векторы

$$H_r.=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_{r\varphi}(r)cos(\omega t),\qquad H_\varphi.=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_{r\varphi}(r)\,sin(\omega t),\qquad (7)$$

$$E_r.=e_{r\varphi}(r)\sin(\omega t),\qquad E_\varphi.=e_{r\varphi}(r)\cos(\omega t).\qquad (8)$$

При этом суммарные векторы $\mathrm{H}_{\mathrm{r}\varphi}=\mathrm{H}_r+\mathrm{H}_\varphi$ и $\mathrm{E}_{\mathrm{r}\varphi}=\mathrm{E}_r+\mathrm{E}_\varphi$ находятся в плоскости $r,\ \varphi$ и имеют модули $\left|H_{r\varphi}\right|=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_{r\varphi}(r),\ \left|E_{r\varphi}\right|=e_{r\varphi}(r)$. На рис. 4б показаны все эти векторы. Видно, что при движении точки T по винтовой линии суммарные векторы $\mathrm{H}_{\mathrm{r}\varphi}$ и $\mathrm{E}_{\mathrm{r}\varphi}$ вращаются в плоскости $r,\ \varphi$. Их модули остаются постоянными и равными между собой. Эти векторы $H_{r\varphi}$ и $E_{r\varphi}$ всегда ортогональны.

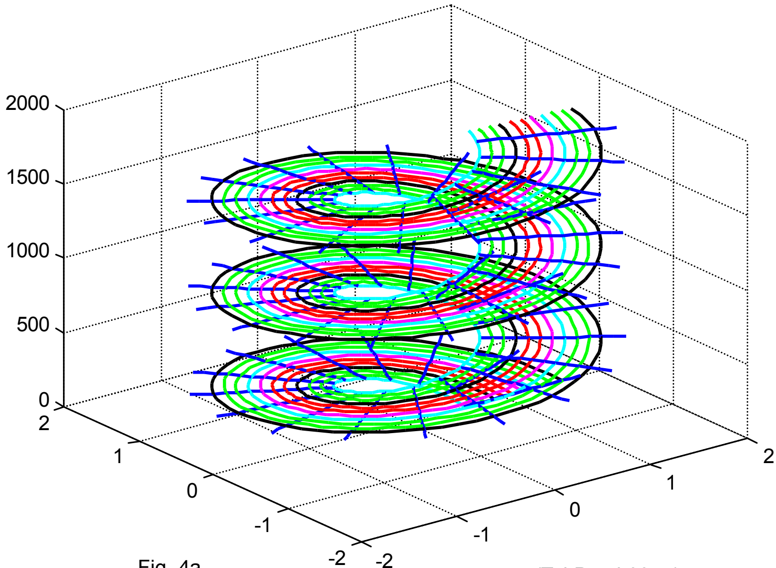

Fig. 4a. (TokPotok33.m)

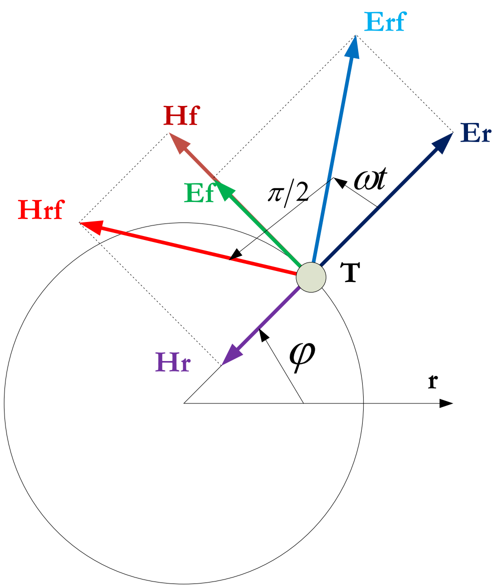

Рис. 4б.

Итак, **<u>синусоидальная волна распространяется по винтовой линии</u>**, при этом в каждой точке T, движущейся по данной винтовой линии, проекции векторов магнитной и электрической напряженностей

- существуют только в плоскости, перпендикулярной оси винтовой линии, т.е. существуют только две проекции этих векторов,
- изменяются синусоидально,
- сдвинуты по фазе на четверть периода.

Суммарные векторы

- вращаются в этой плоскости,
- имеют постоянные модули,
- ортогональны друг другу.

4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Умова-Пойнтинга

$$S = \eta E \times H \,, \tag{1}$$

где

$$\eta = c/4\pi \,. \tag{2}$$

Отсюда и из предыдущих формул следует, что <u>поток энергии распространяется только вдоль оси oz</u> и равен

$$\overline{S} = \overline{S_z} = \eta \iint\limits_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi \,, \tag{3}$$

где плотность потока энергии

$$s_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(e_r^2 + e_\varphi^2 \right). \tag{4}$$

Отсутствие потока энергии по радиусу означает, что область существования волны **<u>НЕ</u>** <u>расширяется</u>. Подтверждением этому является существование лазера.

Как показано в [1], из предыдущих формул следует, что

$$s_z = \frac{A^2 c}{64\alpha\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(1 - \cos(4\alpha\pi)\right) r^{2(\alpha-1)} . \tag{5}$$

Отсюда следует, что

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует <u>картина распределения плотности потока</u> по сечению волны;
- эта картина вращается при перемещении по оси oz;

- поток энергии, проходящий через площадь сечения, не зависит от t, φ, z; главное, что эта величина не изменяется во времени, и, следовательно, <u>поток энергии электромагнитной волны является постоянным во времени;</u> это соответствует **закону сохранения энергии**.

5. Скорость движения энергии

Прежде всего, найдем скорость распространения монохроматической электромагнитной волны. Очевидно, эта скорость равна производной $\frac{dz}{dt}$ от функции $z(t)$, заданной неявно в виде (2.15-2.20). Определив производную из этих функций, найдем скорость распространения монохроматической электромагнитной волны

$$v_m = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\chi} \tag{1}$$

или, с учетом (2.25),

$$v_m = \mp\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{2}$$

Следовательно, <u>скорость распространения монохроматической электромагнитной волны равна скорости света</u>.

Общепринятой является концепция Умова [5], согласно которой плотность потока энергии s является произведением плотности энергии w и скорости движения энергии v_e:

$$s = w \cdot v_e. \tag{3}$$

Из (4.5, 3.1) получаем:

$$K_{vc} = \frac{v_e}{c} = \frac{(1 - \cos(4\alpha\pi))}{16\alpha\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{4}$$

При малых α уравнение (4) преобразуется к виду:

$$K_{vc} \approx \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{5}$$

Таким образом, скорость движения электромагнитной энергии и величина α пропорциональны. В частности, скорость движения электромагнитной энергии равна скорости распространения монохроматической электромагнитной волны при $K_{vc} = 1$, откуда следует, что

$$\alpha \approx \frac{2}{\pi}\sqrt{\varepsilon\mu} \approx 2\cdot 10^{-9}. \qquad (6)$$

При этом условии плотности потока энергии и энергии связаны соотношением $s = w \cdot c$. При этом скорость движения энергии постоянна для всех точек сечения волны (не зависит от *r*).

Скорость движения электромагнитной энергии v_e не всегда равна скорости света. Например, в стоячей волне $v_e = 0$, и, вообще, в волне, являющейся суммой двух монохроматических электромагнитных волн одинаковой частоты, распространяющихся в противоположных направлениях, перенос энергии ослаблен и $v_e < c$.

Заметим, что на основании известного решения и формулы (3) нельзя найти скорость v_e. Действительно, в системе СИ найдем:

$$v_e = \frac{S}{W} = \mathrm{EH}\Big/\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{H^2}{2\mu}\right) = 2\mu\Big/\left(\varepsilon\mu\frac{E}{H} + \frac{H}{E}\right).$$

Если $\frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{H^2}{2\mu}$, то $\frac{H}{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}$. Тогда для вакуума

$$v_e = 2\mu\Big/\left(\varepsilon\mu\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \sqrt{\varepsilon\mu}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 376,$$

что **не** соответствует действительности. Вообще, полученное здесь решение не может быть найдено в векторной форме.

6. Импульс и момент импульса

Известно, что

$$p = S/c^2, \qquad (1)$$

$$m = p \cdot r, \qquad (2)$$

где p - плотность импульса, m - плотность момента импульса в данной точке вокруг оси, отстоящей от данной точки на расстояние r. Из вышеизложенного следует, что в электромагнитной волне существуют потоки энергии, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Следовательно, в электромагнитной волне существуют также импульсы, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Существуют также <u>моменты импульса</u> относительно любого радиуса, любой окружности и <u>относительно оси</u>.

Рассмотрим момент импульса относительно оси z. В соответствии с (1) найдем этот момент:

$$L_z = p_z r = s_z r / c^2 . \tag{3}$$

Этот момент является орбитальным угловым моментом, который обнаруживается в т.н. закрученном свете [6].

Вместе с тем, следует заметить, что закрученность света **не** следует из существующего решения уравнений Максвелла. Однако, она естественным образом следует из предложенного решения – см. (6). На рис. 7а (взятом из [6]) *"картинка с закрученным светом показывает не электрическое поле, а именно волновой фронт* (на среднем фрагменте показан незакрученный свет, а на верхнем и нижнем фрагментах – свет, закрученный в ту или иную сторону). *Он не плоский, тут фаза волны меняется не только при движении вдоль луча, но и при смещении в поперечной плоскости … Поскольку поток энергии световой волны обычно направлен перпендикулярно волновому фронту, то получается, что в закрученном свете энергия и импульс волны не просто летят вперед, а как бы крутятся при этом вокруг оси движения."* Именно это и получено выше – см. для сравнения рис. 3.4а.

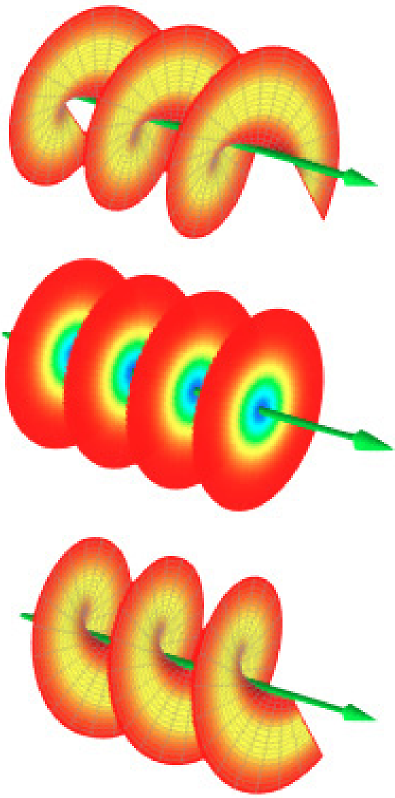

Рис. 7а.

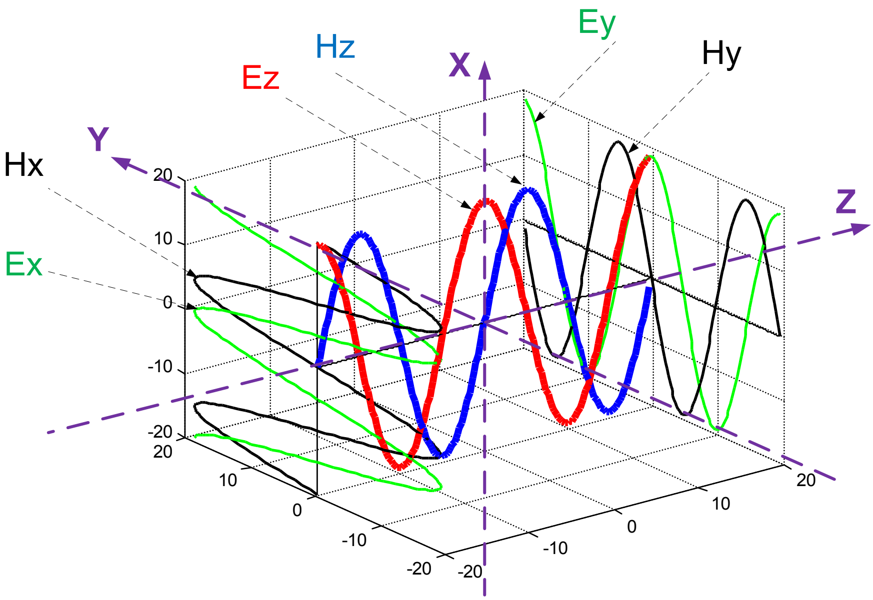

Рис. 8.

7. Обсуждение

На рис. 8 показаны напряженности в декартовых координатах. Полученное решение описывает волну. Основные отличия этого решения от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии **не** изменяется во времени, что <u>соответствует закону сохранения энергии</u>.
2. Поток энергии имеет <u>положительное</u> значение.
3. Поток энергии <u>распространяется вдоль волны</u>
4. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат r, φ, z <u>сдвинуты по фазе на четверть периода.</u>
5. Решение для магнитных и электрических напряженностей является <u>вещественным</u>.
6. Решение существует при <u>постоянной скорости</u> распространения волны.
7. Область существования волны <u>**не** расширяется,</u> что подтверждается существованием лазера.
8. Векторы электрической и магнитной напряженностей <u>ортогональны</u>.

9. Возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны
10. Волна и ее энергия определены, если заданы параметры $A,\ \omega,\ R,\ \alpha$.
11. Параметр α определяет скорость движения энергии в электромагнитной волне.
12. Точка, движущаяся по цилиндру постоянного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией.

Литература

1. С.И. Хмельник. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. "MiC", Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 p.
2. Википедия, Уравнения Максвелла, https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла
3. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html
4. Ток смещения и система уравнений Максвелла, http://www.webpoliteh.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smeshheniya-i-sistema-uravnenij-maksvella.html
5. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. - Одесса: Типография Ульриха и Шульце, 1874. - 56 с. http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Umow.pdf
6. Игорь Иванов. Закрученный свет и закрученные электроны: обзор последних результатов, http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/432009/Zakruchennyy_svet_i_zakruchennye_elektrony_obzor_poslednikh_rezultatov