# Вычисление суммы последовательности всех натуральных квадратов.

Misha Mikhaylov

e-mail address: misha59mikhaylov@gmail.com

ABSTRACT. This is the Russian version of my previous publication.

Эта сумма $\sum_{k=0}^{n} k^2$ при натуральных значениях $k, n \in \mathbb{N}$, конечно, посчитана – возможно, самим Бернулли – по крайней мере, современные или относительно недавние авторы, у коих она встречается, отсылают воспользоваться числами Бернулли. Но, по-видимому, такой метод является довольно громоздким и вряд ли годится в качестве задачи на вступительном экзамене. Поэтому можно предложить другой – более легкий способ сделать это, не претендуя, правда, на его строгость.

Чтобы оценить примерный вид искомого выражения можно заметить следующее. Учитывая известный факт того, что множество натуральных чисел является подмножеством множества положительных действительных чисел $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$, можно, по-видимому, предположить, что их элементы во многом обладают сходными свойствами (опустив при этом их какие-либо различия – для оценки этого, видимо, будет достаточно). Вместо исходной суммы записав легко берущийся интеграл $\int_0^x \theta^2\, d\theta = x^3/3$, можно заключить, что искомая сумма представима произведением трех натуральных чисел, которое делимо на 3, поскольку их значение в любом случае натурально.

Далее можно заметить, что возведение в любую натуральную степень и в квадрат, в частности, не меняет четности натурального числа – и основание и его натуральная степень всегда имеют одинаковую четность. Кроме того, искомая сумма может принимать как четные, так и нечетные значения – в зависимости от четности числа $n$, и искомая формула представляет собой дробное выражение с 3 в знаменателе и четным числом в числителе. Учитывая необязательную четность искомого выражения, можно заключить, что в знаменателе должно быть число 6.

Наиболее простой вид четного числа, которое может быть представлено в виде произведения двух натуральных чисел, является произведение чисел, имеющих заведомо различную четность – т.е. $n(n+1)$. С тем, чтобы результат деления принимал и нечетные значения, третий сомножитель должен быть обязательно нечетным – $2n+1$. И, кроме того, легко показать, что один из этих трех сомножителей обязательно делим на 3. В предположении этого для сомножителей $n = 3l$ или $n+1 = 3m$ такой вывод очевиден. Поэтому предположим, что $n = 3l+1$, тогда $n+1 = 3l+2$, т.е. ни одно из этих чисел не делится на 3. Но тогда число $2n+1 = 2(3l+1)+1 = 6l+3$, т.е. оно делимо на 3.

Суммируя сказанное, можно окончательно записать

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Для уверенности можно сделать проверку для небольших значений $n$ Для $n = 0$ результат очевиден. Для $n = 1$ то же самое. Для $n = 2$ имеем

$$1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

Для $n = 3$ получается

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

Впрочем, общий результат может быть легко проверен и индуктивно.