

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DE L'ENVIRONNEMENT
ET DU DEVELOPPEMENT DURABLE
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

**SELECTED PAPERS
DE L'INGÉNIEUR GÉNÉRAL
ABDELMAJID BEN HADJ SALEM
Tome III**

Janvier 2014

version 5.d

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE
www.otc.nat.tn

A mes Chers Collègues de l'OTC et à tout le Personnel.

Préface

J'ai le grand plaisir de remettre le tome III de papiers sélectionnés parmi les documents et notes techniques que j'ai rédigés au cours de mes années de travail à l'OTC, dont certains sont relatifs aux cours suivis lors de mes années d'études d'ingénieurs à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques de France.

Leurs parutions dans ce document ne suivent pas l'ordre chronologique de leurs rédactions.

Table des matières

Avant-Propos	iii
Préface	iii

Partie I ELÉMENTS DE GÉODÉSIE ET D'ASTRONOMIE

53 LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ET LES ESTIMATEURS ROBUSTES ...	5
53.1 INTRODUCTION	5
53.2 ETUDE DE TORBEN KRARUP(INSTITUT DE GÉODÉSIE DU DANMARK) .	6
53.2.1 La Méthode des moindres carrés	6
53.2.2 Minimum de la Somme des Valeurs Absolues des Résidus	6
53.3 LES ESTIMATEURS ROBUSTES	8
53.3.1 La Méthode Danoise	9
53.4 ETUDE D'ALAIN MORINEAU	11
53.4.1 Introduction	11
53.4.2 La notion de robustesse	11
53.4.3 La Compensation par la Méthode des Moindres Carrés	11
53.4.4 La méthode du minimum de la somme des valeurs absolues	17
53.4.5 La Regression Robuste : Les M-Estimeurs	18
53.5 CONCLUSIONS	25
Littérature	28

54	HISTOIRE DE LA TOPOGRAPHIE EN TUNISIE :LES COORDONNEES ORIGINES FUSEAUX	29
54.1	INTRODUCTION	29
54.2	DÉFINITIONS	29
54.3	CALCULS PRÉLIMINAIRES	30
54.3.1	Equation du plan tangent au point (φ_0, λ_0)	30
54.3.2	Equation de la normale en un point voisin de $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$	30
54.3.3	Détermination du point intersection de la normale et du plan tangent P	30
54.3.4	Développement du paramètre t au voisinage de $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$	31
54.3.5	Expression du vecteur M_0M' dans le plan tangent P	32
54.4	ETABLISSEMENT DES COORDONNÉES ORIGINES FUSEAUX	32
54.4.1	Calcul de l'abscisse x	32
54.4.2	Calcul de l'ordonnée y	33
54.4.3	Calcul de l'ordonnée Origines Fuseaux	33
54.4.4	Calcul de l'abscisse Origines Fuseaux	34
54.5	APPLICATIONS	36
54.5.1	Calcul Direct	36
54.5.2	Calcul Inverse	36
54.6	ANNEXE : EXPRESSIONS DE (DX, DY, DZ) EN FONCTION DE $d\varphi, d\lambda$	37
55	CALCUL DES SOIRÉES DE HAUTEURS EGALES PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS	39
55.1	Relation différentielle fondamentale	39
55.2	Relations d'observations en moindres carrés	41
55.3	Résolution directe par les Moindres Carrés	42
55.4	Résolution Matricielle	43
55.5	Calculs des écarts-types	44
55.5.1	Ecart-types de chaque soirée	44
55.5.2	Ecart-types de l'ensemble des soirées	45
	Littérature	46

Partie II ELÉMENTS DE MÉCANIQUE CÉLESTE :SUR LE MOUVEMENT DE N CORPS

56	LE MOUVEMENT DE n CORPS	49
	56.1 Le Problème de n corps	49
	56.2 Les Intégrales Premières des équations du mouvement	50
	Littérature	53
57	NOTIONS SUR LE MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL DE LA TERRE	55
	57.1 LE CHAMP DE PESANTEUR	55
	57.1.1 Le Champ du Potentiel	55
	57.1.2 Gradient	56
	57.1.3 Le Champ Réel ou Champ du Potentiel de la Pesanteur	57
	57.2 LES EQUATIONS DU MOUVEMENT	59
	57.2.1 Introduction	59
	57.2.2 La 2ème Loi de Kepler	60
	57.2.3 La 1ère loi de Kepler	61
	57.2.4 La 3ème Loi de Kepler	63
	57.3 ELÉMENTS DE L'ORBITE	64
	57.3.1 Les Coordonnées	65
	57.4 LES PERTURBATIONS DES ORBITES	69
58	LE MOUVEMENT DE 2 CORPS	71
	58.1 Le problème de deux corps	71
59	LES EQUATIONS DU MOUVEMENT DE 3 CORPS	75
	59.1 EQUATIONS DU MOUVEMENT	75
	59.1.1 Les équations du mouvement du point P_0	77
	59.1.2 Les équations du mouvement du point P_1	80
	59.1.3 Les équations du mouvement du point P_2	81
	59.2 LE MOUVEMENT RESTREINT DE DEUX CORPS	83
	Littérature	87

Partie I

ELÉMENTS DE GÉODÉSIE ET D'ASTRONOMIE

LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ET LES ESTIMATEURS ROBUSTES

Ce mémoire d'analyse numérique concerne la traduction de l'article "The Least Squares and the Robust Estimators" d'Alain Morineau (1984).

Ce mémoire a été rédigé par l'auteur durant la deuxième année (1985-1986) à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques de l'Institut Géographique National Français pour l'obtention du diplôme d'ingénieur Géographe Civil.

En plus de la traduction, l'auteur en a fait quelques développements des formules présentées et a présenté quelques critiques.

53.1 INTRODUCTION

Lors de l'utilisation de la méthode des moindres carrés dans les calculs de compensation, des observations erronées (dus aux mesures ou à la saisie des données) peuvent ne pas être détectées. Par suite, les résultats obtenus seront falsifiés.

On présente dans ce rapport des études sur d'autres méthodes de compensation qui permettent de localiser et détecter les grosses erreurs dans les observations. On introduit la notion d'estimateurs robustes.

53.2 ETUDE DE TORBEN KRARUP (INSTITUT DE GÉODÉSIE DU DANMARK)

53.2.1 La Méthode des moindres carrés

Elle minimise la somme des carrés des résidus :

$$\min \sum_i v_i^2 \quad (53.1)$$

Des résultats compensés et des résidus v , il est souvent difficile de détecter et de localiser les grosses erreurs. Les observations erronées ne sont pas celles qui ont des grands résidus. L'auteur présente un exemple numérique de calcul de l'orientation relative. Une grosse erreur de $40 \mu m$ est introduite dans une coordonnée d'un cliché, le résidu correspondant avec la méthode des moindres carrés est de $-5.6 \mu m$, alors qu'on trouve un résidu de $7.3 \mu m$ pour une coordonnée d'un autre cliché (tableau 1-2).

En photogrammétrie, les erreurs systématiques inconnues, par exemple la distorsion du film, ont posé un problème à la méthode des moindres carrés.

En l'appliquant aux mesures avec des erreurs systématiques, le résultat distribue approximativement les résidus de manière aléatoire.

* Pour le système $\sigma^{-1}AX = \sigma^{-1}l - \sigma^{-1}e$ avec $e \in N(0, \sigma)$, on a $v = (A(\sigma^{-1}A)^{-1}\sigma^{-1} - I)e$ *

En calcul pratique, des hypothèses sur les erreurs systématiques sont introduites dans la compensation et des résultats on juge la validité des hypothèses. Cependant, l'évaluation est souvent difficile due à la correction des paramètres de l'estimation des erreurs systématiques et aussi à la forte corrélation aux autres inconnues de la compensation.

53.2.2 Minimum de la Somme des Valeurs Absolues des Résidus

Une autre alternative à la méthode des moindres carrés est la méthode du minimum des valeurs absolues des résidus proposée par Edgeworth(1887) :

$$\min \sum_i |v_i| \quad (53.2)$$

La méthode présentait des difficultés lors de l'application numérique. Avec le développement des algorithmes (les simplexes), la solution demande un temps de calcul équivalent à celui avec la méthode des moindres carrés.

Dans la plupart des cas, les résidus donnent des indications sur les observations erronées. Seulement en présence de plusieurs et défavorables grosses erreurs, la méthode devait mener à des fausses conclusions. Un autre exemple numérique est donné au tableau 3.

La méthode définie par (53.2) peut être considérée comme un problème de recherche des poids de la solution des moindres carrés.

En effet, si on cherche des poids p_i en fonction des résidus v_i du type :

$$p_i = \frac{1}{|v_i| + \varepsilon} \quad \text{où } \varepsilon \ll |v_i| \quad (53.3)$$

$$\text{avec } \min \sum_i p_i v_i^2 \quad (53.4)$$

La solution de (53.2) est la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de (53.4). On résout (53.4) avec $p_i = 1$, puis on calcule $p_i^{(1)}$ par :

$$p_i^{(1)} = \frac{1}{|v_i^{(1)}| + \varepsilon}$$

où $v_i^{(1)}$ sont les résidus obtenus de (53.1) et on résout :

$$\min \sum_i p_i^{(1)} v_i^2 \quad (53.5)$$

On démontre que la solution de (53.5) converge vers celle de (53.2) sous des conditions peu rigoureuses quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cas d'une seule inconnue

soit le système :

$$I.X = l - e \quad (53.6)$$

avec $l^T = (l_1, l_2, \dots, l_n)$. La solution des moindres carrés de (53.6) est :

$$\bar{X} = \frac{\sum_i l_i}{n}$$

D'où $v_i^{(1)} = \bar{X} - l_i$ et soit $p_i = \frac{1}{|v_i^{(1)}| + \varepsilon}$.

La solution de $\min \sum_i p_i^{(1)} v_i^2$ est :

$$\tilde{X}_\varepsilon = \frac{\sum_i p_i l_i}{\sum_i p_i} \quad (53.7)$$

Appelons \hat{X} la solution de $\min \sum_i |v_i|$ et étudions $|\tilde{X} - \hat{X}|$, où

$$\tilde{X} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \frac{l_i}{(|v_i^{(1)}| + \varepsilon)}}{\sum_i \frac{1}{(|v_i^{(1)}| + \varepsilon)}} = \frac{\sum_i \frac{l_i}{|v_i^{(1)}|}}{\sum_i \frac{1}{|v_i^{(1)}|}}$$

Appelons $|v_m^{(1)}| = \min |v_i^{(1)}|$ et $|v_M^{(1)}| = \max |v_i^{(1)}|$, on a donc :

$$|\tilde{X} - \hat{X}| = \left| \frac{\sum_i \frac{l_i}{|v_i^{(1)}|}}{\sum_i \frac{1}{|v_i^{(1)}|}} - \hat{X} \right| = \left| \frac{\sum_i \frac{l_i - \hat{X}}{|v_i^{(1)}|}}{\sum_i \frac{1}{|v_i^{(1)}|}} \right| \leq \frac{\sum_i \frac{|l_i - \hat{X}|}{|v_i^{(1)}|}}{\sum_i \frac{1}{|v_i^{(1)}|}}$$

or $\frac{1}{|v_M^{(1)}|} \leq \frac{1}{|v_i^{(1)}|} \leq \frac{1}{|v_m^{(1)}|}$ et $\frac{n}{|v_M^{(1)}|} \leq \sum_i \frac{1}{|v_i^{(1)}|} \leq \frac{n}{|v_m^{(1)}|}$ d'où :

$$|\tilde{X} - \hat{X}| \leq \frac{|v_M^{(1)}|}{n|v_m^{(1)}|} \sum_i |l_i - \hat{X}|$$

Si $|v_m^1|$ et $|v_M^1|$ sont tels que $\frac{|v_M^1|}{n|v_m^1|} \leq 1$ on a $|\tilde{X} - \hat{X}| \leq \sum_i |l_i - \hat{X}|$, or d'après la définition de $|\hat{X}|$, on a $\sum_i |l_i - \hat{X}|$ est minimum, par suite $|\tilde{X} - \hat{X}|$ est minimum pour $X = \hat{X}$ d'où la convergence de la solution \tilde{X} vers \hat{X} .

53.3 LES ESTIMATEURS ROBUSTES

Autres méthodes sont les estimateurs robustes introduits par Kendall(1948). Un estimateur robuste est un estimateur qui est relativement non sensible aux petites variations de la loi de distribution des observables en présence de grosses erreurs et erreurs systématiques.

L'estimateur robuste est déterminé à partir d'une fonction $\varphi(v)$ des résidus par :

$$\min \sum_i \varphi(v_i) \tag{53.8}$$

On présente deux méthodes les plus connues des estimateurs robustes.

53.3.0.1 L'estimateur robuste de Huber

La fonction $\varphi(u)$ de Huber est définie par :

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} v_i^2 & \text{si } |v_i| \leq 2\sigma \\ 2\sigma(2|v_i| - 2\sigma) & \text{si } |v_i| > 2\sigma \end{cases} \tag{53.9}$$

σ étant l'écart-type des mesures.

On peut transformer (53.8) en équation (53.4) avec :

$$p(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } |v_i| \leq 2\sigma \\ \frac{4\sigma}{|v_i| + \sigma} & \text{si } |v_i| > 2\sigma \end{cases} \quad (53.10)$$

La solution de (53.8) se fait par itération, en utilisant comme première solution celle des moindres carrés.

53.3.0.2 L'Estimateur Robuste de Hampel

La fonction $\varphi(u)$ utilisée par Hampel a pour dérivée :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = \text{signe}(v_i) \times \begin{cases} |v_i| & \text{si } 0 \leq |v_i| < a \\ a & \text{si } a \leq |v_i| < b \\ \frac{c-|v_i|}{c-b} a & \text{si } b \leq |v_i| < c \\ 0 & \text{si } |v_i| \geq c \end{cases} \quad (53.11)$$

où a, b et c sont des constantes positives.

Dans les deux cas, le principe de compensation dépend de la grandeur des résidus v .

Un autre estimateur robuste est déterminé par :

$$\min \sum_i |v_i|^p \text{ avec } 1 \leq p < 2 \quad (53.12)$$

Le cas le plus favorable est pour $1.2 \leq p \leq 1.5$.

L'expérience a montré que l'utilisation des estimateurs robustes est plus puissante que les moindres carrés pour détecter et localiser les grosses erreurs. Un exemple numérique est donné en annexe utilisant l'estimateur robuste défini par (53.12). Cependant dans cet exemple particulier, les résultats sont inférieurs que ceux du minimum de la somme des valeurs absolues des résidus (Tableau 4).

53.3.1 La Méthode Danoise

Cette méthode était développée pour chercher les erreurs dans la compensation de grands réseaux géodésiques à partir des idées de Krarup (1967). Le point de départ de la méthode est

la compensation classique des moindres carrés. Des résidus de la première compensation, on calcule de nouveaux poids des équations d'observations par la fonction des poids :

$$p(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } |v_i| \leq 2\sigma \\ ke^{-cv_i^2} & \text{si } |v_i| > 2\sigma \end{cases} \quad (53.13)$$

où σ étant l'écart-type des mesures, k, c des constantes positives.

Avec les nouveaux poids, une nouvelle compensation par moindres carrés est calculée et le processus est répété jusqu'à la convergence. Usuellement c'est après 5 à 10 itérations. La méthode danoise a donné des résultats efficaces dans la détection des grosses erreurs. Dans la même application numérique, l'erreur est détectée après six itérations (Tableau 5).

La méthode danoise peut être interprétée par la recherche du plus grand nombre d'observations qui sont mutuellement compatibles (les résidus correspondants sont $< 2\sigma$) et les utiliser par la méthode des moindres carrés pour chercher les inconnues X . Ce-ci s'écrit :

Trouver le nombre de v_k maximum $\subset [v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_n] / |v_k| < 2\sigma$ et tel que :

$$\sum_{k \in J} v_k^2(X) = \min_{\zeta} \left(\sum_{k \in J} v_k^2(\zeta) \right) \text{ où } J \subset [1, n] \quad (53.14)$$

Le problème défini par (53.14) est non linéaire, sa résolution est compliquée. La méthode danoise est une solution itérative au problème (53.14).

Considérons par exemple le problème à une inconnue à déterminer :

$$X = l - e l^T = (l_1, l_2, \dots, l_j, \dots, l_n)$$

La solution des moindres carrés donne $\bar{X}_1 = \frac{\sum_i l_i}{n}$, calculons les $v_i^{(1)} = \bar{X}_1 - l_i$ et soit I l'ensemble d'indices $\subset [1, n]$ tel que $|v_i^{(1)}| < 2\sigma$ pour $\forall i \in I$, la solution de $\min_{\zeta} \left(\sum_{k \in I} v_k^2(\zeta) \right)$ est $\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i \in I} l_i}{\text{Card}(I)}$, il faut vérifier que les $v_i^{(2)} = \bar{X}_2 - l_i$ pour $i \in I$ vérifient $|v_j^{(2)}| < 2\sigma$, s'il est ainsi et si $v_j^{(2)} = \bar{X}_2 - l_j$ pour $\forall j \notin I$ vérifient $|v_j^{(2)}| \geq 2\sigma$ alors $\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i \in I} l_i}{\text{Card}(I)}$ est la solution de (53.14) puisque I est l'intervalle maximum de $[1, n]$ tel que $|v_k| < 2\sigma$ et ayant (53.14).

Supposons maintenant, $\exists j \notin I / |v_j^{(2)}| < 2\sigma$, soit $L = I \cup j$, on considère $\bar{X}_3 = \frac{\sum_{i \in L} l_i}{\text{Card}(L)}$ et si $v_i^{(3)} = \bar{X}_3 - l_i$ vérifiant $|v_j^{(3)}| < 2\sigma \forall i \in L$ et $|v_i^{(3)}| \geq 2\sigma$ pour $i \notin L$ alors \bar{X}_3 est solution de (53.14). Si dans le cas de la solution \bar{X}_2 , $\exists k \in I / |v_k^{(2)}| \geq 2\sigma$ alors \bar{X}_2 n'est plus solution de (53.14) et soit $M = I - \{k\}$, on considère $\bar{X}'_2 = \frac{\sum_{i \in M} l_i}{\text{Card}(M)}$ et on itère le processus.

Pour obtenir de bons résultats en photogrammétrie, l'auteur a utilisé les poids suivants :

- 1ère itération, les moindres carrés avec poids : $p(v_i) = 1$,

- 2ème et 3ème itération, les moindres carrés avec poids $p(v_i) = \left[e^{-\left(\frac{v}{\sigma}\right)^{4.4}} \right]^{0.05}$,
- les autres itérations, les moindres carrés avec poids $p(v_i) = \left[e^{-\left(\frac{v}{\sigma}\right)^{3.0}} \right]^{0.05}$.

53.4 ETUDE D'ALAIN MORINEAU

53.4.1 Introduction

L'auteur présente pourquoi on utilise les estimateurs robustes. Avant de les définir, il présente des tests pour rejeter les observations erronées à partir de la méthode des moindres carrés.

53.4.2 La notion de robustesse

Dans les statistiques classiques, les estimations sont faites et les conclusions tirées à partir de raisonnement sur des modèles supposés être localement légitimes. On adopte souvent le raisonnement suivant : si la procédure utilisée pour le modèle est optimale, alors elle restera, par continuité, presque optimale, si on s'éloigne peu des conditions du modèle. Malheureusement, ces solutions optimales sont souvent instables dans le voisinage du modèle.

On dit qu'une procédure est robuste, sous certaines conditions, si, de petites variations de ces conditions ont un effet minime ou négligeable sur les résultats. Un estimateur robuste reste indifférent à la présence de grosses erreurs et des effets de chaque observation individuelle. En utilisant l'estimation robuste, on peut protéger les résultats contre l'effet des observations erronées.

53.4.3 La Compensation par la Méthode des Moindres Carrés

Considérons le système linéaire :

$${}_n A_{p \cdot p} \dot{X}_1 = {}_n l_1 - {}_n e_1 \quad (53.15)$$

avec $n \geq p$ et $\text{rang} A = p$. Le vecteur e vérifie :

$$E(e) = 0 \text{ et } E(ee^T) = \sigma^2 I \quad (53.16)$$

où σ^2 considérée comme inconnue. On suppose que $e \in N(0, \sigma) \Rightarrow l \in N(A\hat{X}, \sigma^2.I)$. La solution de (53.15) par moindres carrés est :

$$\bar{X} = (A^T A)^{-1} A^T l \quad (53.17)$$

Soit $H = A(A^T A)^{-1} A^T$ (H est symétrique et nilpotente $H^2 = H$), alors :

$$\bar{l} = A\bar{X} = Hl$$

D'où :

$$\sigma_i^2 = H\sigma_i^2 H^T = H\sigma^2 I H^T = \sigma^2 H^2 \text{ et } v = \bar{l} - l = (H - I)l$$

Soit :

$$\sigma_v^2 = \sigma^2 (I - H) \quad (53.18)$$

La somme des carrés des résidus est $SCR = v^T v$ et leur estimateur sans biais de σ^2 est donné par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{n-p} = \frac{v^T v}{n-p} \quad (53.19)$$

En notant a_i le vecteur colonne qui représente la ligne i dans A et h_i l'élément diagonal h_{ii} de H , on montre facilement que :

$$h_i = a_i^T (A^T A)^{-1} a_i \quad (53.20)$$

A l'aide de (53.18) et (53.19), on peut estimer la variance du résidu v_i par l'élément de la diagonale de la matrice (53.18). On estime σ^2 par $\hat{\sigma}^2$ d'où :

$$\hat{\sigma}_{v_i}^2 = \hat{\sigma}^2 (1 - h_i)$$

On définit le résidu normé i par :

$$r_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma} \sqrt{1 - h_i}} = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} \quad (53.21)$$

Appelons A_{-i} la matrice $(n-1) \times p$ obtenue en omettant la ligne i de A et l_{-i} en omettant l_i du vecteur l

$$A_{-i} = \begin{bmatrix} A \\ \text{-----} \end{bmatrix} \quad l_{-i} = \begin{pmatrix} l \\ \text{-----} \end{pmatrix} \quad i$$

Soit \bar{X}_{-i} la solution de (53.15) obtenue avec A_{-i} et l_{-i} , on a :

$$\bar{X}_{-i} = (A_{-i}^T A_{-i})^{-1} A_{-i}^T l_{-i} \quad (53.22)$$

Les composantes \bar{l}_i de \hat{l} peuvent être prédites à l'aide de $a_i^T \hat{X}_i$, le résidu de prédiction est :

$$v_{-i} = a_i^T \hat{X}_i - l_i$$

SCR_{-i} étant la somme des $n-1$ carrés des résidus par (53.22), l'estimation de σ^2 devient :

$$\sigma_{-i}^2 = \frac{SCR_{-i}}{n-p-1}$$

Revenons au système (53.15), la variable $r_i = \frac{a_i^T \bar{X} - l_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_{v_i}^2}} = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}}$ suit la loi de Student à $(n - p)$ degrés de liberté (Voir Ch. I.3.9.4. du Cours).

$v_i = a_i^T \bar{X} - l_i \Rightarrow \sigma_{v_i}^2 = a_i^T \sigma_{\bar{X}}^2 a_i + \sigma_{l_i}^2$ or $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2 (A^T A)^{-1}$ et $\sigma_{l_i}^2$ d'où $\sigma_{v_i}^2 = \sigma^2 (a_i^T (A^T A)^{-1} a_i + 1) = \sigma^2 (1 + h_i) \Rightarrow \sigma_{v_i} = \sigma \sqrt{1 + h_i}$ d'où $\tilde{\sigma}_{v_i} = \tilde{\sigma} \sqrt{1 + h_i}$ (les variables l_i et $a_i^T \bar{X}$ sont indépendantes).

Appliquons le résultat à la compensation sans l'observation i , on définit le résidu de prédiction par :

$$r_{-i} = \frac{v_{-i}}{\hat{\sigma}_{-i} \sqrt{1 + h'_i}} \quad (53.23)$$

avec $h'_i = a_i^T (A_{-i}^T A_{-i})^{-1} a_i$, alors r_{-i} suit la loi de Student avec $(n - p - 1)$ degrés de liberté.

53.4.3.1 L'examen graphique des résidus

L'auteur attire sur l'interprétation des graphiques des résidus. Cependant certains graphiques peuvent aider à révéler des situations anormales.

Soit le vecteur compensé \bar{l} , on a alors la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \bar{l}_i v_i = 0 \quad (53.24)$$

car $\bar{l}^T v = (A \bar{X})^T v = \bar{X}^T A^T v = \bar{X} (A^T v)$ or $A^T v = 0$.

La relation $\sum \bar{l}_k v_k = 0$ permet de vérifier la précision des calculs, surtout quand les coefficients de A ont une forte corrélation. Si on dessinait r_i en fonction des \bar{l}_i on obtiendrait le dessin ci-dessous où les r_i sont disposés horizontalement ($E(r_i) = 0$ et $\sigma_{r_i}^2 = 1$).

Il est intéressant d'examiner les relations entre les vecteurs l et a_i . On définit le vecteur des résidus partiels pour l'indice k par ses composantes :

$$v_i(k) = \sum_{j \neq k} a_{ij} \bar{X}_k - l_i = \sum_{j \neq k} a_{ij} \bar{X}_k + a_{ik} - l_i - a_{ik} \bar{X}_k$$

soit :

$$v_i(k) = v_i - a_{ik} \bar{X}_k \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, p \text{ et } i = 1, 2, \dots, n \quad (53.25)$$

La droite des moindres carrés passant par les points $(v_i(k), a_{ik})$ pour k fixé et $i = 1, 2, \dots, n$ aura pour pente \bar{X}_k . Le graphique obtenu montrera la relation entre les observables l_i et les vecteurs lignes a_i^T de A . La dispersion des points autour de cette droite fournit une idée de la précision de dépendance linéaire entre l et les a_i .

53.4.3.2 Indicateurs de probabilités associés aux résidus

Soit le résidu défini par (53.23) :

$$r_{-i} = \frac{a_i^T \bar{X}_{-i} - l_i}{\hat{\sigma}_{-i} \sqrt{1 + a_i^T (A_{-i}^T A_{-i})^{-1} a_i}}$$

r_{-i} prenant des petites valeurs indique une relation satisfaisante entre l_i et a_i . Par contre r_{-i} prenant des grandes valeurs par rapport aux autres signale la présence de problèmes avec les données. Quand $e \in N(0, \sigma I)$, r_{-i} suit la loi de Student à $n - p - 1$ degrés de liberté. On utilise cette hypothèse pour associer à chaque r_{-i} sa P -probabilité définie par : $Pr\{X > |r_{-i}|\}$ où X est la loi de Student à $n - p - 1$ degrés de liberté. Les petites valeurs de probabilités correspondent aux grandes valeurs de r_{-i} .

L'auteur note que les r_i sont équivalents aux r_{-i} et par suite une seule compensation est suffisante.

En utilisant la relation entre A et A_{-i} :

$$A_{-i}^T A_{-i} = A^T A - a_i a_i^T \quad (53.26)$$

et la relation où u et v sont des vecteurs :

$$(A - uv^T)^{-1} = A^{-1} + \frac{1}{1 - v^T A u} A^{-1} u v^T A^{-1} \quad (53.27)$$

On arrive à l'équation liant \bar{X} et \bar{X}_{-i} :

$$\bar{X}_{-i} = \bar{X} + \frac{v_i}{1 - u} (A^T A)^{-1} a_i \quad (53.28)$$

Cherchons une liaison entre v_{-i} et v_i :

$$v_{-i} = a_i^T \bar{X}_{-i} - l_i = a_i^T \left(\bar{X} + \frac{v_i}{1 - h_i} (A^T A)^{-1} a_i \right) - l_i = v_i + \frac{v_i}{1 - h_i} a_i^T (A^T A)^{-1} a_i = v_i + \frac{v_i h_i}{1 - h_i} = \frac{v_i}{1 - h_i}$$

D'où :

$$v_{-i} = \frac{v_i}{1 - h_i} \quad (53.29)$$

En calculant $SCR_{-i} = (A_{-i} \bar{X}_{-i} - l_{-i})^T (A_{-i} \bar{X}_{-i} - l_{-i})$ et en utilisant (28), on trouve :

$$SCR_{-i} = SCR - \frac{v_i^2}{1 - h_i} \quad (53.30)$$

ou encore en introduisant $\hat{\sigma}^2$ et $\hat{\sigma}_{-i}^2$:

$$(n - p - 1) \hat{\sigma}_{-i}^2 = (n - p) \hat{\sigma}^2 - \frac{v_i^2}{1 - h_i} \quad (53.31)$$

D'où :

$$r_{-i}^2 = \frac{v_{-i}^2}{\hat{\sigma}_{-i}^2(1+h'_i)}$$

or :

$$h'_i = a_i^T (A_{-i}^T A_{-i})^{-1} a_i = a_i (A^T A)^{-1} a_i + \frac{a_i (A^T A)^{-1} a_i a_i^T (A^T A)^{-1} a_i}{1-h_i}$$

Soit :

$$h'_i = h_i + \frac{h_i^2}{1-h_i} = \frac{h_i}{1-h_i}$$

Ce qui donne :

$$r_{-i}^2 = \frac{v_{-i}^2(1-h_i)}{\hat{\sigma}_{-i}^2} = \frac{v_i^2}{\hat{\sigma}_{-i}^2(1-h_i)} = \frac{r_i^2 \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{-i}^2} \quad (53.32)$$

et en tenant compte de (53.21) et (53.31), on a :

$$r_{-i} = \sqrt{n-p-1} \frac{r_i}{\sqrt{n-p-r_i^2}} \quad (53.33)$$

En utilisant (53.30) et (53.21), on obtient :

$$SCR_{-i} = SCR - r_i^2 \hat{\sigma}^2 = SCR \left(1 - \frac{r_i^2}{n-p}\right) \quad (53.34)$$

(53.34) montre que pour les $|r_i|$ grands, il y'a plus de perte pour SCR , les grandes valeurs de $|r_i|$ peuvent constituer un critère pour détecter les grosses erreurs. En écrivant (53.34) sous la forme :

$$\frac{SCR}{SCR_{-i}} = \frac{n-p}{n-p-r_i^2}$$

le critère devient la recherche de $Max \left\{ \frac{SCR}{SCR_{-i}} \right\}_i$.

53.4.3.3 Indicateurs de probabilités associés aux lignes de la matrice A

Le vecteur des observables compensées vérifie $\bar{l} = Hl$ d'où :

$$\bar{l}_j = \sum_{i=1}^n h_{ij} l_i = \sum_{i=1}^n h_{ji} l_i$$

où les h_{ij} sont fonctions de A ($H = A(A^T A)^{-1} A^T$). L'étude des h_{ij} est importante pour voir l'effet d'une erreur sur \bar{l} .

Supposons une grosse erreur Δ dans la composante l_k , alors \bar{l}_j passe à :

$$\bar{l}_j = \sum_{i=1}^n h_{ij} l_i = \sum_{i \neq k}^n h_{ij} l_i + h_{kj} (l_k + \Delta) = \bar{l}_j + h_{kj} \Delta$$

D'où la somme des carrés des variations :

$$\sum_j (\bar{l}'_j - \bar{l}_j)^2 = \sum_j h_{kj}^2 \Delta^2 = \Delta^2 \sum_j h_{kj}^2 = \Delta^2 \sum_j h_{kj} h_{jk} = \Delta^2 h_{kk} = \Delta^2 h_k$$

Donc l'effet global est proportionnel à $h_k = a_k^T (A^T A)^{-1} a_k$ ce qui implique si une ligne a_k s'éloigne de la moyenne des lignes a_i de A alors h_k augmente. Comme H est nilpotente, on a $0 \leq h_i \leq 1$ et $E(\text{Tr}H) = p = nE(h_i)$ d'où $E(h_i) = p/n$. En dehors des valeurs extrêmes 0 et 1 des h_i s'approchent plus ou moins de p/n et ces valeurs peuvent être des indicateurs de la sensibilité de \bar{l} .

Pour étudier la dispersion des h_i , Hoaglin a proposé la variable :

$$f_i = \frac{(n-p)(h_i - \frac{p}{n})}{(p-1)(1-h_i)}$$

f_i suit la loi de Fisher avec $p-1$ et $n-p$ degrés de liberté quand les lignes a_i^T sont des variables aléatoires normaux. On associe à f_i une probabilité notée $P(h_i) = \text{Pr}\{X > f_i\}$. une ligne a_i loin de la moyenne est exprimée pour des faibles valeurs de $P(h_i)$.

53.4.3.4 Un indicateur global de probabilité associé à chaque observation

On peut estimer l'effet global de l'observation i en calculant $\bar{l}_{-i} - \bar{l}_i$ entre les observables compensées sans et avec l'observation i . On utilise plutôt :

$$\delta_i = \frac{\bar{l}_{-i} - \bar{l}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{h_i}} = \frac{a_i^T \bar{X}_{-i} - a_i^T \bar{X}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{h_i}} = \frac{a_i^T (\bar{X}_{-i} - \bar{X}_i)}{\hat{\sigma} \sqrt{h_i}} \quad (53.35)$$

Comme $\sigma_i^2 = \sigma^2 h_i \Rightarrow \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma} \sqrt{h_i}$, en utilisant (53.28), (53.35) s'écrit :

$$\delta_i = \frac{v_i \sqrt{h_i}}{\hat{\sigma} (1-h_i)} \quad (53.36)$$

et en introduisant r_i par (53.21), on a :

$$\delta_i = r_i \sqrt{\frac{h_i}{1-h_i}} \quad (53.37)$$

L'expression (53.37) montre que δ_i varie dans le même sens que r_i et h_i ($\sqrt{\frac{h_i}{1-h_i}}$ est une fonction croissante de h_i). Là aussi, on peut transformer (53.37) en une variable de probabilité, d'où : $\delta_i^2 = \frac{v_i^2 h_i}{\hat{\sigma}^2 (1-h_i)^2} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \frac{v_i}{1-h_i} a_i^T (A^T A)^{-1} a_i \cdot \frac{v_i}{1-h_i} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \left[\frac{v_i}{1-h_i} \cdot a_i^T (A^T A)^{-1} \right] (A^T A) \left[(A^T A)^{-1} a_i \cdot \frac{v_i}{1-h_i} \right]$

et en utilisant (53.28) $\bar{X}_{-i} = \bar{X} + \frac{v_i}{1-h_i}(AA^T)a_i$, on obtient :

$$\delta_i^2 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2}(\bar{X}_{-i} - \bar{X})^T(A^T A)(\bar{X}_{-i} - \bar{X}) = \frac{1}{\hat{\sigma}^2}(\bar{X} - \bar{X}_{-i})^T(A^T A)(\bar{X} - \bar{X}_{-i}) \quad (53.38)$$

(53.38) représente une métrique entre \bar{X} et \bar{X}_{-i} ($(A^T A)$ est définie positive). La formule (53.38) suggère l'interprétation suivante : soit c un vecteur à p lignes, si on voudrait tester l'hypothèse nulle $\bar{X} = c$ cela revient à dire que : $Ac = l - e$.

On utilise plutôt la variable :

$$F = \frac{1}{p\hat{\sigma}^2}(\bar{X} - c)^T(A^T A)(\bar{X} - c)$$

qui sous l'hypothèse nulle suit la loi de Fisher à p et $n - p$ degrés de liberté (F est de la forme $\frac{\sum_{i=1}^p X_i^2}{\sum_{j=1}^{n-p} Y_j^2}$). On associe la P -probabilité $P(\delta_i) = PrZ \succ \frac{\delta_i^2}{p}$. Avec les hypothèses $e \in N(0, \sigma I)$ l'utilisation de $P(\delta_i)$ est impropre car \bar{X} et \bar{X}_{-i} ne sont pas indépendants.

53.4.4 La méthode du minimum de la somme des valeurs absolues

La résolution de (53.15) $A\bar{X} = l - e$ avec la méthode du minimum de la somme des valeurs absolues (ou la norme L_1), c'est la recherche de la résolution de :

$$\text{Min}(X_k) \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^p a_{ik} X_k - l_i \right| \right\} \quad (53.39)$$

La solution est une extension du calcul de la médiane.

Considérons $A = I$, soit $I\bar{X} = l - e$, \bar{X} est une solution de $\min \sum_i |X - l_i| \Rightarrow \sum_i^n \text{signe}(\bar{X} - l_i) = 0$.

Supposons qu'on a ordonné les l_i tels que $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$ alors $\bar{X} = \bar{l}$ avec $\bar{l} = l_{k+1}$ si $n = 2k + 1$ ou $l_k \leq \bar{l} \leq l_{k+1}$ si $n = 2k$, \bar{l} est bien la médiane des l_i .

La méthode du minimum de L_1 est plus robuste car un écart de la solution est exprimé par la valeur absolue du résidu, est mieux sensible qu'avec le carré du résidu. Seulement, le calcul est plus complexe et moins élégant que celui de la méthode des moindres carrés.

53.4.4.1 Algorithme des calculs

On note v_i^+, v_i^- les valeurs positives ou négatives de v_i (l'un des deux est nul).

$$v_i = v_i^+ \quad \text{si } v_i \geq 0 ; \quad v_i = -v_i^- \quad \text{si } v_i \leq 0$$

Le problème (53.39) est exprimé par :

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n (v_i^+ + v_i^-) \right\} \text{ et } v_i^+ - v_i^- = \sum_{k=1}^p a_{ik} X_k - l_i v_i^+ \geq 0, v_i^- \geq 0$$

Pour gagner du temps de calcul, on peut opérer de la manière suivante : on calcule une solution \bar{X}_1 , par la méthode des moindres carrés, en enlevant éventuellement les mauvaises observations, avec les tests cités plus haut, puis on remplace le vecteur l par $-v = l - A\bar{X}_1$ dans (53.40). La solution \bar{X}_2 est ajoutée à \bar{X}_1 pour donner le résultat final.

Avec des observations où il peut y avoir des grosses erreurs, la variance avec la méthode de la norme L_1 serait plus petite que celle des moindres carrés. Si $\hat{\sigma}^2$ est l'estimateur de σ^2 par les moindres carrés et m la médiane des résidus non nuls par L_1 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-p} ; m = \text{médiane} \{v_i'\}_{L_1}$$

et si $m^2 < \hat{\sigma}^2$, on calcule les intervalles de confiance par les procédures classiques en utilisant comme estimateur de σ^2 m^2 . Dans ce cas, la variance de la médiane.

53.4.5 La Regression Robuste : Les M-Estimeurs

53.4.5.1 Introduction aux M-estimateurs de Huber

L'auteur traite ici une méthode introduite par Huber (1964) : une généralisation de la règle Maximum de vraisemblance d'où le nom de M-estimateur. Cette méthode ayant une justification intuitive, un mode de calcul plus facile, son efficacité testée par l'expérience et des propriétés asymptotiques.

Dans le cas d'estimation avec des distributions symétriques, les M-estimateurs sont construits de façon à donner un estimateur précis quand la loi de probabilité est de la forme :

$$F(t) = (1 - \eta)\phi(t) + \eta H(t) \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (53.40)$$

où $\phi(t) = N(m; \sigma)$ et H une loi symétrique par exemple $N(m; \sigma')$ et de forte variance σ' . Toute observation sera retenue avec la probabilité $(1 - \eta)$ et non avec la probabilité η . Ce modèle est utilisé pour l'étude des estimateurs robustes.

Soit f la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire. Alors l'estimateur du maximum de vraisemblance de paramètre θ est obtenu en maximisant la fonction de vraisemblance $L(\theta)$ (Chapitre V. du cours) :

$$\text{Log}L(\theta) = \sum_{i=1}^n \text{Log}f(\theta - l_i) = + \sum_{i=1}^n \rho(\theta - l_i) \quad (53.41)$$

avec $\rho(t) = +\text{Log}f(t)$; la solution est obtenue par :

$$\frac{d\text{Log}L(\theta)}{d\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{f'(\theta - l_i)}{f(\theta - l_i)} = \sum_{i=1}^n \psi(\theta - l_i) = 0 \text{ et } \psi(t) = \rho'(t) \quad (53.42)$$

Le M-estimateur de Huber est défini avec la fonction particulière $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \begin{cases} t^2/2 & \text{si } |t| \leq k \\ k|t| - k^2/2 & \text{si } |t| \geq k \end{cases} \quad (53.43)$$

La fonction ρ est convexe. k est une constante à déterminer. La fonction $\psi = \rho'$ sera :

$$\psi(t) = \begin{cases} -k & \text{si } t \leq -k \\ t & \text{si } -k \leq t \leq k \\ k & \text{si } t \geq k \end{cases} \quad (53.44)$$

(On retrouve la définition donnée dans l'étude de Krarup avec $v_i = \frac{t_i}{\sqrt{2}}$ et $k = 2\sigma\sqrt{2}$).

L'estimateur $\bar{\theta}$ sera donné par :

$$\sum_{i=1}^n \psi(\bar{\theta} - l_i) = 0$$

On cherche plutôt une solution normée, soit la solution de :

$$\sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{\bar{\theta} - l_i}{d}\right) = 0 \quad (53.45)$$

où d est un estimateur robuste convenable pour rendre $\theta - l_i$ normé. d est choisi comme la médiane des écarts absolues par rapport à la médiane :

$$d = \frac{1}{0.6747} \text{médiane}_i \{ |l_i - \text{médiane}_j(l_j)| \}$$

0.6747 est choisi pour assurer la convergence de d vers σ avec un échantillon qui obéit à la loi normale. Dans (53.44) $k = 1.5$ garantit l'efficacité de l'estimateur avec une distribution de la loi normale et d'avoir $\psi(t) = t$ quand les observations vérifient $|t| < 1.5$. La résolution de (53.45) se fait par des procédés itératifs.

53.4.5.2 Application au modèle linéaire $A\check{X} = l - e$

La solution de (53.15) est donnée par :

$$\min_X \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) \quad (53.46)$$

Soit :

$$U(X, d) = \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right)$$

Si on cherche \bar{X} et d , on a les équations suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{d} \rho' \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{d} \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0$$

$$\text{et } \frac{\partial U}{\partial d} = \sum_{i=1}^n -\frac{a_i^T X - l_i}{d^2} \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0$$

Soit :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (53.47)$$

Et :

$$\sum_{i=1}^n a_i^T X \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = \sum_{i=1}^n l_i \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right)$$

qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} X_j \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = \sum_{j=1}^p X_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = \sum_{i=1}^n l_i \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right)$$

Et en tenant compte de (53.47), on a :

$$\sum_{i=1}^n l_i \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0$$

Par suite, \bar{X} et d sont solutions de :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n l_i \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (53.48)$$

ou encore solution de

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0 \quad \sum_{i=1}^n (a_i^T X - l_i) \psi \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) = 0$$

Le système (53.48) est non linéaire en $X_1 - X_p$ et d , mais il est linéaire en X .

Supposons que les observations sont faites de façon à avoir $\left| \frac{a_i^T X - l_i}{d} \right| > k$, l'équation (53.41) devient $\frac{1}{2} \sum_i v_i^2 = \text{Log}L(X)$. On retrouve la méthode des moindres carrés.

Si toutes les observations sont telles que $\left| \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) \right| > k$, les équations (53.48) deviennent :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} k = 0 ; j = 1, 2, \dots, p \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = 0$$

c'est que les vecteurs lignes de A sont dépendants. Et :

$$\sum_{i=1}^n l_i k = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n l_i = 0 \Rightarrow \text{les composantes de } l \text{ sont dépendantes}$$

Dans le cas où il y a des observations telles que pour $i \in N_1$ on a $\left| \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) \right| < k$, et pour $i \in N_2$ on a $\left| \left(\frac{a_i^T X - l_i}{d} \right) \right| \geq k$ où N_1 et N_2 sont deux ensembles d'indices / $N_1 \cup N_2 = (1, n)$. Supposons que les observations sont ordonnées de façon à avoir :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ - & - & - \\ A_2 & & \end{bmatrix} \text{ et } l = \begin{bmatrix} l_1 & & \\ - & - & - \\ l_2 & & \end{bmatrix} \quad N_1 = 1, 2, \dots, n_1; N_2 = n_1 + 1, \dots, n$$

et A_1 est une matrice (n_1, p) et A_2 une matrice $(n - N_1, p)$, l_1 un vecteur $(n_1, 1)$. La fonction à minimiser (53.46) s'écrit :

$$U(X, d) = \frac{1}{d^2} (A_1 X - l_1)^T (A_1 X - l_1) + k \sum_{i \in N_2} \left(\left| \frac{a_i^T X - l_i}{d} \right| - \frac{k}{2} \right)$$

D'où :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{d^2} (A_1^T A_1) X - \frac{A_1^T l_1}{d^2} + \frac{k}{d} \begin{bmatrix} a_{n_1+1} & \dots & a_{n_1} \\ \dots & & \dots \\ a_{n_1+1p} & \dots & a_{n_1p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon(n_1 + 1) \\ \dots \\ \varepsilon(n) \end{bmatrix} = 0$$

où $\varepsilon(j) = \pm 1$ pour $j \in N_2$, on peut écrire :

$$(A_1^T A_1) X + k d A_2^T [E] = A_1^T l_1 \text{ avec } [E] = [\varepsilon(j)] \text{ pour } j \in N_2$$

La deuxième équation de (53.48) donne :

$$\sum_{i \in N_1} l_i \frac{(a_i^T X - l_i)}{d} + \sum_{i \in N_2} \varepsilon(i) l_i k = 0 \text{ ou encore } (A_1^T l_1)^T X + k d l_2^T [E] = l_1^T l_1$$

Finalement, X et d sont donnés par la solution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} A_1^T A_1 & k A_2^T [E] \\ (A_1^T l_1)^T & k l_2^T [E] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T l_1 \\ l_1^T l_1 \end{pmatrix} \quad (53.49)$$

Le système (53.49) montre comment les M -estimateurs diffèrent de la solution des moindres carrés.

La loi des M -estimateurs tend asymptotiquement vers la loi normale. La matrice variance de \bar{X} est approchée par :

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2 = (A^T A)^{-1} \frac{n}{n-p} d^2 \frac{\frac{1}{n} \sum_i \psi^2\left(\frac{v_i}{d}\right)}{\frac{1}{n} \sum_i \psi'^2\left(\frac{v_i}{d}\right)} \quad (53.50)$$

53.4.5.3 L'Algorithme de Huber-Dutter

L'auteur présente l'algorithme de Dutter(1977) qui par calculs itératifs résoud la première équation de (53.48) :

$$\sum_n^{i=1} a_{ij} \psi\left(\frac{a_i^T X - l_i}{d}\right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \text{ ou } A^T \Psi = 0 \quad (53.51)$$

Il présente l'avantage de minimiser les calculs et nécessite seulement une fois l'inversion de la matrice $(A^T A)$.

1. Initiation : $m=0$

Soit $\bar{X}^{(0)}$ et d les estimateurs initiaux de \bar{X} et de σ (on peut prendre ceux de la méthode des moindres carrés ou de la méthode de la norme L_1).

2. Etapes de l'itération

2.1.

On calcule $v_i^{(m+1)} = a_i^T \bar{X}^{(m)} - l_i$.

2.2.

Calcul de la variance : on a adopté la formule :

$$d_{(m+1)}^2 = \frac{d_{(m)}^2}{n-p} \frac{\sum_{i=1}^n \psi^2\left(\frac{v_i^{(m+1)}}{d_{(m)}}\right)}{\langle \psi^2 \rangle}$$

où $\langle \psi^2 \rangle$ est la moyenne de ψ^2 . Pour $\langle \psi^2 \rangle$, on a pris :

$$E(\psi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{+k} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Si $k = 1.5$ alors $E(\psi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.5}^{+1.5} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0.7785$, donc

$$d_{(m+1)}^2 = \frac{d_{(m)}^2}{(n-p)E(\psi^2)} \sum_{i=1}^n \psi^2\left(\frac{v_i^{(m+1)}}{d_{(m)}}\right)$$

2.3.

Calcul du vecteur Ψ :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \frac{\Delta^{(m)}}{d_{(m+1)}} \Rightarrow \Delta^{(m)} = d_{(m+1)} \Psi$$

Soit :

$$\Delta_i^{(m)} = d_{(m+1)} \psi_i^{(m+1)} = \begin{cases} -kd_{(m+1)} & \text{si } \frac{v_i^{(m+1)}}{d_{(m+1)}} < -k \\ v_i^{(m+1)} & \text{si } \left| \frac{v_i^{(m+1)}}{d_{(m+1)}} \right| \leq k \\ kd_{(m+1)} & \text{si } \frac{v_i^{(m+1)}}{d_{(m+1)}} > k \end{cases}$$

2.4.

Vecteur correction $\delta^{(m)}$. D'après (53.51), on obtient la solution quand $A^T \Psi = 0$, le vecteur $\delta^{(m)} = (A^T A)^{-1} A^T \Delta^{(m)}$ représente l'effet de $\Delta^{(m)}$ ou encore $\Delta^{(m)}$ représente la variation du vecteur observable quand on s'approche de la solution, soit le système $A\bar{X} = l - e$ et $\bar{X}_{(m)}/\bar{X} = \bar{X}_{(m)} + \partial\bar{X} \Rightarrow A\bar{X}_{(m)} + A\partial\bar{X} = l - e \Rightarrow A\partial\bar{X} = (l - A\bar{X}_{(m)}) - e = l' - e$

2.5.

$\bar{X}^{(m+1)} = \bar{X}_{(m)} + q\delta^{(m)}$ avec q un coefficient de poids pour la correction de $\delta^{(m)}$; $q = \min \left\{ 1, q, \frac{1}{\Phi(k) - \Phi(-k)} \right\}$
où $\Phi(k) = \int_{-\infty}^k \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi}} du$

Fin de l'itération

3.1.

Si η est le facteur de tolérance pour assurer la précision voulue : si on a $\frac{|d_{(m+1)} - d_{(m)}|}{d_{(m+1)}} < \eta$

3.2.

$|q\delta_i^{(m)}| < \eta d_{(m+1)} \sqrt{a_{ii}}$ avec a_{ii} terme de la diagonale de $(A^T A)^{-1}$. Remarque :

La fin de l'itération peut aussi être la vérification de l'équation (53.51) par le vecteur $d_{(m+1)} \cdot \Delta^{(m)}$ soit : $d_{(m+1)} \cdot A^T \Delta^{(m)} = 0$ et en multipliant par $(A^T A)^{-1}$ régulière : $(A^T A)^{-1} d_{(m+1)} \cdot A^T \Delta^{(m)} = H$ où $\|H\| = n\eta^2$ d'où $d_{(m+1)} \cdot (A^T A)^{-1} A^T \Delta^{(m)} = H$ soit $\delta^{(m)} = d_{(m+1)} \cdot (A^T A)^{-1} A^T \Delta^{(m)} = H \Rightarrow |\delta_i^{(m)}| < \eta$.

53.4.5.4 Le rôle de la méthode du minimum de la somme des valeurs absolues des résidus (ou de la norme L_1)

La méthode de la norme L_1 semble jouer un rôle central dans la théorie des estimateurs robustes. On la trouve dans les M -estimateurs avec $\rho(t) = |t|$.

En plus Ley(1969) a démontré que la méthode est liée à une procédure de robustesse appelée : les R -estimateurs, la procédure peut être définie comme suit : soient v_i les résidus associés à une compensation et ordonnons les résidus par ordre de croissance par exemple, le rang r_i du résidu v_i dépend de la solution \bar{X} . Au lieu de chercher à minimiser $\sum_i v_i^2$ on résoud le problème suivant :

$$\text{Min}_{(X)} \sum_i v_i c(r_i) \text{ où les } c(1), c(2), \dots, c(n) \text{ sont des coefficients vérifiant}$$

$$c(1) \leq c(2) \leq \dots \leq c(r) \text{ et } c(1) + c(2) + \dots + c(n) = 0 \quad (53.52)$$

Pour la méthode de la médiane ou la norme L_1 , on a :

$$c(i) = -1 \text{ pour } i > \frac{n+1}{2}; c(i) = +1 \text{ pour } i < \frac{n+1}{2}$$

Donc les $c(i) = \text{signe}(v_i)$.

Si $U(X) = \sum_i v_i c(r_i) = \sum_i (a_i^T X - l_i) c(r_i) \Rightarrow \min U$ donne le système :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} c(r_i) = 0 & j = 1, 2, \dots, p \\ c(1) \leq c(2) \leq \dots \leq c(r) \\ c(1) + c(2) + \dots + c(n) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système est en général compliquée.

53.5 CONCLUSIONS

D'après Krarup, la méthode des estimateurs robustes est plus efficace que celle des moindres carrés. Cependant il faut prendre des précautions dans l'analyse des résultats avec les estimateurs robustes et en pratique il est souhaitable d'utiliser à la fois la méthode des moindres carrés et une méthode des estimateurs robustes, une différence des résultats indique la présence de grosses erreurs.

Dans la méthode des estimateurs il y aussi le risque de rejeter plusieurs observations. Le problème des équations d'observations non homogènes n'a pas été, par exemple dans une compensation avec des mesures d'angles et de distances, comment faut-il choisir 2σ , dans l'exemple de Huber(II.3.1) et k dans celui de Morineau (III.5.1). On n'a pas étudié statistiquement le nombre des observations dans une compensation donnée telles que $|v_i| < 2\sigma$ et $|v_i| > 2\sigma$ et de les comparer avec ceux de la méthode des moindres carrés. De point de vue calcul, on n'a pas mentionné le nombre d'itérations pour résoudre $AX = l - e$ avec l'estimateur de Huber (II.3.1) ni avec l'algorithme de Huber-Dutter(III.5.3).

Je reviens à l'estimateur robuste de Huber (II.3.1. et III.5.1), ça revient à :

$$\text{Min} \sum_i \varphi(v_i) \quad (53.53)$$

$$\text{avec } \varphi(v_i) = \begin{cases} v_i^2 & \text{si } |v_i| \leq 2\sigma \\ 2\sigma(2|v_i| - 2\sigma) & \text{si } |v_i| > 2\sigma \end{cases} \quad (53.54)$$

On peut écrire $2\sigma(2|v_i| - 2\sigma)$ sous la forme :

$$2\sigma(2|v_i| - 2\sigma) = v_i^2 \frac{4\sigma}{\frac{v_i^2}{|v_i|\sigma}} = v_i^2 \frac{4\sigma}{|v_i|(1 - \frac{\sigma}{|v_i|})^{-1}}$$

Comme $|v_i| > 2\sigma \Rightarrow \sigma < \frac{|v_i|}{2} \Rightarrow \sigma < |v_i| \Rightarrow \frac{\sigma}{|v_i|} < 1$ alors :

$$v_i^2 \frac{4\sigma}{|v_i|(1 - \frac{\sigma}{|v_i|})^{-1}} \leq v_i^2 \frac{4\sigma}{|v_i| + \sigma}$$

Par suite, en sommant $i = 1$ à n , on a :

$$\sum_i \varphi_i(v_i) \leq \sum_i p(v_i) v_i^2 \text{ avec } p(v_i) = \begin{cases} = 1 & \text{si } |v_i| \leq 2\sigma \\ = \frac{4\sigma}{|v_i| + \sigma} & \text{si } |v_i| \geq 2\sigma \end{cases}$$

En passant au minimum, on a :

$$\text{Min}_X \sum_i \varphi_i(v_i) \leq \text{Min}_X \sum_i p(v_i) v_i^2 \quad (53.55)$$

La robustesse de l'estimateur de Huber par rapport à celle des moindres carrés est représentée par l'équation (53.53). Si on suppose que pour les $v_i/|v_i| \geq 2\sigma$ on a $|v_i| \geq 3\sigma$ alors, on a :

$$\text{Min} \sum_i \varphi_i(v_i) \leq \text{Min} \sum_i p(v_i)v_i^2 \leq \text{Min} \sum_i v_i^2$$

La solution par l'estimateur robuste de la méthode danoise (II.4) vérifie :

$$\text{Min} \sum_i p v_i^2 \text{ avec } p(v_i) \begin{cases} = 1 \text{ si } |v_i| \leq 2\sigma \\ = k e^{-c v_i^2} \text{ si } |v_i| > 2\sigma \end{cases}$$

On a donc $\sum_i p v_i^2 \leq \sum_i v_i^2$ car $p(v_i) \leq 1$ si $k \leq 1$. En passant au minimum, on a :

$$\text{Min} \sum_i p(v_i)v_i^2 \leq \text{Min} \sum_i v_i^2$$

Là aussi on voit pourquoi la méthode danoise est plus efficace que celle des moindres carrés.

Avant de présenter les M -estimateurs, Morineau a présenté les 3 tests cités dans le tableau ci-dessous :

Indicateur utilisé	Statistique utilisée	Loi de probabilité	Diagnostic pour une faible probabilité
$III.3.3$ $h_i = a_i^T (A^T A)^{-1} a_i$	$\frac{n-p}{p-1} \frac{h_i-1/n}{1-h_i}$	Fisher $d.l = (p-1, n-p)$	Si la ligne a_i est loin de la moyenne, \bar{X} est sensible à l_i
$III.3.2$ $r_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma} \sqrt{1-h_i}}$	$r_i \frac{n-p-1}{\sqrt{n-p-r_i^2}}$	Student $d.l = n-p-1$	Différence entre l_i l'_i observé et calculé $= a_i^T \bar{X}_{-i}$
$III.3.4$ $\delta_i^2 = \frac{h_i r_i^2}{1-h_i}$	$\frac{\delta_i^2}{p}$	Fisher $d.l = (p, n-p)$	résultats obtenus avec combinaison des 2 facteurs ci-dessus

Tableau 53.1 Tableau des Tests

Ces tests peuvent être utiles avant une compensation avec un estimateur robuste, cependant il faut les manipuler avec attention car une faute détectée peut cacher une autre.

Le développement des algorithmes (les simplexes) permet l'utilisation de la méthode de $\min \sum_i |v_i|$ dans les compensations. Dans l'estimateur de Huber il peut être considéré comme solution appartenant à l'intersection des solutions par moindres carrés sur un ensemble V_1 de résidus et avec les solutions de $\min \sum_i |v_i|$ d'un autre ensemble $V_2 / \text{Card}(V_1 \cup V_2) = n$. En effet, on a :

$$\min \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) = \min \left(\sum_{v_i \in V_1} \varphi(v_i) + \sum_{v_i \in V_2} \varphi(v_i) \right) \leq \min \sum_{v_i \in V_1} v_i^2 + \min \sum_{v_i \in V_2} |v_i| 4\sigma$$

Le terme constant est omis.

On remarque aussi l'analogie de la résolution de l'équation (53.51) avec celle de (53.52), dans (53.52) on cherche donc des coefficients $c(r_i)$ vérifiant $A^T C = 0$ si $C^T = (c(1), \dots, c(n))$ en plus des 2 autres conditions.

Autre chose qu'on ne trouve pas dans Morineau, quand on considère dans (53.46) d comme inconnue on arrive aux équations (53.48) dont :

$$\sum_i l_i \psi\left(\frac{a_i^T X_i - l_i}{d}\right) = 0 \implies l^T \Psi = 0$$

c'est-à-dire que le vecteur $\Psi \in \mathbb{R}^n$ à l'espace orthogonal des observables.

La relation dans l'estimateur robuste de Huber est plus forte que celle des moindres carrés.

Je termine par dire que dans la méthode des M -estimateurs, il faut fixer à l'avance le critère pour choisir les résidus, par exemple dans l'estimateur de Huber, on a fixé $k = 1.5$. Si le nombre des résidus tels que $|v_i| > k$ est très petit, on tombe dans la méthode des moindres carrés en éliminant les observations telles que $|v_i| > k$.

Reste une question : est-ce que la méthode des estimateurs robustes éliminera-t-elle toutes les erreurs dans une compensation ?

Littérature

1. P. Hottier. Cours d'analyse numérique. ENSG. IGN. 1984.

CHAPITRE 54

HISTOIRE DE LA TOPOGRAPHIE EN TUNISIE :LES COORDONNEES ORIGINES FUSEAUX

54.1 INTRODUCTION

Parmi les coordonnées qui étaient souvent utilisées lors des travaux topographiques au Service Topographique Tunisien, avant la création de l'Office de la Topographie et de la Cartographie, figurent les coordonnées dites Origines Fuseaux. L'objet de cette communication est d'établir les formules rigoureuses de ces coordonnées et de donner les coefficients connus P,Q et R de ces coordonnées.

54.2 DÉFINITIONS

La Tunisie est partagée en six fuseaux, d'une étendue chacun de $0,5 gr$ en longitude, subdivisés chacun en onze quadrilatères curvilignes de $0,5 gr$ de côté en latitude, soit un ensemble de soixante six systèmes de coordonnées.

Chacun système de coordonnées est défini par la donnée des coordonnées géographiques (φ_0, λ_0) du centre du quadrilatère généralement par rapport à l'origine Voirol. Les coordonnées rectangulaires sont obtenues en assimilant le quadrilatère curviligne de l'ellipsoïde (Clarke Français 1880) au plan tangent à l'ellipsoïde au point (φ_0, λ_0) .

54.3 CALCULS PRÉLIMINAIRES

54.3.1 Equation du plan tangent au point (φ_0, λ_0)

Soit le point $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$ et P le plan tangent. La direction de la normale au point M_0 est donnée par le vecteur n dans le repère $(OXYZ)$ à savoir :

$$n = \begin{vmatrix} \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ \sin\varphi_0 \end{vmatrix} \quad (54.1)$$

Un point $M(X, Y, Z)$ appartient au plan tangent P est tel que :

$$M_0M \cdot n = 0 \quad (54.2)$$

Soit :

$$(X - X_0)\cos\varphi_0\cos\lambda_0 + (Y - Y_0)\cos\varphi_0\sin\lambda_0 + (Z - Z_0)\sin\varphi_0 = 0 \quad (54.3)$$

avec :

$$M_0M = \begin{vmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{vmatrix} \quad (54.4)$$

54.3.2 Equation de la normale en un point voisin de $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$

Soit $M(\varphi, \lambda)$ un point de l'ellipsoïde au voisinage de $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$. La droite passant par M et normale au plan P a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} X_1 = X + t\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ Y_1 = Y + t\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ Z_1 = Z + t\sin\varphi_0 \end{cases} \quad (54.5)$$

54.3.3 Détermination du point intersection de la normale et du plan tangent P

L'intersection de la droite définie par (54.5) et du plan tangent P donné par (54.3) donne le point M' en déterminant le paramètre t tel que :

$$(X_1 - X_0)\cos\varphi_0\cos\lambda_0 + (Y_1 - Y_0)\cos\varphi_0\sin\lambda_0 + (Z_1 - Z_0)\sin\varphi_0 = 0 \quad (54.6)$$

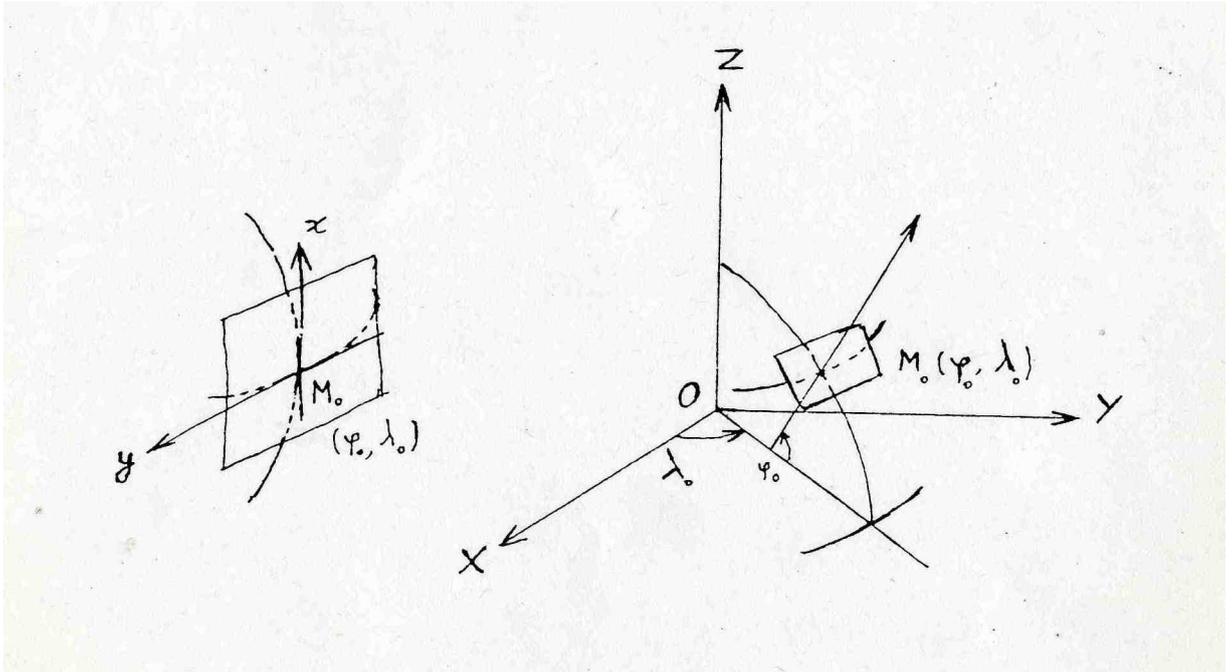


Fig. 54.1 La représentation Fuseau

soit :

$$t = -(X - X_0)\cos\varphi_0\cos\lambda_0 - (Y - Y_0)\cos\varphi_0\sin\lambda_0 - (Z - Z_0)\sin\varphi_0 \quad (54.7)$$

Le vecteur OM' a pour composantes :

$$OM' \begin{cases} X' = X + t\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ Y' = Y + t\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ Z' = Z + t\sin\varphi_0 \end{cases} \quad (54.8)$$

avec t donnée par (54.7).

54.3.4 Développement du paramètre t au voisinage de $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$

D'après l'équation (54.7), t est fonction de $X - X_0$, $Y - Y_0$ et $Z - Z_0$ On pose :

$$d\varphi = \varphi - \varphi_0 \quad (54.9)$$

$$d\lambda = \lambda - \lambda_0 \quad (54.10)$$

On peut écrire à l'ordre 2 :

$$X' - X_0 = \left(\frac{\partial X'}{\partial \varphi} \right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial X'}{\partial \lambda} \right)_0 d\lambda + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 X'}{\partial \varphi^2} \right)_0 d\varphi^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 X'}{\partial \varphi \partial \lambda} \right)_0 d\varphi d\lambda + \left(\frac{\partial^2 X'}{\partial \lambda^2} \right)_0 d\lambda^2 \right] \quad (54.11)$$

Mêmes expressions pour $Y - Y_0$ et $Z - Z_0$ en changeant respectivement X par Y et X par Z . Le calcul donne :

$$t = \frac{1}{2} \cdot \rho(\varphi_0) d\varphi^2 + \frac{r_0}{2} \cdot \cos \varphi_0 d\lambda^2 \quad (54.12)$$

avec :

$$\rho(\varphi_0) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} \quad (54.13)$$

$$r_0 = N_0 \cos \varphi_0 = a \cos \varphi_0 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{-\frac{1}{2}} \quad (54.14)$$

54.3.5 Expression du vecteur M_0M' dans le plan tangent P

Soient U et V les vecteurs unitaires dans le plan P , formant une base telle que U est porté par la tangente au méridien $\lambda = \lambda_0$ au point M_0 et dirigé vers le Nord et V porté par la tangente au parallèle $\varphi = \varphi_0$ au même point M_0 et dirigé vers l'Ouest, on a alors :

$$M_0M' = x.U + y.V \quad (54.15)$$

x et y représentent les coordonnées rectangulaires Origines Fuseaux.

Exprimons les vecteurs M_0M' , U et V dans le système (O, X, Y, Z) , on obtient :

$$U = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_0 \\ -\sin \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ \cos \varphi_0 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} \sin \lambda_0 \\ -\cos \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad M_0M' = \begin{pmatrix} X - X_0 + t \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ Y - Y_0 + t \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ Z - Z_0 + t \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (54.16)$$

54.4 ÉTABLISSEMENT DES COORDONNÉES ORIGINES FUSEAUX

54.4.1 Calcul de l'abscisse x

x est donnée par :

$$x = U.M_0M' \quad (54.17)$$

soit :

$$\begin{aligned}
x &= -\sin\varphi_0\cos\lambda_0(X - X_0 + t\cos\varphi_0\cos\lambda_0) \\
&\quad -\sin\varphi_0\sin\lambda_0(Y - Y_0 + t\cos\varphi_0\sin\lambda_0) + \cos\varphi_0(Z - Z_0 + t.\sin\varphi_0)
\end{aligned} \tag{54.18}$$

par suite :

$$x = \rho(\varphi_0)d\varphi + \frac{r_0}{2}.\sin\varphi_0d\lambda^2 + \frac{\rho'(\varphi_0)}{2}d\varphi^2 \tag{54.19}$$

où $\rho'(\varphi_0)$ est la valeur de la dérivée de $\rho(\varphi)$ pour $\varphi = \varphi_0$.

54.4.2 Calcul de l'ordonnée y

De même y est donnée par $V.M_0M'$, soit :

$$y = \sin\lambda_0(X - X_0 + t\cos\varphi_0\cos\lambda_0) - \cos\lambda_0(Y - Y_0 + t\cos\varphi_0\sin\lambda_0)$$

ou encore :

$$y = (X - X_0).\sin\lambda_0 - (Y - Y_0).\cos\lambda_0 \tag{54.20}$$

En utilisant les expressions de (54.11), on arrive à :

$$y = -r_0d\lambda + \rho(\varphi_0)\sin\varphi_0d\varphi d\lambda$$

soit :

$$y = -N_0\cos\varphi_0d\lambda + \rho(\varphi_0)\sin\varphi_0d\varphi d\lambda \tag{54.21}$$

54.4.3 Calcul de l'ordonnée Origines Fuseaux

Comme :

$$\cos\varphi_0 = \cos\varphi - (\varphi_0 - \varphi)\sin\varphi - \frac{(\varphi_0 - \varphi)^2}{2}\cos\varphi + \dots \tag{54.22}$$

L'équation (54.21) devient :

$$\begin{aligned}
y &= -N_0(\cos\varphi + \sin\varphi d\varphi - \frac{\cos\varphi}{2}.d\varphi^2)d\lambda + \rho_0\sin\varphi_0d\varphi d\lambda \\
y &= -N_0\cos\varphi d\lambda + (\rho_0\sin\varphi_0 - N_0\sin\varphi)d\varphi d\lambda + o(d\varphi^2d\lambda)
\end{aligned} \tag{54.23}$$

Estimons numériquement les deux derniers termes de (54.23), on prendra : $\varphi_0 = 40\text{ gr}$ et $\lambda_0 = 40.25\text{ gr}$, $d\varphi = d\lambda = 0.25\text{ gr}$ on trouve alors :

$$(\rho_0\sin\varphi_0 - N_0\sin\varphi)d\varphi d\lambda = -0.57\text{ m} \tag{54.24}$$

$$o(d\varphi^2d\lambda) = 0.29\text{ m} \tag{54.25}$$

ce qui donne :

$$(\rho_0 \sin \varphi_0 - N_0 \sin \varphi) d\varphi d\lambda + o(d\varphi^2 d\lambda) = -0.57 + 0.29 = -0.28 m \quad (54.26)$$

De (54.23), on peut écrire que :

$$y = y_1 + \delta y \quad (54.27)$$

avec :

$$y_1 = -N_0 \cos \varphi d\lambda \quad (54.28)$$

$$\delta y = (\rho_0 \sin \varphi_0 - N_0 \sin \varphi) d\varphi d\lambda + o(d\varphi^2 d\lambda) \quad (54.29)$$

L'équation (54.28) donne l'ordonnée obtenue par les coordonnées Origines Fuseaux utilisées à l'OTC. En effet, on a :

$$y_1 = -N(\varphi_0)(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi = -N_0(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi = \frac{-(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{R} \quad (54.30)$$

avec $(\lambda - \lambda_0)$ en *dmgr*(") et :

$$R = \frac{2 \times 10^6}{\pi N_0} \quad (54.31)$$

En comptant les longitudes positives à l'Ouest de Greenwich, on obtient la formule :

$$y_1 = \frac{(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{R} \quad (54.32)$$

54.4.4 Calcul de l'abscisse Origines Fuseaux

x est donné par (54.19) :

$$x = \rho_0 d\varphi + \frac{r_0}{2} \sin \varphi_0 d\lambda^2 + \frac{\rho'_0}{2} d\varphi^2$$

ou encore :

$$x = \rho_0 d\varphi + \frac{N_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0}{2} d\lambda^2 + \frac{\rho'_0}{2} d\varphi^2 \quad (54.33)$$

Or d'après (54.30) :

$$d\lambda^2 = \frac{y_1^2}{N_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (54.34)$$

d'où :

$$x = \rho_0 d\varphi + \frac{N_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0}{2 N_0^2 \cos^2 \varphi} y_1^2 + \frac{\rho'_0}{2} d\varphi^2$$

ou :

$$x = \rho_0 d\varphi + \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi_0}{2 N_0 \cos^2 \varphi} y_1^2 + \frac{\rho'_0}{2} d\varphi^2 \quad (54.35)$$

Comme :

$$\cos\varphi = \cos\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)\sin\varphi_0 - \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2}\cos\varphi_0 + \dots = \cos\varphi_0\left(1 - tg\varphi_0 d\varphi - \frac{1}{2}.d\varphi^2 + \dots\right) \quad (54.36)$$

soit :

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi_0}\left(1 - tg\varphi_0 d\varphi - \frac{1}{2}.d\varphi^2 + \dots\right)^{-2} \quad (54.37)$$

L'expression (54.35) devient :

$$x = \rho_0 d\varphi + \frac{tg\varphi_0 y_1^2}{2N_0}(1 + 2d\varphi tg\varphi_0 + d\varphi^2) + \frac{\rho'_0}{2}d\varphi^2 \quad (54.38)$$

soit :

$$x = x_1 + \delta x \quad (54.39)$$

avec :

$$x_1 = \rho_0 d\varphi + \frac{tg\varphi_0}{2N_0}y_1^2 \quad (54.40)$$

$$\delta x = \frac{tg^2\varphi_0}{N_0}y_1^2 d\varphi + \frac{d\varphi^2}{2}\left(\rho'_0 + \frac{tg\varphi_0}{N_0}y_1^2\right) \quad (54.41)$$

Numériquement pour $\varphi_0 = 40.0 gr$, $d\lambda = d\varphi = 0.25 gr$, $\varphi = 40.25 gr$, on obtient $\delta x = 0.61 m$. L'équation (54.40) donne l'abscisse obtenue par les coordonnées Origines Fuseaux utilisées à l'OTC comme suit :

$$x_1 = \rho_0 d\varphi + \frac{tg\varphi_0}{2N_0}y_1^2 \quad (54.42)$$

soit :

$$x_1 = \frac{(\varphi - \varphi_0)}{\frac{1}{\rho(\varphi_0)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{tg\varphi_0}{N_0}y_1^2 \quad (54.43)$$

En exprimant $(\varphi - \varphi_0)$ en $dmgr$ (") et en écrivant (54.43) sous la forme :

$$x_1 = \frac{(\varphi - \varphi_0)''}{P} + \frac{Q}{P}y_1^2 \quad (54.44)$$

on obtient :

$$P = \frac{2 \times 10^6}{\pi\rho_0}, \quad Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{tg\varphi_0}{N_0} \cdot P \quad (54.45)$$

soit :

$$Q = \frac{10^6}{\pi N_0 \rho_0 \cot g \varphi_0} \quad (54.46)$$

54.5 APPLICATIONS

54.5.1 Calcul Direct

On donne l'origine du fuseau $\varphi_0 = 40.0\text{ gr}$, $\lambda_0 = -9.0\text{ gr}$ à l'Est du méridien de Paris et les coordonnées géographiques dans le système Voiron $\varphi = 39.8343606\text{ gr}$, $\lambda = -9.20371635\text{ gr}$ à l'Est de Paris. On veut calculer les coordonnées rectangulaires (x_1, y_1) dans le fuseau défini ci-dessus.

Les équations (54.32) et (54.44) donnent x_1 et y_1 :

$$x_1 = \frac{(\varphi - \varphi_0)''}{P} + \frac{Q}{P} \cdot y_1^2$$
$$y_1 = \frac{(\lambda - \lambda_0)'' \cdot \cos \varphi}{R}$$

Numériquement, on a :

$$(\varphi - \varphi_0)'' = -1656.394\text{ dmgr}$$
$$(\lambda - \lambda_0)'' = -2037.1635\text{ dmgr}$$

On donne les paramètres de l'ellipsoïde de Clarke Français 1880 :

$$a = 6378249.20\text{ m}$$
$$e^2 = 0.0068034877$$

Par suite, on a les valeurs des constantes P, Q, R :

$$P = 0.10014065$$
$$Q = 6 \times 10^{-9}$$
$$R = 0.099693679$$

On obtient alors les coordonnées Fuseau (x_1, y_1) :

$$x_1 = -16524.302\text{ m}$$
$$y_1 = -16531.641\text{ m}$$

54.5.2 Calcul Inverse

On donne les coordonnées rectangulaires (x_1, y_1) d'un point M du fuseau ($\varphi_0 = 40.0\text{ gr}$, $\lambda_0 = -9.0\text{ gr}$). Soient :

$$x_1 = -16524.30m$$

$$y_1 = -16531.64m$$

Calculons ses coordonnées géographiques (φ, λ) . De l'équation (54.44), on a :

$$(\varphi - \varphi_0)'' = Px_1 - Qy_1^2 \implies \varphi = \varphi_0 + Px_1 - Qy_1^2$$

Utilisant (54.32), on obtient :

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{Ry_1}{\cos\varphi}$$

Ce qui donne numériquement :

$$(\varphi - \varphi_0)'' = -1656.394 dmgr \implies \varphi = 39.8343606 gr$$

$$(\lambda - \lambda_0)'' = -2037.1635 dmgr \implies \lambda = -9.203716365 gr \quad \text{à l'Est du méridien de Paris.}$$

54.6 ANNEXE : EXPRESSIONS DE (DX, DY, DZ) EN FONCTION DE $d\varphi, d\lambda$

Soient 2 points $M(\varphi, \lambda)$ et $M'(\varphi', \lambda')$ de coordonnées tridimensionnelles respectivement (X, Y, Z) et (X', Y', Z') . On s'intéresse à l'expression de :

$$\begin{pmatrix} DX \\ DY \\ DZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{pmatrix}$$

en fonction de :

$$\begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' - \varphi \\ \lambda' - \lambda \end{pmatrix}$$

En s'arrêtant aux termes du 2ème ordre ordre, on a pour la composante X :

$$X' - X = \left(\frac{\partial X'}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial X'}{\partial \lambda}\right) d\lambda + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 X'}{\partial \varphi^2}\right) d\varphi^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 X'}{\partial \varphi \partial \lambda}\right) d\varphi d\lambda + \left(\frac{\partial^2 X'}{\partial \lambda^2}\right) d\lambda^2 \right]$$

D'où :

$$\begin{aligned} X' - X &= -\rho \cos\lambda \sin\varphi d\varphi - N \cos\varphi \sin\lambda d\lambda + \\ &\frac{1}{2} [-\cos\lambda (\rho' \sin\varphi + \rho \cos\varphi) d\varphi^2 + 2\rho \sin\varphi \sin\lambda d\varphi d\lambda - N \cos\varphi \cos\lambda d\lambda^2] \\ Y' - Y &= -\rho \sin\lambda \sin\varphi d\varphi + N \cos\varphi \cos\lambda d\lambda + \\ &\frac{1}{2} [-\sin\lambda (\rho' \sin\varphi + \rho \cos\varphi) d\varphi^2 - 2\rho \sin\varphi \cos\lambda d\varphi d\lambda - N \cos\varphi \sin\lambda d\lambda^2] \\ Z' - Z &= \rho \cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2} (\rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi) d\varphi^2 \end{aligned}$$

Avec :

$$N = N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$
$$\rho = \rho(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

CALCUL DES SOIRÉES DE HAUTEURS ÉGALES PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Résumé Dans cet article, nous proposons d'écrire les équations de calculs de la latitude et la longitude astronomiques par la méthode de hauteurs égales et les moindres carrés, et de les résoudre.

Mots clés : Triangle sphérique, hauteurs égales, moindres carrés.

55.1 Relation différentielle fondamentale

Soit le triangle sphérique PES où P est le pôle nord, E l'étoile et S la station astronomique, et les éléments suivants :

- z la distance zénithale = $30^{\circ}00'00''$,
- δ la déclinaison de l'étoile observée,
- φ la latitude de la station,
- AH l'angle horaire de l'étoile et A son azimut au moment de l'observation.

En appliquant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique au triangle EPS de côtes $z, \pi/2 - \varphi, \pi/2 - \delta$, on obtient :

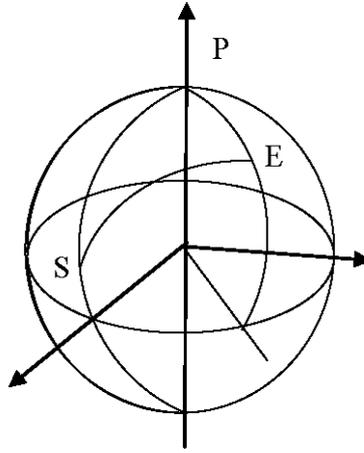


Fig. 55.1 Le triangle sphérique

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos AH \quad (55.1)$$

En différentiant l'équation (55.1), on obtient :

$$-\sin z dz = (\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos AH) d\varphi + (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos AH) d\delta - \cos \varphi \cos \delta \sin AH . dAH \quad (55.2)$$

or d'après la formule en sinus cosinus :

$$\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos AH = \sin z \cos A$$

L'équation (55.2) devient :

$$-\sin z dz = \sin z \cos A d\varphi + (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos AH) d\delta - \cos \varphi \cos \delta \sin AH . dAH \quad (55.3)$$

La déclinaison δ de l'étoile est connue avec précision au moment de l'observation, par suite $d\delta = 0$, la formule des sinus donne :

$$\frac{\sin(-AH)}{\sin z} = \frac{\sin A}{\cos \delta} \implies \sin z \sin A = -\cos \delta \sin AH \quad (55.4)$$

En remplaçant dans (55.3) $d\delta$ par 0 et $\cos \delta \sin AH$ par $-\sin z \sin A$, on obtient :

$$-\sin z dz = \sin z \cos A d\varphi + \sin z \sin A dAH \quad (55.5)$$

ou encore :

$$dz = -\cos A d\varphi - \sin A \cos \varphi dAH \quad (55.6)$$

Or $z \approx 30^\circ$ donc $\sin z \neq 0$, or AH est lié à la longitude λ de la station par :

$$AH = HSG_{0TU} + kTU + \lambda - \alpha \quad (55.7)$$

où :

- HSG_{0TU} : l'heure sidérale de Greenwich à $0hTU$ le jour de l'observation,

- α : l'ascension droite de l'étoile,

- $k = \frac{366.2422}{365.2422}$ le coefficient pour transformer le temps moyen TU en temps sidéral TS .

Par suite :

$$dAH = d\lambda \quad (55.8)$$

en différentiant (55.7), d'où la relation différentielle fondamentale :

$$dz = -\cos A d\varphi - \sin A \cos \varphi d\lambda \quad (55.9)$$

avec A l'azimut de l'étoile calculé à partir de (55.4) par :

$$\sin A = \frac{-\cos \delta \sin AH}{\sin z}$$

55.2 Relations d'observations en moindres carrés

A l'aide des valeurs approchées λ_0 et φ_0 , on détermine les coordonnées définitives φ et λ par :

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + d\varphi \\ \lambda = \lambda_0 + d\lambda \end{cases} \quad (55.10)$$

où $d\varphi, d\lambda$ vont être calculées à partir de l'équation (55.9) par la méthode des moindres carrés.

Dans l'équation (55.9), on a :

$$dz = z_{\text{observé}} - z_{\text{calculé}}$$

ou encore :

$$dz = z_{\text{observé réel}} - z_{\text{calculé approché}} \quad (55.11)$$

Introduisons dans (55.11) :

$$z_1 = z_{\text{obs observé}} = 30^\circ 00' 00'' + C \quad (55.12)$$

où C la somme des corrections des épaisseurs de contacts des niveaux et de la réfraction atmosphérique, on obtient :

$$dz = z_{\text{observé réellement}} - z_{1\text{observé approché}} + z_{1\text{observé approché}} - z_{\text{calculé approché}} \quad (55.13)$$

Posons :

$$\rho = z_{\text{observé réellement}} - z_{\text{observé approché}} \quad (55.14)$$

ρ est une constante aux résidus près au cours de l'observation de l'ensemble des étoiles d'une soirée astronomique.

Soit :

$$dz'_i = (z_{1\text{observé approché}} - z_{\text{calculé approché}})_{\text{étoile}_i} \quad (55.15)$$

L'équation (55.13) devient :

$$dz_i = \rho + dz'_i = -\cos A_i d\varphi - \sin A_i \cos \varphi d\lambda \quad (55.16)$$

D'où la relation d'observations par les moindres carrés :

$$\boxed{\cos A_i d\varphi + \sin A_i \cos \varphi d\lambda + \rho + dz'_i = v_i; \quad i = 1, 2, \dots, n} \quad (55.17)$$

où v_i est le résidu et n est le nombre des étoiles observées de la soirée.

55.3 Résolution directe par les Moindres Carrés

Posons :

$$x = d\varphi; \quad y = \cos \varphi d\lambda \quad (55.18)$$

L'équation (55.17) s'écrit :

$$\boxed{xcos A_i + ysin A_i + \rho + dz'_i = v_i; \quad i = 1, 2, \dots, n} \quad (55.19)$$

On résout le système (55.19) par la condition $\sum_i v_i^2$ minimum, d'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i v_i^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_i v_i^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_i v_i^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (55.20)$$

La troisième équation de (55.20) donne facilement ρ en fonction de x et de y à savoir :

$$\rho = \frac{-1}{n} \sum_i (x \cos A_i + y \sin A_i + dz_i) = - \frac{x \sum_i \cos A_i + y \sum_i \sin A_i + \sum_i dz_i}{n} \quad (55.21)$$

On remplace ρ en fonction de x et de y dans les deux premières équations de (55.20), on obtient un système linéaire aux inconnues x, y , soit :

$$\begin{cases} px + qy = u \\ qx + ry = w \end{cases} \quad (55.22)$$

avec :

$$\begin{cases} p = \sum_i^n \cos^2 A_i - \frac{(\sum_i^n \cos A_i)^2}{n} \\ q = \sum_i^n \cos A_i \sin A_i - \frac{(\sum_i^n \sin A_i)(\sum_i^n \cos A_i)}{n} \\ u = \frac{(\sum_i^n \cos A_i)(\sum_i^n dz_i)}{n} - \sum_i^n \cos A_i dz_i \\ w = \frac{(\sum_i^n \sin A_i)(\sum_i^n dz_i)}{n} - \sum_i^n \sin A_i dz_i \\ r = \sum_i^n \sin^2 A_i - \left(\frac{\sum_i^n \sin A_i}{n} \right)^2 \end{cases} \quad (55.23)$$

A partir de x et y déterminés par (55.22), on a donc :

$$\begin{cases} d\varphi = x \\ d\lambda = \frac{y}{\cos \varphi} \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + d\varphi \\ \lambda = \lambda_0 + d\lambda \end{cases} \quad (55.24)$$

L'inconnue auxiliaire ρ est calculée par (55.21). ρ représente le rayon, du cercle centré sur (φ, λ) et tangent au mieux aux droites de hauteurs par la détermination par la méthode graphique.

55.4 Résolution Matricielle

On peut écrire également le système des équations (55.9) sous forme matricielle :

$$B.X + L = V \quad (55.25)$$

où :

$$B = \begin{pmatrix} \cos A_1 & \sin A_1 & 1 \\ \cos A_2 & \sin A_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos A_n & \sin A_n & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \rho \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} dz'_1 \\ dz'_2 \\ \vdots \\ dz'_n \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (55.26)$$

La résolution de l'équation (55.25) par la méthode des moindres carrés donne le résultat connu :

$$X = -(B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot L \quad (55.27)$$

où B^T désigne la matrice transposée de B . Appelons :

$$N = B^T \cdot B \quad (55.28)$$

C'est une matrice symétrique, inversible, dite matrice normale du système (55.25).

55.5 Calculs des écarts-types

55.5.1 Ecarts-types de chaque soirée

Une estimation du facteur de la variance unitaire σ_0^2 du système (55.25) est donnée par :

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_i v_i^2}{n-r} = \frac{V^T \cdot V}{n-r} \quad (55.29)$$

où n est le nombre des étoiles observées et r le nombre des inconnues. On obtient l'écart-type estimé par :

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_i v_i^2}{n-3}} = \sqrt{\frac{V^T \cdot V}{n-3}} \quad (55.30)$$

Pour trouver les écarts-types de x, y et ρ , on utilise la matrice des variances de x, y et ρ donnée par :

$$Var(x, y, \rho) = \sigma_0^2 N^{-1} = \sigma_0^2 \cdot (s_{ij}) \quad (55.31)$$

où (s_{ij}) est l'élément général de la matrice N^{-1} , par suite :

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \sigma_{xx}^2 = \sigma_0^2 \cdot s_{11} \\ \sigma_y^2 = \sigma_{yy}^2 = \sigma_0^2 \cdot s_{22} \\ \sigma_\rho^2 = \sigma_{\rho\rho}^2 = \sigma_0^2 \cdot s_{33} \end{cases} \quad (55.32)$$

Le calcul de N^{-1} donne :

$$\begin{cases} s_{11} = \frac{1}{\sum_i \cos^2 A_i} (1 + \varepsilon_1) \\ s_{22} = \frac{1}{\sum_i \sin^2 A_i} (1 + \varepsilon_2) \\ s_{33} = \frac{1}{n} (1 + \varepsilon_3) \end{cases} \quad (55.33)$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 sont des quantités négligeables. L'écart-type de x est :

$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{s_{11}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i \cos^2 A_i}} (1 + \varepsilon_1)^{1/2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i \cos^2 A_i}} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1\right)$$

En négligeant le terme $\frac{1}{2} \varepsilon_1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i \cos^2 A_i}} \\ \text{de même : } \sigma_y = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i \sin^2 A_i}} \\ \sigma_p = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \end{array} \right. \quad (55.34)$$

Comme $x = d\varphi$ et $y = \cos\varphi d\lambda$, on a les écarts-types de déterminations de la latitude φ et de la longitude λ par :

$$\boxed{\sigma_\varphi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i \cos^2 A_i}}; \quad \sigma_\lambda = \frac{\sigma_0}{\cos\varphi \sqrt{\sum_i \sin^2 A_i}}; \quad \sigma_p = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \quad (55.35)$$

55.5.2 Ecarts-types de l'ensemble des soirées

Pour l'ensemble des soirées astronomiques observées, on prendra :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\text{définitive}} = \frac{\sum_i n_i \varphi_i}{\sum_i n_i} \\ \lambda_{\text{définitive}} = \frac{\sum_i n_i \lambda_i}{\sum_i n_i} \end{array} \right. \quad (55.36)$$

où n_i le nombre des étoiles de la soirée i .

Pour l'ensemble des soirées, on utilise le théorème suivant :

Variance totale = Moyenne des variances individuelles + Variance de la Moyenne.

On applique le théorème par exemple à la première relation de (55.36), on obtient :

$$\sigma_{\varphi_{\text{def}}}^2 = \frac{1}{\sum_i n_i} \left[\frac{\sum_i n_i (\varphi_i - \varphi_{\text{def}})^2}{\sum_i n_i - 1} \right] + \text{Var} \left(\frac{\sum_i n_i \varphi_i}{\sum_i n_i} \right) \quad (55.37)$$

or :

$$Var\left(\frac{\sum_i n_i \varphi_i}{\sum_i n_i}\right) \cong \frac{\sum_i n_i^2 Var(\varphi_i)}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i - 1)} \quad (55.38)$$

et :

$$\sigma_{\varphi_i}^2 = \frac{n_i Var(\varphi_i)}{n_i - 1} \quad (55.39)$$

car $\sigma_{\varphi_i}^2$ est la variance estimée de φ_i . D'où :

$$Var\left(\frac{\sum_i n_i \varphi_i}{\sum_i n_i}\right) = \frac{\sum_i n_i (n_i - 1) \sigma_{\varphi_i}^2}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i - 1)} \quad (55.40)$$

On obtient donc la variance estimée sur φ définitive par :

$$\sigma_{\varphi def}^2 = \frac{\sum_i n_i (\varphi_i - \varphi_{def})^2 + \sum_i n_i (n_i - 1) \sigma_{\varphi_i}^2}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i - 1)} \quad (55.41)$$

Par suite, on a les écarts-types de φ et λ définitifs pour l'ensemble des soirées astronomiques :

$$\sigma_{\varphi def} = \sqrt{\frac{\sum_i n_i (\varphi_i - \varphi_{def})^2 + \sum_i n_i (n_i - 1) \sigma_{\varphi_i}^2}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i - 1)}} \quad (55.42)$$

$$\sigma_{\lambda def} = \sqrt{\frac{\sum_i n_i (\lambda_i - \lambda_{def})^2 + \sum_i n_i (n_i - 1) \sigma_{\lambda_i}^2}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i - 1)}} \quad (55.43)$$

Littérature

1. Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2013. Eléments de Géodésie pour les Ingénieurs. v1. 335p.

Partie II

**ELÉMENTS DE MÉCANIQUE CÉLESTE : SUR LE
MOUVEMENT DE N CORPS**

LE MOUVEMENT DE n CORPS

Le Problème des trois corps a une telle importance pour l'Astronomie, et il est en même temps si difficile, que tous les efforts des géomètres ont été depuis longtemps dirigés de ce côté. Une intégration complète et rigoureuse étant manifestement impossible, c'est aux procédés d'approximation que l'on a dû faire appel.

Henri Poincaré,¹ (1892)

Cette note présente un essai sur le mouvement de n corps où $n \geq 2$.

56.1 Le Problème de n corps

Considérons le mouvement de n corps $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$. Soient (x_k, y_k, z_k) les coordonnées de P_k dans un repère cartésien fixe et m_k sa masse ($m_k > 0$). Notons r_{kl} la distance entre les points P_k et P_l telle que :

$$r_{kl}^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2 \quad (k, l = 1, 2, \dots, n) \quad (56.1)$$

1. Henri Poincaré (1854-1912) : Mathématicien français, parmi les plus grands du vingtième siècle.

Les corps P_k soumis à l'attraction universelle dans le repère cartésien qu'on note $\mathcal{R}(O, e_1, e_2, e_3)$. Alors la fonction potentiel due à la gravitation est :

$$U = \sum_{k < l} \frac{G.m_k m_l}{r_{kl}} = \sum_{k < l} \frac{G.m_k m_l}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}} = \sum_{k < l} U_{kl} \quad (56.2)$$

avec G la constante universelle de la gravitation et :

$$U_{kl} = \frac{G.m_k m_l}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}} \quad (56.3)$$

Notons par q et m respectivement l'une des composantes et la masse d'un point quelconque P_l , alors on peut écrire les équations du mouvement :

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = U_q = \frac{\partial U}{\partial q} \quad (56.4)$$

Appliquons par exemple la formule précédente pour la composante x d'un point P_k , on obtient :

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = U_{x_k} = \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{l \neq k} \frac{G m_k m_l}{r_{kl}} \quad (56.5)$$

d'où :

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \sum_{l \neq k} \frac{G m_k m_l (x_l - x_k)}{r_{kl}^3} = \sum_{l=1; l \neq k}^{l=n} \frac{G m_k m_l (x_l - x_k)}{r_{kl}^3} \quad (56.6)$$

56.2 Les Intégrales Premières des équations du mouvement

Si on somme les deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_k m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{G m_k m_l (x_l - x_k)}{r_{kl}^3} = 0 \quad (56.7)$$

Ce qui donne :

$$\sum_k m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0 \implies \boxed{\sum_k m_k \frac{dx_k}{dt} = a, \quad a = \text{constante}} \quad (56.8)$$

De même, on obtient :

$$\boxed{\sum_k m_k \frac{dy_k}{dt} = b, \quad b = \text{constante}} \quad (56.9)$$

$$\boxed{\sum_k m_k \frac{dz_k}{dt} = c, \quad c = \text{constante}} \quad (56.10)$$

En intégrant une deuxième fois les équations (56.8-56.9-56.10), on obtient :

$$\boxed{\sum_k m_k x_k = at + a_0, \quad a_0 = \text{constante}} \quad (56.11)$$

$$\boxed{\sum_k m_k y_k = bt + b_0, \quad b_0 = \text{constante}} \quad (56.12)$$

$$\boxed{\sum_k m_k z_k = ct + c_0, \quad c_0 = \text{constante}} \quad (56.13)$$

A partir de (56.6), les équations du mouvement s'écrivent sous forme vectorielle comme suit :

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{OP}_k}{dt^2} = \sum_{l=1; l \neq k}^{l=n} \frac{Gm_k m_l (\mathbf{OP}_l - \mathbf{OP}_k)}{r_{kl}^3} \quad (56.14)$$

Multiplions vectoriellement les deux membres de l'équation précédente par \mathbf{OP}_k , on obtient :

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{OP}_k}{dt^2} \wedge \mathbf{OP}_k = \sum_{l=1; l \neq k}^{l=n} \frac{Gm_l m_k (\mathbf{OP}_l - \mathbf{OP}_k)}{r_{kl}^3} \wedge \mathbf{OP}_k = \sum_{l=1; l \neq k}^{l=n} \frac{Gm_l m_k (\mathbf{OP}_l \wedge \mathbf{OP}_k)}{r_{kl}^3} \quad (56.15)$$

On somme sur l'indice k , d'où :

$$\sum_k m_k \frac{d^2 \mathbf{OP}_k}{dt^2} \wedge \mathbf{OP}_k = \sum_k \sum_{l=1; l \neq k}^{l=n} \frac{Gm_l m_k (\mathbf{OP}_l \wedge \mathbf{OP}_k)}{r_{kl}^3} = \mathbf{0} \quad (56.16)$$

L'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k m_k \frac{d\mathbf{OP}_k}{dt} \wedge \mathbf{OP}_k \right) = \mathbf{0} \quad (56.17)$$

En intégrant, on trouve :

$$\sum_k m_k \frac{d\mathbf{OP}_k}{dt} \wedge \mathbf{OP}_k = \mathbf{w} = \text{vecteur constant} \quad (56.18)$$

C'est la conservation du moment cinétique. Soit en considérant les composantes du moment cinétique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n m_k (\dot{y}_k z_k - y_k \dot{z}_k) &= \alpha \\
\sum_{k=1}^n m_k (\dot{z}_k x_k - z_k \dot{x}_k) &= \beta \\
\sum_{k=1}^n m_k (\dot{x}_k y_k - x_k \dot{y}_k) &= \gamma
\end{aligned} \tag{56.19}$$

en notant $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$.

A partir de l'équation (56.4), on peut écrire en multipliant ses deux membres par $\frac{dq}{dt}$:

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} \tag{56.20}$$

En sommant sur toutes les composantes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \sum_i^3 d \left(\frac{1}{2} m_k \left(\frac{dq_{ik}}{dt} \right)^2 \right) = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k \tag{56.21}$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \sum_i^3 \left(\frac{1}{2} m_k \left(\frac{dq_{ik}}{dt} \right)^2 \right) - U = \text{constante} \tag{56.22}$$

or :

$$v_k^2 = \sum_i^3 \left(\frac{dq_{ik}}{dt} \right)^2 \tag{56.23}$$

Par suite, on écrit :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 - U = T - U = \text{constante} \tag{56.24}$$

où :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 \tag{56.25}$$

est l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle.

Les équations (56.8-56.9-56.10) et (56.11-56.12-56.13) et les 3 équations de (56.19) et (56.24) constituent les 10 intégrales premières. Le système (56.4) est formé de $6n$ équations avec les 10 intégrales pour déterminer les $3n$ inconnues.

Littérature

1. **Helmut Moritz and Ivan I. Mueller.** 1988. *Earth Rotation :Theory and Observation.* Ungar Publishing Compagny. New York. 617p.
2. **Bruno Morando.** 1974. *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre.* Gordon & Breach, Paris, London et New York. 255p.
3. **Henri Poincaré.** 1892. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.* Tome I. Gauthier Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires. Paris. 408p.

CHAPITRE 57

NOTIONS SUR LE MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL DE LA TERRE

Cette note présente le cas du mouvement d'un satellite artificiel autour de la Terre.

57.1 LE CHAMP DE PESANTEUR

Le phénomène fondamental qui régit la forme de la Terre est la pesanteur. Elle est le résultat de l'attraction newtonienne du corps terrestre et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre autour de son axe. Voyons ce-ci en détail.

Soit le repère $OXYZ$ tel que O soit le centre de gravité de la Terre et OZ son axe de rotation. Le plan OXZ contient le méridien de Greenwich.

57.1.1 *Le Champ du Potentiel*

On appelle champ du potentiel la fonction scalaire V définie par :

$$V = \frac{Gmm'}{r} = V(X, Y, Z) \quad (57.1)$$

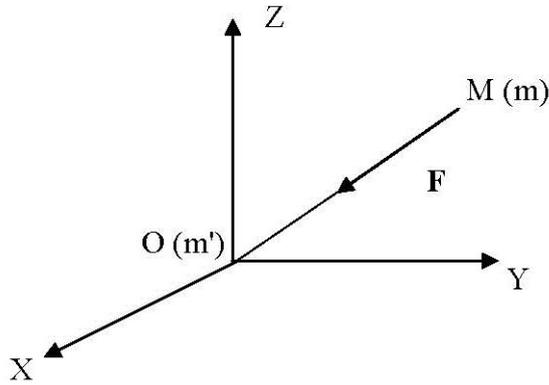


Fig. 57.1 Le Repère 3D

57.1.2 Gradient

On appelle gradient d'une fonction scalaire $U(X,Y,Z)$ le vecteur noté $\mathbf{grad}U$ et de composantes :

$$\mathbf{grad}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} \\ \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial U}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (57.2)$$

Exemple 1 : $U = X^2 + Y^2 + Z^2$, $\mathbf{grad}U$ est le vecteur de composantes :

$$\mathbf{grad}U = (2X, 2Y, 2Z)^T = \begin{pmatrix} 2X \\ 2Y \\ 2Z \end{pmatrix} \quad (57.3)$$

où T désigne transposé.

Exemple 2 :

$$U = \frac{1}{r} \quad (57.4)$$

comme :

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \implies 2rdr = 2XdX + 2YdY + 2ZdZ$$

d'où :

$$\mathbf{grad}U = \left(\frac{-X}{r^3}, \frac{-Y}{r^3}, \frac{-Z}{r^3} \right)^T \quad (57.5)$$

Si on pose :

$$\mathbf{r} = \mathbf{OM} = Xi + Yj + Zk \quad (57.6)$$

Alors :

$$\mathbf{grad}U = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (57.7)$$

Calculons le gradient de la fonction scalaire donnée par l'équation (57.1) c'est-à-dire le champ du potentiel. En utilisant l'exemple 2., on a :

$$\mathbf{grad}V = \mathbf{grad}\left(\frac{Gmm'}{r}\right) = Gmm'\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -Gmm'\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (57.8)$$

Remarquons si on pose :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (57.9)$$

On a \mathbf{n} est un vecteur unitaire porté par \mathbf{OM} et dans la direction \mathbf{OM} . L'expression de la force \mathbf{F} s'écrit :

$$\mathbf{F} = -F\mathbf{n} = -\frac{Gmm'}{r^2}\mathbf{n} \quad (57.10)$$

comme :

$$\mathbf{grad}V = -\frac{Gmm'}{r^2}\mathbf{n} \quad (57.11)$$

D'où :

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad}V \quad (57.12)$$

On dit que la force \mathbf{F} dérive du champ de potentiel V .

57.1.3 Le Champ Réel ou Champ du Potentiel de la Pesanteur

Un point $M(X, Y, Z)$ de masse unité est soumis au potentiel V de gravitation et au potentiel Φ de la force centrifuge due à la rotation de la terre.

L'expression de V est :

$$V = G \iiint_{Terre} \frac{dm'}{r} \quad (57.13)$$

Malheureusement, cette expression n'est pas calculable car nous ignorons la distribution des masses à l'intérieur de la Terre. L'expression du potentiel Φ de la force centrifuge est donnée par :

$$\Phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\omega^2 \quad (57.14)$$

Où ω est la vitesse de la rotation de la Terre.

Définition : On appelle Potentiel du champ réel W ou potentiel de la pesanteur la somme du potentiel V et Φ :

$$W = V + \Phi \quad (57.15)$$

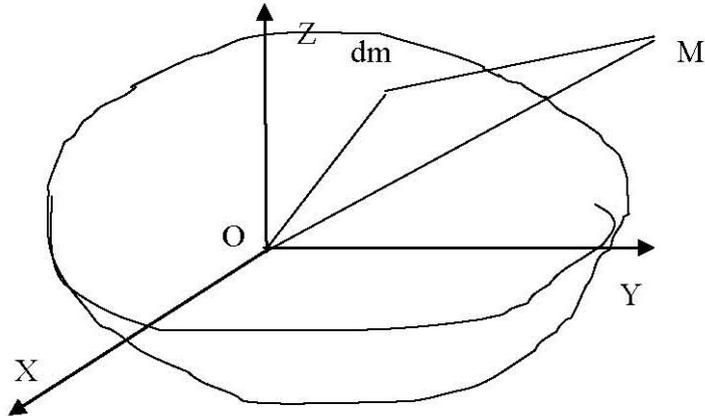


Fig. 57.2 Le Potentiel

Définition : On appelle vecteur de gravité le vecteur g tel que :

$$g = \text{grad}W \quad (57.16)$$

$g = \|\mathbf{g}\|$ mesure la gravité ou la pesanteur a la dimension d'une accélération et exprimée en m/s^2 (Unité Système International) ou en cm/s^2 ($1cm/s^2 = 1gal$ en hommage à Galilée). g mesure 978 *gals* à l'équateur et 983 *gals* aux pôles.

Soit un repère $OXYZ$ orthonormé direct centré au centre de gravité de la terre (de masse m') et soit un point $M(X, Y, Z)$ représentant le satellite artificiel de de masse ponctuelle m . Comme $m' \gg m$, on considère que la terre est représentée par une masse ponctuelle m' au centre de la terre.

Alors, le point M est soumis à une force F due à l'attraction de la masse m' au point O . Le module de cette force est :

$$F = \frac{Gmm'}{r^2} = F(X, Y, Z) \quad (57.17)$$

où G est la constante universelle de gravitation et r est la distance OM .

57.2 LES EQUATIONS DU MOUVEMENT

57.2.1 Introduction

Un cas simple du mouvement de deux corps est celui du mouvement d'un satellite artificiel autour de la Terre. Dans ce mouvement, on néglige la masse du satellite et des effets des autres planètes (essentiellement le soleil et la lune).

Considérons un satellite de masse m défini par le vecteur $\mathbf{OS} = \mathbf{r}$. La Terre est considérée comme une masse ponctuelle de masse m' située au point O centre de la Terre.

L'équation du mouvement est donnée par :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = -G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r} \quad (57.18)$$

avec \mathbf{F} la force d'attraction gravitationnelle et G est la constante universelle de gravitation de valeur égale à $(6673 \pm 1) \times 10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$.

L'équation (57.18) s'écrit aussi :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = \mathbf{grad} V \quad (57.19)$$

On dit que \mathbf{F} dérive du potentiel V avec :

$$V = G \frac{mm'}{r} \quad (57.20)$$

Posons :

$$\mu = Gm' = (3986005 \pm 0.5) \times 10^8 m^3 s^{-2} \quad (57.21)$$

L'équation (57.18) s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (57.22)$$

Comme :

$$\mathbf{r} = \begin{cases} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{cases} \quad (57.23)$$

Alors l'équation vectorielle (57.22) s'écrit en trois équations différentielles du deuxième ordre comme suit :

$$\ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3} X_C = 0 \quad (57.24)$$

$$\ddot{Y}_C + \frac{\mu}{r^3} Y_C = 0 \quad (57.25)$$

$$\ddot{Z}_C + \frac{\mu}{r^3} Z_C = 0 \quad (57.26)$$

Après l'intégration de (57.24)-(57.26), nous obtenons six paramètres des conditions initiales qui définissent la forme et la position de l'orbite et une constante donnant la variation du mouvement du satellite avec le temps.

Les équations (57.24)-(57.26) montrent que nous avons un mouvement d'un corps dans un champ central.

57.2.2 La 2ème Loi de Kepler

1. Si nous appliquons le théorème du moment cinétique, nous avons :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{0} \quad (57.27)$$

car :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{OS} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{C} = \text{constante} \quad (57.28)$$

En effet, dérivons (57.28) par rapport au temps, on a alors :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \frac{d\mathbf{OS}}{dt} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{OS} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{OS} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} \quad (57.29)$$

Or d'après (57.22) :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

D'où :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (57.30)$$

On déduit donc (57.28) et on a :

$$C = \|\mathbf{C}\| = \text{constante des aires} \quad (57.31)$$

De (57.28), le mouvement se fait dans un plan, en définissant $\mathbf{OS} = \mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \nu)$, alors les composantes de \mathbf{v} vecteur vitesse sur le rayon vecteur \mathbf{r} et de la direction perpendiculaire sont :

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \frac{dr}{dt} \\ r \frac{d\nu}{dt} \end{cases} \quad (57.32)$$

On a alors :

$$C = r \cdot r \frac{d\nu}{dt} = r^2 \frac{d\nu}{dt} \quad (57.33)$$

et aussi :

$$\dot{\Sigma} = \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{r^2 d\nu}{2dt} \quad (57.34)$$

Avec Σ la surface balayée par le vecteur position.

De (57.33) et (57.34), nous avons la 2ème loi de Kepler :

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{2}C = \text{constante} \quad (57.35)$$

Proposition 1 (Deuxième loi de Kepler, ou loi des aires). *L'aire balayée par le vecteur position $\mathbf{r}(t)$ varie linéairement avec le temps.*

2. Si nous appliquons le théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle, on a :

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (57.36)$$

où :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\mu \frac{m}{r^3} \mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{-\mu m}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu m}{r} \right) \quad (57.37)$$

En remplaçant (57.37) dans le second membre de (57.36) et en intégrant, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = \text{constante} \quad (57.38)$$

Soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = H = \text{constante} \quad (57.39)$$

où H est la constante de l'énergie ou l'énergie.

Lemme 1 : *Les fonctions H et C sont constantes le long des solutions : on dit que ce sont des intégrales premières du mouvement, c'est-à-dire que H et C sont des fonctions de la position r et de la dérivée première de r par rapport au temps (t), constantes au cours du temps.*

En effet, de (57.39) et de (57.31), on a respectivement :

$$H = H(r, v) = \text{constante}$$

et

$$C = C(r, v) = r^2 \frac{dv}{dt} = \text{constante}$$

57.2.3 La 1ère loi de Kepler

Multiplions vectoriellement à droite les membres de l'équation (57.22) par $\mathbf{C} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{C} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) = -\frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})] = -\frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v}] \\
&= -\frac{\mu}{r^3} \left(\mathbf{r} r \frac{dr}{dt} - r^2 \mathbf{v} \right) = -\frac{\mu}{r^2} \left(\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \mathbf{v} \right) \\
\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{C} &= \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (57.40)
\end{aligned}$$

Comme \mathbf{C} est constant, (57.40) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{C}) - \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0 \quad (57.41)$$

Après intégration, nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{C} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{l} = \text{vecteur constant } \mathbf{l}_0$$

ou :

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{C}) - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{l} \quad (57.42)$$

On appelle \mathbf{l} vecteur de Laplace. Multiplions (57.42) par \mathbf{r} , nous obtenons :

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{C}) - \mu \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} \quad (57.43)$$

Comme :

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = C^2$$

et

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} = l r \cos \nu$$

(57.43) devient :

$$C^2 = \mu r + l r \cos \nu \quad (57.44)$$

En posant :

$$p = \frac{C^2}{\mu} \quad \text{et} \quad e = \frac{l}{\mu} \quad (57.45)$$

On déduit de (57.44) :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (57.46)$$

C'est l'équation d'une conique en coordonnées polaires (r, ν) . L'angle ν comptée entre la direction du vecteur de Laplace \mathbf{l} ou \mathbf{OP} (périgée) et le rayon vecteur \mathbf{r} s'appelle *l'anomalie vraie*.

On a :

$$\text{Pour } \nu = 0 \implies r_1 = \frac{p}{1+e} \quad \text{c'est la périgée} \quad (57.47)$$

$$\text{Pour } \nu = \pi \implies r_2 = \frac{p}{1-e} \quad \text{c'est l'apogée} \quad (57.48)$$

$$\text{D'où : } r_1 + r_2 = 2a = \frac{2p}{1-e^2} \implies p = a(1-e^2) \quad (57.49)$$

Par suite :

$$r_1 = \frac{p}{1+e} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) \quad (57.50)$$

$$r_2 = \frac{p}{1-e} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e) \quad (57.51)$$

57.2.4 La 3ème Loi de Kepler

D'après la 2ème loi de Kepler donnée par (57.35) :

$$\dot{\Sigma} = \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{C}{2} = \text{constante}$$

d'où :

$$d\Sigma = \frac{C}{2} dt \quad (57.52)$$

En intégrant (57.52) sur une période, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \int_0^T C dt = \int d\Sigma = \Sigma = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot a^2 \sqrt{1-e^2} \quad (57.53)$$

Soit :

$$C = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1-e^2} \quad (57.54)$$

Comme $C = \sqrt{p\mu} = \sqrt{a(1-e^2)\mu}$ et T la période, nous avons finalement :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \text{constante} \quad (57.55)$$

C'est la 3ème loi de Kepler.

Proposition 2 (Troisième loi de Kepler). *Le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe.*

57.3 ELÉMENTS DE L'ORBITE

Après l'intégration des équations du mouvement du satellite artificiel, nous obtenons six paramètres qui définissent la position du plan de l'orbite, ses dimensions, appelés les éléments d'orbite et ce sont :

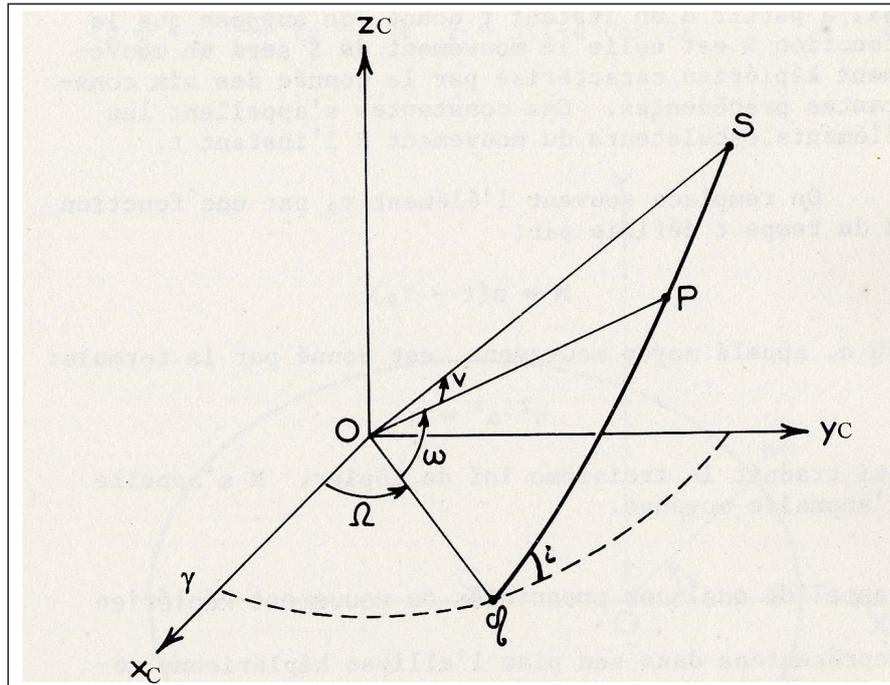


Fig. 57.3 Le Repère Celeste

- a - le demi grand-axe,
- e - la première excentricité,
- i - l'angle d'inclinaison,
- Ω - l'ascension droite du noeud ascendant,
- ω - l'argument,
- t_0 - l'instant de passage au périhélie.

57.3.1 Les Coordonnées

En conséquence de la 3ème loi de Kepler (57.55), nous pouvons écrire :

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (57.56)$$

n est appelé *vitesse moyenne angulaire*. A partir de (57.56), on définit l'*anomalie moyenne* M à l'instant t par :

$$M = n(t - t_0) \quad (57.57)$$

Exprimons les coordonnées du satellite dans le plan de l'orbite à l'aide de la figure (Fig. 57.4) :

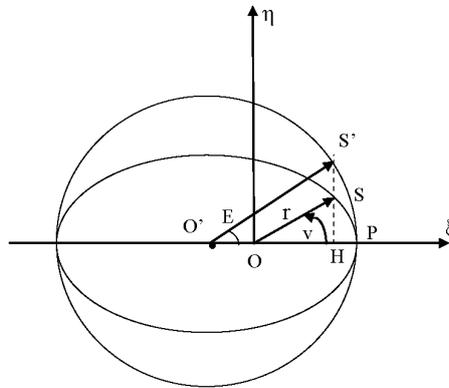


Fig. 57.4 Plan de l'orbite

où :

- O est la terre et aussi un foyer de l'ellipse,
- S la position du satellite,
- ν l'anomalie vraie,
- E = l'angle $PO'S'$ est appelé l'anomalie excentrique.
- l'axe $O\eta$ est perpendiculaire à l'axe $O\xi$ et l'axe $T\zeta$ est perpendiculaire au plan $O\xi\eta$.

On sait que dans le repère $O\xi\eta$, on a :

$$\mathbf{OS} = \begin{cases} \xi = OS\cos\nu = r\cos\nu \\ \eta = OS\sin\nu = r\sin\nu \end{cases} \quad (57.58)$$

$$\text{avec } r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \quad (57.59)$$

Maintenant, d'après la première loi de Kepler, l'aire balayée par le vecteur position \mathbf{OS} entre les instants t_0 et t vaut :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_{t_0}^t C dt = \frac{C(t-t_0)}{2} = \frac{(t-t_0)2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{2T} = \\ &= \frac{n(t-t_0)a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} = \frac{Ma^2 \sqrt{1-e^2}}{2} \end{aligned} \quad (57.60)$$

Comme l'ellipse de paramètres (a, b) est obtenue par affinité de rapport $k = b/a = \sqrt{1-e^2}$ du cercle centré en O' et de rayon a . Donc :

$$k = \frac{\Sigma}{\sigma_1} \quad (57.61)$$

où la surface σ_1 est celle du triangle curviligne OPS' , elle est égale à la différence du secteur circulaire $O'PS'$ et du triangle $O'OS'$ soit :

$$A_1 = \text{aire secteur } O'PS' = \frac{\pi \cdot a^2}{2\pi} \cdot E = \frac{a^2 \cdot E}{2} \quad (57.62)$$

et l'aire du triangle $O'OS'$ vaut :

$$A_2 = \frac{O'O \cdot HS'}{2} \quad (57.63)$$

Comme :

$$\sin E = \frac{HS'}{a} \Rightarrow HS' = a \cdot \sin E, \quad O'O = a - r_1 = a - a(1-e) = a \cdot e$$

d'où :

$$\sigma_1 = A_1 - A_2 = \frac{a^2 E}{2} - \frac{O'O \cdot HS'}{2} = \frac{a^2 E}{2} - \frac{ae \cdot a \sin E}{2} = \frac{a^2 (E - e \sin E)}{2} \quad (57.64)$$

On peut écrire alors en utilisant (57.60) que :

$$\begin{aligned} \Sigma &= k\sigma_1 \Rightarrow \frac{Ma^2 \sqrt{1-e^2}}{2} = \frac{b}{a} \frac{a^2 (E - e \sin E)}{2} = \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{a^2 (E - e \sin E)}{2} \Rightarrow E - e \sin E = M = n(t-t_0) \end{aligned}$$

L'équation :

$$E - e \sin E = M = n(t - t_0) \quad (57.65)$$

s'appelle l'équation de Kepler.

Cette relation est importante, puisqu'elle permet de calculer E en fonction du temps et par suite de déterminer $v = v(t)$ voir l'équation (??) ci-dessous, et $r = r(t)$.

Nous pouvons calculer la valeur de l'anomalie excentrique E par la méthode itérative. A la première itération, nous prenons :

$$E_1 = M + e \sin M$$

et

$$E_2 = E_1 + \delta E$$

Utilisons (57.65) on a :

$$E_1 + \delta E - e \sin(E_1 + \delta E) = M \quad (57.66)$$

En faisant un développement au premier degré, nous obtenons :

$$E_1 + \delta E - e \sin E_1 \cos \delta E - e \sin \delta E \cos E_1 = M \quad (57.67)$$

Comme δE est petit, on a $\cos \delta E \approx 1$ et $\sin \delta E \approx \delta E$, nous obtenons :

$$\delta E = \frac{M - E_1 + e \sin E_1}{1 - e \cos E_1} \quad (57.68)$$

Prenons maintenant

$$E_1 = E_1 + \delta E$$

et appliquons (57.68) et ainsi de suite jusqu'à ce que δE soit négligeable devant la précision désirée.

Dans le repère $O\xi\eta\zeta$, on peut écrire les coordonnées du satellite sous la forme :

$$\xi = OH = O'H - O'O = a \cos E - ae = a(\cos E - e) \quad (57.69)$$

$$\eta = SH = (b/a)HS' = \sqrt{1 - e^2} a \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (57.70)$$

$$\zeta = 0 \quad (57.71)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e} \quad (57.72)$$

Or d'après (57.58), on a :

$$\begin{cases} \xi = r \cos v \\ \eta = r \sin v \end{cases} \implies tg v = \frac{\eta}{\xi} \quad (57.73)$$

d'où :

$$tg v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \quad (57.74)$$

Exprimons maintenant les coordonnées (X_C, Y_C, Z_C) du satellite dans le référentiel céleste $X_C Y_C Z_C$ à l'aide de la figure (Fig.57.3). Il est nécessaire de faire successivement :

1. une rotation de $-\omega$ autour de l'axe $O\xi$,
2. une rotation de $-i$ autour de l'axe $O\Omega$,
3. une rotation de $-\Omega$ autour de l'axe $O'Z_C$.

Les matrices de rotations sont les suivantes :

$$R(-\Omega) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (57.75)$$

et :

$$R(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad (57.76)$$

et :

$$R(-\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (57.77)$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = R(-\Omega) \cdot R(-i) \cdot R(-\omega) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (57.78)$$

Ce qui donne après calculs :

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin \omega \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \cdot \sin \omega & \sin i \cdot \cos \omega & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (57.79)$$

En posant :

$$P_X = \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \quad (57.80)$$

$$P_Y = -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \quad (57.81)$$

$$Q_X = \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \quad (57.82)$$

$$Q_Y = -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \quad (57.83)$$

On obtient comme $\zeta = 0$:

$$X_C = P_X \xi + P_Y \eta \quad (57.84)$$

$$Y_C = Q_X \xi + Q_Y \eta \quad (57.85)$$

$$Z_C = \xi \sin i \sin \omega + \eta \sin i \cos \omega \quad (57.86)$$

Si on veut calculer les coordonnées du satellite dans le référentiel terrestre (O, X_T, Y_T, Z_T) , on a :

$$\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} \quad (57.87)$$

où Ω est le temps sidéral de Greenwich au temps t . Il vaut :

$$\Omega (\text{en heures}) = 1.002737909 \times UT2 + HSG_{0TU} \quad (57.88)$$

avec $UT2$ le Temps Universel corrigé (en heures) et HSG_{0TU} l'heure sidérale à Greenwich à 0h TU (Temps Universel).

57.4 LES PERTURBATIONS DES ORBITES

Nous avons vu dans le chapitre précédent le mouvement d'un satellite artificiel autour de la terre sous l'action de la force gravitationnelle. Le mouvement réel du satellite est sous l'effet de la force centrale gravitationnelle et d'une force supplémentaire. On supposera que cette force est petite par rapport à la force centrale. On l'appelle force perturbatrice.

Cette force perturbatrice est la somme de forces d'origine gravitationnelle et d'autres non gravitationnelles. Dans le cas général, une force perturbatrice f en un point est fonction de ses coordonnées, de sa vitesse et du temps. On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} f_X &= f_X(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t) \\ f_Y &= f_Y(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t) \\ f_Z &= f_Z(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t) \end{aligned} \quad (57.89)$$

Les équations du mouvement en coordonnées rectangulaires obtenues en complétant les équations du problème de la façon suivante :

$$m\ddot{X}_C + \frac{\mu m}{r^3} X_C = f_{X_C}(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C, t) \quad (57.90)$$

$$m\ddot{Y}_C + \frac{\mu m}{r^3} Y_C = f_{Y_C}(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C, t) \quad (57.91)$$

$$m\ddot{Z}_C + \frac{\mu m}{r^3} Z_C = f_{Z_C}(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C, t) \quad (57.92)$$

Comme une force perturbatrice est d'origine gravitationnelle, elle dérive d'un potentiel qu'on note R soit :

$$f = \text{grad} R \quad (57.93)$$

Alors les équations précédentes s'écrivent :

$$m\ddot{X}_C + \frac{\mu m}{r^3} X_C = \frac{\partial R}{\partial X_C} \quad (57.94)$$

$$m\ddot{Y}_C + \frac{\mu m}{r^3} Y_C = \frac{\partial R}{\partial Y_C} \quad (57.95)$$

$$m\ddot{Z}_C + \frac{\mu m}{r^3} Z_C = \frac{\partial R}{\partial Z_C} \quad (57.96)$$

Faisons un changement de variables telque :

$$h(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C) = g(a, e, i, \Omega, \omega, M) \quad (57.97)$$

Le système (57.94) à (57.96) devient un nouveau système différentiel d'ordre 2 de six inconnues de la forme :

$$\dot{a} = \Phi_a(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \quad (57.98)$$

$$\dot{e} = \Phi_e(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \quad (57.99)$$

$$\dot{i} = \Phi_i(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \quad (57.100)$$

$$\dot{\Omega} = \Phi_\Omega(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \quad (57.101)$$

$$\dot{\omega} = \Phi_\omega(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \quad (57.102)$$

$$\dot{M} = \Phi_M(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \quad (57.103)$$

Ces six nouvelles variables sont appelées les éléments osculateurs ou instantanés.

La solution des équations du mouvement est possible par une méthode analytique ou numérique. On peut dire que le satellite se mouve le long de l'orbite keplérienne, mais les éléments de l'orbite sont, dans ce cas, des fonctions du temps. On l'appelle orbite osculateur.

Comme f a été supposée petite, la solution du système d'équations des éléments osculateurs se présentera en général sous la forme :

$$a = a_0 + \delta a \quad (57.104)$$

$$e = e_0 + \delta e \quad (57.105)$$

$$i = i_0 + \delta i \quad (57.106)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \delta \Omega \quad (57.107)$$

$$\omega = \omega_0 + \delta \omega \quad (57.108)$$

$$M = M_0 + \delta M \quad (57.109)$$

où $\delta a, \delta e, \delta i, \delta \Omega, \delta \omega, \delta M$ seront des petites quantités. Elles sont appelées les perturbations des éléments de l'orbite. L'intérêt de l'emploi des variables osculatrices est que la solution est exprimée sous la forme d'un petit complément à des quantités fixes.

LE MOUVEMENT DE 2 CORPS

58.1 Le problème de deux corps

Soient deux corps $X_1(m_1)$ et $X_2(m_2)$ soumis à l'attraction universelle dans un repère ortho-normé $\mathcal{R}(O, e_1, e_2, e_3)$. Posons :

$$\begin{cases} \mathbf{OM}_1 = X_1(m_1) \\ \mathbf{OM}_2 = X_2(m_2) \end{cases} \quad (58.1)$$

Les équations de mouvement des points M_1, M_2 sont :

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{OM}_1}{dt^2} = -\mu m_1 m_2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{M_1 M_2^3} \quad (58.2)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{OM}_2}{dt^2} = -\mu m_2 m_1 \frac{\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1}{M_1 M_2^3} \quad (58.3)$$

avec μ la constante universelle de la gravitation. Or :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \mathbf{OM}_2 - \mathbf{OM}_1 = X_2 - X_1$$

Donc (58.2)-(58.3) s'écrivent :

$$\frac{d^2 X_1}{dt^2} = -\mu m_2 \frac{(X_2 - X_1)}{\|X_2 - X_1\|^3} \quad (58.4)$$

$$\frac{d^2 X_2}{dt^2} = -\mu m_1 \frac{(X_1 - X_2)}{\|X_2 - X_1\|^3} \quad (58.5)$$

Soit G le centre de gravité des deux corps M_1, M_2 , on a :

$$m_1 \mathbf{GM}_1 + m_2 \mathbf{GM}_2 = 0 \quad (58.6)$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{OM}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{OM}_2 \quad (58.7)$$

Posons :

$$M = m_1 + m_2 \quad (58.8)$$

$$\alpha = \frac{m_1}{M} \quad (58.9)$$

$$1 - \alpha = \frac{m_2}{M} \quad (58.10)$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{OG} = \alpha \mathbf{OM}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{OM}_2 = \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \quad (58.11)$$

Et en prenant la dérivée seconde, on obtient :

$$\alpha \frac{d^2 \mathbf{X}_1}{dt^2} + (1 - \alpha) \frac{d^2 \mathbf{X}_2}{dt^2} = 0 \quad (58.12)$$

Soit :

$$\frac{d^2 \mathbf{X}_2}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} \frac{d^2 \mathbf{X}_1}{dt^2} \quad (58.13)$$

Posons :

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{OG} \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{X}_1}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{Y}_1}{dt^2} \quad (58.14)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{OG} \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{X}_2}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{Y}_2}{dt^2} \quad (58.15)$$

Utilisant l'équation (58.13), on obtient :

$$\frac{d^2 \mathbf{Y}_2}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{X}_2}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} \frac{d^2 \mathbf{X}_1}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} \frac{d^2 \mathbf{Y}_1}{dt^2} \quad (58.16)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{Y}_1 + \mathbf{OG} = \mathbf{Y}_1 + \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \\ (1 - \alpha) \mathbf{X}_1 &= \mathbf{Y}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \Rightarrow \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = \frac{\mathbf{Y}_1}{1 - \alpha} \end{aligned} \quad (58.17)$$

L'équation (58.4) devient :

$$\frac{d^2 \mathbf{Y}_1}{dt^2} = -\mu M (1 - \alpha)^3 \frac{\mathbf{Y}_1}{\|\mathbf{Y}_1\|^3} \quad (58.18)$$

Or la solution de (58.18) est le mouvement képlérien vu précédemment. De l'équation (58.16), on a donc :

$$\frac{d^2 \mathbf{Y}_2}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1-\alpha} \frac{d^2 \mathbf{Y}_1}{dt^2} \quad (58.19)$$

Il s'ensuit que le point M_2 se mouve suivant un mouvement képlérien.

LES EQUATIONS DU MOUVEMENT DE 3 CORPS

On considère maintenant le problème général de trois corps soumis seulement à l'attraction universelle. Ce problème n'est pas encore résolu en présentant une expression finie des coordonnées en fonction du temps car le système est non intégrable. On essaie de donner dans ce rapport un développement approché du problème.

Soit un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ inertiel et 3 corps P_0, P_1 et P_2 de masse $m_i, i = 0, 1, 2$ considérés comme des masses ponctuelles.

59.1 EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les équations du mouvement sont données par :

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{OP}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=0, j \neq i}^2 \frac{m_i m_j \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_j \mathbf{P}_i\|^3} \quad (59.1)$$

où G est la constante universelle de gravitation de valeur égale à $(6673 \pm 1) \times 10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$.

Faisons la somme des équations (59.1), on obtient :

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{OP}_i}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (59.2)$$

En intégrant une première fois l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{OP}_i}{dt} = \text{vecteur constant} = \mathbf{V}_0 \quad (59.3)$$

Par suite :

$$\sum_i m_i \mathbf{OP}_i = t \cdot \mathbf{V}_0 + \mathbf{W}_0 \quad (59.4)$$

où \mathbf{W}_0 est un vecteur constant déterminé avec \mathbf{V}_0 par les conditions initiales du mouvement.

L'équation (59.4) est dite une intégrale première des équations du mouvement (59.1).

En plus, on a aussi la conservation du moment cinétique :

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{OP}_i}{dt} \wedge \mathbf{OP}_i = \text{constante} = \mathbf{C} \quad (59.5)$$

Soit G le centre de gravité ou barycentre des points P_i (à ne pas confondre avec la constante de la gravitation universelle), il est défini par :

$$m_0 \mathbf{GP}_0 + m_1 \mathbf{GP}_1 + m_2 \mathbf{GP}_2 = \mathbf{0} \quad (59.6)$$

Ce qui donne :

$$(m_0 + m_1 + m_2) \mathbf{OG} = m_0 \mathbf{OP}_0 + m_1 \mathbf{OP}_1 + m_2 \mathbf{OP}_2 \quad (59.7)$$

Soit :

$$M \cdot \mathbf{OG} = \sum_i m_i \mathbf{OP}_i = t \cdot \mathbf{V}_0 + \mathbf{W}_0 \quad (59.8)$$

avec :

$$M = m_0 + m_1 + m_2 \quad (59.9)$$

Cela veut dire que le mouvement du centre de gravité G est muni d'un mouvement rectiligne uniforme.

Ecrivons les équations (59.1) autrement :

$$\frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{GP}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=0, j \neq i}^2 \frac{m_j (\mathbf{GP}_i - \mathbf{GP}_j)}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j\|^3} \quad (59.10)$$

Or :

$$\frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (59.11)$$

Considérons un repère \mathcal{G} d'origine le point G et en gardant la même base que \mathcal{R} . Soient :

$$P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (59.12)$$

les coordonnées du point P_i pour $i = 0, 1, 2$ dans le repère \mathcal{G} .

59.1.1 Les équations du mouvement du point P_0

Ecrivons les équations du point P_0 , on a :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{Gm_1(x_0 - x_1)}{\|P_0P_1\|^3} - \frac{Gm_2(x_0 - x_2)}{\|P_0P_2\|^3} \quad (59.13)$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -\frac{Gm_1(y_0 - y_1)}{\|P_0P_1\|^3} - \frac{Gm_2(y_0 - y_2)}{\|P_0P_2\|^3} \quad (59.14)$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -\frac{Gm_1(z_0 - z_1)}{\|P_0P_1\|^3} - \frac{Gm_2(z_0 - z_2)}{\|P_0P_2\|^3} \quad (59.15)$$

ou encore :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0 \left(\frac{m_1}{\|P_0P_1\|^3} + \frac{m_2}{\|P_0P_2\|^3} \right) + \frac{Gm_1x_1}{\|P_0P_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|P_0P_2\|^3} \quad (59.16)$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -Gy_0 \left(\frac{m_1}{\|P_0P_1\|^3} + \frac{m_2}{\|P_0P_2\|^3} \right) + \frac{Gm_1y_1}{\|P_0P_1\|^3} + \frac{Gm_2y_2}{\|P_0P_2\|^3} \quad (59.17)$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -Gz_0 \left(\frac{m_1}{\|P_0P_1\|^3} + \frac{m_2}{\|P_0P_2\|^3} \right) + \frac{Gm_1z_1}{\|P_0P_1\|^3} + \frac{Gm_2z_2}{\|P_0P_2\|^3} \quad (59.18)$$

Comme :

$$\begin{aligned} \|P_0P_2\|^3 &= ((x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2)^{3/2} \\ &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2GP_2 \cdot GP_0)^{3/2} \end{aligned} \quad (59.19)$$

Posons :

$$\Delta_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \quad (59.20)$$

$$\Delta_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad (59.21)$$

$$\Delta_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \quad (59.22)$$

(59.19) devient :

$$\|P_0P_2\|^3 = (\Delta_0^2 + \Delta_2^2 - 2GP_2 \cdot GP_0)^{3/2} \quad (59.23)$$

En choisissant les points P_i tels que :

$$GP_2 < GP_1 < GP_0 \quad (59.24)$$

On peut écrire :

$$\|P_0P_2\|^3 = \Delta_0^3 \left(1 + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_0^2} - 2 \frac{GP_2 \cdot GP_0}{\Delta_0^2} \right)^{3/2} \quad (59.25)$$

Donc :

$$\frac{1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} \left(1 + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_0^2} - 2 \frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^2} \right)^{-3/2} \quad (59.26)$$

Au premier ordre, on peut écrire :

$$\frac{1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} \left(1 - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^2} + 3 \frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^2} \right) \quad (59.27)$$

Soit :

$$\frac{1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3 \frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.28)$$

De même :

$$\frac{1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_1^2}{2\Delta_0^5} + 3 \frac{\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.29)$$

D'où :

$$\frac{m_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} = \frac{m_1 + m_2}{\Delta_0^3} - 3 \frac{m_1\Delta_1^2 + m_2\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3 \frac{(m_1\mathbf{GP}_1 + m_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.30)$$

Or par la définition du point G , on a ;

$$m_0\mathbf{GP}_0 + m_1\mathbf{GP}_1 + m_2\mathbf{GP}_2 = \mathbf{0}$$

L'équation précédente devient :

$$\frac{m_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} = \frac{m_1 + m_2 - 3m_0}{\Delta_0^3} - 3 \frac{m_1\Delta_1^2 + m_2\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} \quad (59.31)$$

Considérons l'expression de $\frac{d^2x_0}{dt^2}$:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0 \left(\frac{m_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} \right) + \frac{Gm_1x_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3}$$

Elle devient en tenant compte de (59.31) :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0 \left(\frac{m_1 + m_2 - 3m_0}{\Delta_0^3} - 3 \frac{m_1\Delta_1^2 + m_2\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} \right) + \frac{Gm_1x_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} \quad (59.32)$$

Calculons les deux derniers termes :

$$\frac{Gm_1x_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{Gm_1x_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} &= Gm_1x_1 \left(\frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_1^2}{2\Delta_0^5} + \frac{3\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \right) + \\
&Gm_2x_2 \left(\frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + \frac{3\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \right) = \\
\frac{G(m_1x_1 + m_2x_2)}{\Delta_0^3} - \frac{3G(m_1x_1\Delta_1^2 + m_2x_2\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \frac{3G(m_1x_1\mathbf{GP}_1 + m_2x_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} &= \\
-\frac{Gm_0x_0}{\Delta_0^3} - \frac{3G(m_1x_1\Delta_1^2 + m_2x_2\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \frac{3G(m_1x_1\mathbf{GP}_1 + m_2x_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} & \quad (59.33)
\end{aligned}$$

Alors l'équation (59.32) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_0}{dt^2} &= -\frac{Gx_0(M - 3m_0)}{\Delta_0^3} + \frac{3G(m_1(x_0 - x_1)\Delta_1^2 + m_2(x_0 - x_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \\
&\frac{3G(m_1x_1\mathbf{GP}_1 + m_2x_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.34)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y_0}{dt^2} &= -\frac{Gy_0(M - 3m_0)}{\Delta_0^3} + \frac{3G(m_1(y_0 - y_1)\Delta_1^2 + m_2(y_0 - y_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \\
&\frac{3G(m_1y_1\mathbf{GP}_1 + m_2y_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.35)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z_0}{dt^2} &= -\frac{Gz_0(M - 3m_0)}{\Delta_0^3} + \frac{3G(m_1(z_0 - z_1)\Delta_1^2 + m_2(z_0 - z_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \\
&\frac{3G(m_1z_1\mathbf{GP}_1 + m_2z_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.36)
\end{aligned}$$

On pose :

$$\mu_0 = G(M - 3m_0) \quad (59.37)$$

$$r_0 = \Delta_0 \quad (59.38)$$

$$r_1 = \Delta_1 \quad (59.39)$$

$$r_2 = \Delta_2 \quad (59.40)$$

Alors, les équations (59.34),(59.35) et (59.36) s'écrivent :

$$\ddot{x}_0 + \frac{\mu_0}{r_0^3}x_0 = F_{x_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.41)$$

$$\ddot{y}_0 + \frac{\mu_0}{r_0^3}y_0 = F_{y_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.42)$$

$$\ddot{z}_0 + \frac{\mu_0}{r_0^3}z_0 = F_{z_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.43)$$

On retrouve les équations de mouvement de deux corps (57.90) à (57.92) avec la force perturbatrice \mathbf{F}_0 , avec ses composantes comme suit :

$$F_{x_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{3G(m_1(x_0 - x_1)\Delta_1^2 + m_2(x_0 - x_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \frac{3G(m_1x_1\mathbf{GP}_1 + m_2x_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.44)$$

$$F_{y_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{3G(m_1(y_0 - y_1)\Delta_1^2 + m_2(y_0 - y_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \frac{3G(m_1y_1\mathbf{GP}_1 + m_2y_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.45)$$

$$F_{z_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{3G(m_1(z_0 - z_1)\Delta_1^2 + m_2(z_0 - z_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \frac{3G(m_1z_1\mathbf{GP}_1 + m_2z_2\mathbf{GP}_2) \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.46)$$

59.1.2 Les équations du mouvement du point P_1

Ecrivons les équations du mouvement du point P_1 . De (59.10), on a :

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=0, j \neq i}^2 \frac{m_j(\mathbf{GP}_i - \mathbf{GP}_j)}{\|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\|^3}$$

ce qui donne vectoriellement :

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(\mathbf{GP}_1 - \mathbf{GP}_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(\mathbf{GP}_1 - \mathbf{GP}_2)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} \quad (59.47)$$

Pour les coordonnées x_1, y_1 , et z_1 , on a :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(x_1 - x_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(x_1 - x_2)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} \quad (59.48)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(y_1 - y_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(y_1 - y_2)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} \quad (59.49)$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(z_1 - z_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(z_1 - z_2)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} \quad (59.50)$$

Ecrivons l'équation en x_1 :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{Gm_2x_1}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(x_1 - x_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} \quad (59.51)$$

En gardant les termes du premier ordre de :

$$\frac{1}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3}$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} = & -\frac{Gm_2x_1}{\Delta_1^3} + \frac{3Gm_2x_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2x_1\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} \\ & + \frac{Gm_2x_2}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(x_1 - x_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} \end{aligned} \quad (59.52)$$

Posons :

$$\mu_1 = Gm_2 \quad (59.53)$$

Les équations de mouvement de P_1 deviennent :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r_1^3}x_1 = F_{x_1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.54)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r_1^3}y_1 = F_{y_1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.55)$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r_1^3}z_1 = F_{z_1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.56)$$

Avec :

$$F_{x_1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{3Gm_2x_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2x_1\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_2x_2}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(x_1 - x_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} \quad (59.57)$$

$$F_{y_1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{3Gm_2y_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2y_1\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_2y_2}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(y_1 - y_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} \quad (59.58)$$

$$F_{z_1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{3Gm_2z_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2z_1\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_2z_2}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(z_1 - z_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} \quad (59.59)$$

59.1.3 Les équations du mouvement du point P_2

Ecrivons les équations du mouvement du point P_2 . De (59.10), on a :

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_2}{dt^2} = -G \sum_{j=0, j \neq 2}^2 \frac{m_j(\mathbf{GP}_2 - \mathbf{GP}_j)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_j\|^3}$$

ce qui donne vectoriellement :

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(\mathbf{GP}_2 - \mathbf{GP}_0)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_1(\mathbf{GP}_2 - \mathbf{GP}_1)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.60)$$

Pour les coordonnées x_2, y_2 , et z_2 , on a :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(x_2 - x_0)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.61)$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(y_2 - y_0)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.62)$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(z_2 - z_0)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(z_2 - z_1)}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.63)$$

Comme au premier ordre, on a :

$$\frac{1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3\frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \quad (59.64)$$

De même :

$$\frac{1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} = \frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} + 3\frac{\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} \quad (59.65)$$

L'équation en x_2 s'écrit :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -Gx_2 \left(\frac{m_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \right) + \frac{Gm_0x_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.66)$$

Qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{Gm_2}{\Delta_2^3}x_2 &= \frac{Gm_2x_2}{\Delta_2^3} - Gx_2 \left(\frac{m_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \right) + \frac{Gm_0x_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \\ &= \frac{Gm_2x_2}{\Delta_2^3} - Gm_0x_2 \left(\frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3\frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} \right) - Gm_2x_2 \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} + 3\frac{\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} \right) + \\ &\quad + \frac{Gm_0x_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \end{aligned} \quad (59.67)$$

On pose :

$$\mu_2 = Gm_2 \quad (59.68)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}x_2 &= Gx_2 \left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3} \right) - \frac{3Gx_1}{2} \left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^2}{\Delta_1^5} \right) \\ &\quad - 3Gm_0x_2 \frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2x_2 \frac{\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0x_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \end{aligned} \quad (59.69)$$

Soit :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}x_2 = F_{x_2}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.70)$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}y_2 = F_{y_2}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.71)$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}z_2 = F_{z_2}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (59.72)$$

Avec :

$$\begin{aligned} F_{x_2}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & Gx_2 \left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3} \right) - \frac{3Gx_1}{2} \left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^3}{\Delta_1^5} \right) \\ & - 3Gm_0x_2 \frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2x_2 \frac{\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0x_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \end{aligned} \quad (59.73)$$

$$\begin{aligned} F_{y_2}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & Gy_2 \left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3} \right) - \frac{3Gy_1}{2} \left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^3}{\Delta_1^5} \right) \\ & - 3Gm_0y_2 \frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2y_2 \frac{\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0y_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2y_1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \end{aligned} \quad (59.74)$$

$$\begin{aligned} F_{z_2}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & Gz_2 \left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3} \right) - \frac{3Gz_1}{2} \left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^3}{\Delta_1^5} \right) \\ & - 3Gm_0z_2 \frac{\mathbf{GP}_2 \cdot \mathbf{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2z_2 \frac{\mathbf{GP}_1 \cdot \mathbf{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0z_0}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2z_1}{\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\|^3} \end{aligned} \quad (59.75)$$

59.2 LE MOUVEMENT RESTREINT DE DEUX CORPS

Pour simplifier les calculs, on considère que le corps P_2 est prépondérant en masse c'est-à-dire que $m_0 \ll m_2$ et $m_1 \ll m_2$. Dans ce cas, le centre de gravité G est confondu avec le point P_2 . Comme le centre de gravité est en mouvement rectiligne, on peut considérer que le point P_2 est fixe. Alors, on a le mouvement restreint de deux corps. Les équations de mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0 \left(\frac{m_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} \right) + \frac{Gm_1x_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.76)$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -Gy_0 \left(\frac{m_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} \right) + \frac{Gm_1y_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.77)$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -Gz_0 \left(\frac{m_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} \right) + \frac{Gm_1z_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.78)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(x_1 - x_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2x_1}{\|\mathbf{GP}_1\|^3} \quad (59.79)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(y_1 - y_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2y_1}{\|\mathbf{GP}_1\|^3} \quad (59.80)$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(z_1 - z_0)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2z_1}{\|\mathbf{GP}_1\|^3} \quad (59.81)$$

Aux équations précédentes, on ajoute l'équation :

$$H = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{GP}_i - \mathbf{GP}_j\|} = \text{constante} \quad (59.82)$$

qui représente l'hamiltonien et la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{GP}_i \right) = 0 \quad (59.83)$$

Les équations (59.76) à (59.81) peuvent s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_0}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\mathbf{GP}_0}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{GP}_0 - \mathbf{GP}_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.84)$$

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\mathbf{GP}_1}{\|\mathbf{GP}_1\|^3} - Gm_0 \frac{\mathbf{GP}_1 - \mathbf{GP}_0}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} \quad (59.85)$$

ou encore sous la forme :

$$\frac{1}{m_1} \cdot \frac{d^2\mathbf{GP}_0}{dt^2} + \frac{Gm_2}{m_1} \frac{\mathbf{GP}_0}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} = F_{12} \quad (59.86)$$

$$-\frac{1}{m_0} \cdot \frac{d^2\mathbf{GP}_1}{dt^2} - \frac{Gm_2}{m_0} \frac{\mathbf{GP}_1}{\|\mathbf{GP}_1\|^3} = F_{12} \quad (59.87)$$

avec :

$$F_{12} = -G \frac{\mathbf{GP}_0 - \mathbf{GP}_1}{\|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\|^3} = \text{fonction de } (\mathbf{GP}_0, \mathbf{GP}_1) \quad (59.88)$$

Le membre gauche de l'équation (59.86) est fonction des coordonnées de P_0 et du temps, de même le membre gauche de (59.87) est fonction des coordonnées de P_1 et du temps. Comme les deux équations (59.86) et (59.87) sont égales, on a alors nécessairement :

$$\frac{1}{m_1} \cdot \frac{d^2 \mathbf{GP}_0}{dt^2} + \frac{Gm_2}{m_1} \frac{\mathbf{GP}_0}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} = -\frac{1}{m_0} \cdot \frac{d^2 \mathbf{GP}_1}{dt^2} - \frac{Gm_2}{m_0} \frac{\mathbf{GP}_1}{\|\mathbf{GP}_1\|^3} = \Phi(t) \quad (59.89)$$

où $\Phi(t)$ est le vecteur :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \quad (59.90)$$

De (59.89), on a les deux équations :

$$\frac{d^2 \mathbf{GP}_0}{dt^2} + Gm_2 \frac{\mathbf{GP}_0}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} = m_1 \Phi(t) \quad (59.91)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{GP}_1}{dt^2} + Gm_2 \frac{\mathbf{GP}_1}{\|\mathbf{GP}_1\|^3} = -m_0 \Phi(t) \quad (59.92)$$

Il suffit de résoudre la première équation :

$$\frac{d^2 \mathbf{GP}_0}{dt^2} + Gm_2 \frac{\mathbf{GP}_0}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} = m_1 \Phi(t)$$

On commence par résoudre (59.91) sans second membre :

$$\frac{d^2 \mathbf{GP}_0}{dt^2} + Gm_2 \frac{\mathbf{GP}_0}{\|\mathbf{GP}_0\|^3} = 0 \quad (59.93)$$

Or cette équation a été résolue dans le [§ 57], on a le mouvement de P_0 par rapport au point P_2 . Les coordonnées de P_0 dans le repère (P_2, ξ, η, ζ) sont :

$$\xi = a(\cos E - e) \quad (59.94)$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (59.95)$$

$$\zeta = 0 \quad (59.96)$$

Pour tenir compte du deuxième membre, on cherche les solutions (ξ_1, η_1, ζ_1) et la fonction inconnue λ telles que :

$$\xi_1 = \lambda \xi = a\lambda(\cos E - e) \quad (59.97)$$

$$\eta_1 = \lambda \eta = a\lambda\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (59.98)$$

$$\zeta_1 = \lambda \zeta = \lambda \times 0 = 0 \quad (59.99)$$

et Ecrivons l'équation vectorielle (59.91) dans le repère (P_2, ξ, η, ζ) , on a alors :

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + Gm_2 \xi_1 \frac{1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^{3/2}} = m_1 \varphi_1 \quad (59.100)$$

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} + Gm_2 \eta_1 \frac{1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^{3/2}} = m_1 \varphi_2 \quad (59.101)$$

$$\frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} + Gm_2 \zeta_1 \frac{1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^{3/2}} = m_1 \varphi_3 \quad (59.102)$$

$$(59.103)$$

La dernière équation devient :

$$\frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = m_1 \varphi_3 = 0 \implies \varphi_3 = 0 \quad (59.104)$$

Calculons les dérivées premières et secondes de (59.97) :

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \dot{\lambda} \xi + \lambda \frac{d\xi}{dt} \quad (59.105)$$

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \ddot{\lambda} \xi + 2\dot{\lambda} \frac{d\xi}{dt} + \lambda \frac{d^2 \xi}{dt^2} \quad (59.106)$$

L'équation (59.100) devient :

$$\ddot{\lambda} \xi + 2\dot{\lambda} \frac{d\xi}{dt} + \lambda \frac{d^2 \xi}{dt^2} + Gm_2 \xi \frac{1}{\lambda^2 (\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} = m_1 \varphi_1 \quad (59.107)$$

soit :

$$\ddot{\lambda} \xi + 2\dot{\lambda} \frac{d\xi}{dt} + \lambda \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} + Gm_2 \xi \frac{1}{\lambda^3 (\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \right) = m_1 \varphi_1 \quad (59.108)$$

Or :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -Gm_2 \xi \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{\lambda} \xi + 2\dot{\lambda} \frac{d\xi}{dt} + Gm_2 \xi \lambda \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{\lambda^3} - 1 \right) = m_1 \varphi_1 \quad (59.109)$$

Or, on a en utilisant l'équation de Kepler (57.65) :

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 (1 - e \cos E)^2 \quad (59.110)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -a \sin E \frac{dE}{dt} = -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E} \quad (59.111)$$

L'équation (59.109) devient :

$$a(\cos E - e) \ddot{\lambda} - \frac{2na \sin E}{1 - e \cos E} \dot{\lambda} + \frac{Gm_2 (\cos E - e)}{a^2 (1 - e \cos E)^3} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda \right) = m_1 \varphi_1 \quad (59.112)$$

Littérature

1. **Helmut Moritz and Ivan I. Mueller.** 1988. *Earth Rotation :Theory and Observation.* Ungar Publishing Compagny. New York. 617p.
2. **Bruno Morando.** 1974. *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre.* Gordon & Breach, Paris, London et New York. 255p.