{ 3 }^{ p-1 }\quad \ncong \quad 1\quad mod({ p }^{ 3 })\quad IF\quad
'p'\quad \equiv \quad 1\quad mod(6)\\ \\ By\quad RAMASWAMY\quad
KRISHNAN\\ B7/203\quad VIJAY\quad PARK\quad THANE\quad INDIA-400615\\
email:-ramasa421@gmail.com\\ \\ SYNOPSIS\\ \\ If\quad f(a)\quad =\quad
1\quad -\quad { a }^{ p }\quad -\quad { (1-a) }^{ p }\quad \equiv
\quad 0\quad mod({ p }^{ 3 })\quad and\quad even\quad if\quad { a }
^{ 2 }-a+1\quad \ncong \quad 0\quad mod(p)\\ it\quad is\quad
prooved\quad that\quad f({ a }_{ r })\quad \equiv \quad 0\quad
mod({ p }^{ 3 })\quad .Then\quad using\quad the\quad fact\quad
that\quad if\\ { 3 }^{ p-1 }\quad \equiv \quad 1\quad mod({ p }^{ 3 })
\quad ,\quad { a }^{ 2 }+a+1\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ 3 })
\quad is\quad also\quad a\quad solution\quad to\quad \\ f(a)\quad
\equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ 3 }).\\ \\ PROOF:-\\ \\ f(a)\quad
=\quad 1\quad -\quad { a }^{ p }\quad -{ (1-a) }^{ p\quad }\quad
=\quad 1\quad -\quad { a }^{ p }\quad -\quad { b }^{ p }\quad \equiv
\quad 0\quad mod({ p }^{ 3 })------(1)\\ If\quad { P }_{ S }\quad
=\frac { 2 }{ p-2s+1 } \quad \frac { p-2s+1 }{ 2 } { C }_{ 2s-1 }
\quad ;\quad f(a)\quad =\quad p\quad \sum _{ 1 }^{ m }{ { P }_{ s } }
\quad { (ab) }^{ 2s-1 }\quad { (1-ab) }^{ \frac { p-6s+3 }{ 2 } }\\
Let\quad B\quad =\quad ab\quad { (1-ab) }^{ \frac { p-3 }{ 2 } }
\quad ;\quad K\quad =\quad \frac { { a }^{ 2 }{ b }^{ 2 } }{ { (1-
ab) }^{ 3 } } \quad ;\quad and\quad \Phi (K)\quad =\quad \sum { { P }
_{ s } } \quad { K }^{ s-1 }\\ \frac { 1 }{ p } \quad f(a)\quad =\quad
B\quad \Phi (K)\quad -------------------------------------(2)\\
\frac { dB }{ da } \quad =\quad \frac { 1 }{ 2 } \quad (b-a)\quad
{ (1-ab) }^{ \frac { p-5 }{ 2 } }\quad (2+ab-pab)\quad \ncong \quad
0\quad mod(p)\quad ------------(3)\\ \frac { dK }{ da } \quad =\quad
(b-a)\quad ab\quad (2+ab)\quad { (1-ab) }^{ -4\quad }\quad \ncong
\quad 0\quad mod(p)\quad -----------------(4)\\ \frac { 1 }{ p } \quad
f({ a }_{ 1 })\quad =\quad { B }_{ 1 }\quad \phi ({ K }_{ 1 })\quad ;
\quad And\quad \Phi ({ K }_{ 1 })\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }
^{ 2 })\\ { b }_{ 1 }^{ p-1 }\quad -\quad { a }_{ 1 }^{ p-1 }\quad
=\quad \phi ({ K }_{ 1 })\quad \frac { d{ B }_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } }
\quad +\quad { B }_{ 1 }\quad \phi '({ K }_{ 1 })\quad \frac { d{ K }
_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } } \quad \equiv \quad 0\quad mod(p)\quad \ncong
\quad 0\quad mod({ p }^{ 2 })\\ \therefore \quad \phi '({ K }_{ 1 })
\quad \equiv \quad 0\quad mod(p)\quad \ncong \quad 0\quad mod({ p }
^{ 2 })\quad \quad \quad ---------------------------------(5)\\
hence\quad \frac { \Phi ({ K }_{ 1 }) }{ \Phi '({ K }_{ 1 }) } \quad
\equiv \quad 0\quad mod(p)\\ \Phi ({ K }_{ 1 })\quad =\quad \frac
{ 1 }{ p } \frac { 1 }{ { B }_{ 1 } } \quad f({ a }_{ 1 })\quad
and\quad \Phi '({ K }_{ 1 })\quad \frac { d{ K }_{ 1 } }{ d{ a }
_{ 1 } } \quad =\quad \frac { { b }_{ 1 }^{ p-1 }-{ a }_{ 1 }
^{ p-1 } }{ { B }_{ 1 } } \quad -\quad \Phi ({ K }_{ 1 })\quad \frac
{ d{ B }_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } } \quad -----(6)\\ From\quad eqn\quad
(6):-\quad \frac { \Phi ({ K }_{ 1 }) }{ \Phi '({ K }_{ 1 }) } .p.
({ b }_{ 1 }^{ p-1 }\quad -\quad { a }_{ 1 }^{ p-1 })\quad =\quad
f({ a }_{ 1 })\quad \{ \quad \frac { d{ K }_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } } +
\frac { 1 }{ { B }_{ 1 } } .\frac { \Phi ({ K }_{ 1 }) }{ \Phi '({ K }
_{ 1 }) } .\frac { d{ B }_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } } \quad \} --(7)\\

LHS\quad of\quad eqn\quad (7)\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }
^{ 3 })\quad and\quad \ncong \quad 0\quad mod({ p }^{ 4 }).\quad \quad
\quad Therefore\\ \{ \quad \frac { d{ K }_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } } +
\frac { 1 }{ { B }_{ 1 } } .\frac { \Phi ({ K }_{ 1 }) }{ \Phi '({ K }
_{ 1 }) } .\frac { d{ B }_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } } \quad \} \quad
\ncong \quad 0\quad mod(p)----------(8),\quad \quad So\quad for\quad
{ a }_{ 3 }\quad eqn\quad (7)\\ becomes\quad \frac { \Phi ({ K }
_{ 3 }) }{ \Phi '({ K }_{ 3 }) } .p.({ b }_{ 3 }^{ p-1 }\quad -\quad
{ a }_{ 3 }^{ p-1 })\quad =\quad f({ a }_{ 3 }).\{ \quad \frac
{ d{ K }_{ 3 } }{ d{ a }_{ 3 } } +\frac { 1 }{ { B }_{ 3 } } '\frac
{ \Phi ({ K }_{ 3 }) }{ \Phi '({ K }_{ 3 }) } .\frac { d{ B }_{ 3 } }
{ d{ a }_{ 3 } } \quad \} ------(8)\\ As\quad LHS\quad of\quad
eqn\quad (8)\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ 5 })\quad \quad
f({ a }_{ 3 })\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ 5 })------(9)\\
\therefore \quad f({ a }_{ 2 })\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }
^{ 5 })-------(10)\\ \\ Thus\quad by\quad PMI\quad \quad \quad \quad
\quad \quad f({ a }_{ r })\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }
^{ 2r+1 })-------------------(11)\\ \\ Let\quad p\quad \equiv \quad
1\quad mod(6)\quad and\quad \quad { 3 }^{ p-1 }\quad \equiv \quad
1\quad mod({ p }^{ 3 })\quad \\ { a }^{ 2 }+a+1\quad \equiv \quad
0mod(p)\quad or\quad { a }_{ r }^{ 2 }+{ a }_{ r }+1\quad \equiv \quad
0\quad mod({ p }^{ r })\\ { a }_{ 1 }^{ 2 }+{ a }_{ 1 }+1\quad =\quad
{ (1-{ b }_{ 1 }) }^{ 2 }+(1-{ b }_{ 1 })+1=\quad { b }_{ 1 }
^{ 2 }-3{ b }_{ 1 }+3=\quad { b }_{ 1 }^{ 2 }+3(1-{ b }_{ 1 })=\quad
{ b }_{ 1 }^{ 2 }+3a\quad \equiv \quad 0\quad mod(p)\\ { b }_{ 1 }
^{ 2 }\quad \equiv \quad -3a\quad mod(p)\quad \therefore \\ { b }
_{ 1 }^{ 2p }\quad \equiv \quad -{ 3 }^{ p }{ a }_{ 1 }^{ p }\quad
mod({ p }^{ 2 })\quad \equiv \quad -3{ a }_{ 1 }^{ p }\quad \equiv
\quad -3{ a }_{ 2 }\quad mod({ p }^{ 2 })\quad \equiv \quad { b }
_{ 2 }^{ 2 }\quad mod({ p }^{ 2 })\quad \quad \therefore \\ { b }
_{ 1 }^{ p }\quad \equiv { \quad { b }_{ 2 }\quad }mod({ p }^{ 2 })
\quad ie\quad { (1-{ a }_{ 1 }) }^{ p }\quad \equiv \quad 1-{ a }
_{ 1 }^{ p }\quad mod({ p }^{ 2 })\quad --------(12)\quad \quad \quad
\quad \quad \therefore \\ f({ a }_{ 1 })\quad \equiv \quad 0\quad
mod({ p }^{ 2 })\quad similarly\\ f({ a }_{ 2 })\quad \equiv \quad
0\quad mod({ p }^{ 3 })\quad \quad hence\quad f({ a }_{ r })\quad
\equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ 2r+1 })\quad \quad ----------(13)\quad
therefore\\ { 3 }^{ p-1 }\quad \quad \equiv \quad 1\quad mod({ p }
^{ r })\quad for\quad all\quad values\quad of\quad r\quad \\ This\quad
is\quad possible\quad only\quad if\quad p\quad =\quad 1\\ hence\quad
\quad { 3 }^{ p-1 }\quad \ncong \quad 1\quad mod({ p }^{ 3 })\quad
If\quad p\quad \equiv \quad 1\quad mod(6)\\ \\

------\\ \\ \quad \quad \quad \quad \\ \\ \\