Доказательство гипотезы Коллатца

КУРМЕТ СУЛТАН

Абстракт: В статье приводиться доказательство гипотезы Коллатца. Доказано, что вычисление функции Коллатца $C(n)$ применением чисел вида $6m \pm 1,\ m \in \mathbb{N}$ эквивалентно вычислению применением любых положительных целых чисел. Далее доказано, что если на основе элементов множества $G = \{g|g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и 1 провести обратное вычисление по формулам $((6n \pm 1) \cdot 2^q - 1)/3$ и $(2^q - 1)/3$, то каждому числу вида $6n \pm 1$ и 1 будут соответствовать бесконечное число целых чисел вида $3t, 6m - 1$ и $6m + 1$. Затем показано, что если построить граф чисел, путем соединения равных чисел $6n \pm 1$ и $6m \pm 1$, являющихся соответственно элементами множества G и числами-предшественниками, то образуется граф-дерево. Граф-дерево, каждая вершина которого соответствует числам вида $6m \pm 1$, является доказательством гипотезы Коллатца, так как любая его вершина связана с конечной вершиной, связанной с единицей.

Ключевые слова: гипотеза Коллатца, проблема $3n + 1$, сиракузская проблема, доказательство.
MSC CLASSIFICATION CODE: 11D04
1708.0177

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза Коллатца, известная также как проблема $3n + 1$, сиракузская проблема, является одной из нерешенных проблем математики. Можно отметить следующие работы посвященные проблеме $3n + 1$ [1, 2, 3].

Функция Коллатца $C(n)$ определяется на натуральных числах следующим образом:

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & \text{если } n - + \text{ четное,} \\ 3n + 1, & \text{если } n - \text{нечетное.} \end{cases} \quad (1)$$

Для объяснения гипотезы Коллатца, берем любое натуральное число n, если оно четное, то делим его на 2, а если нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1, тогда получим четное число. Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее. Гипотеза Коллатца заключается в том, что какое бы начальное число n ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

2. СТАРТОВОЕ ЧИСЛО

Теорема 1. Вычисление функции Коллатца $C(n)$, когда для вычисления применяются только числа вида $6m \mp 1$, равнозначно вычислению $C(n)$ применением любых положительных целых чисел.

Теорема 1 основывается на следующей закономерности:

Если вычисление функции Коллатца проводить по формуле

$$C = (3n + 1)/2^q, \text{ где } n, q \in N, \quad (2)$$

до получения целого числа, то в зависимости от типа числа n получится следующие результаты для функции Коллаца $C(n)$:

1) Если n – четное, то $C(n)$ – нечетное или 1;
2) Если n – нечетное число кратное 3, то $C(n)$ – нечетное число имеющий вид $6m \mp 1$или 1;
3) Если n – нечетное число вида $6m \mp 1$, то $C(n)$ – нечетное имеющий вид $6n \mp 1$ или 1.

Доказательство Теоремы 1.

1.1. Очевидно, что если вычисление функции Коллатца начать с четных чисел, то получится нечетное число или 1.

1.2. Если вычисление функции Коллатца начать с нечетных чисел кратных 3, то получится число имеющий вид $6m \mp 1$или 1.

Это объясняется следующим образом. Если нечетные числа вида $3t$ умножить на 3 и прибавить 1, то очевидно, что получиться числа имеющий вид $3s + 1$. При этом если число имеющий вид $3s + 1$ является нечетным, то, безусловно, оно будет числом вида $6m + 1$. А если число вида $3s + 1$ является четным числом, то, при делении на 2 (один или несколько раз) до получения нечетного числа, образуется число вида $6m \mp 1$ или 1, так как число вида $3s + 1$ не делиться на 3.

1.3. Понятно, что все числа вида $6m + 1$ и $6m - 1$ являются нечетными числами. Если умножить нечетное число на 3 и прибавить 1, то естественно получиться четное число вида $3s+1$. А при делении четных чисел вида $3s+1$ на два (один или несколько раз) до получения нечетного числа, то полученные нечетные числа будут иметь вид $6n \mp 1$ или 1, так как числа вида $3s+1$ не делятся на 3.

Из вышесказанного следует, что Теорема 1 доказано.

2. ОБРАТНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Определение 1. Числа, из которых при вычислении функции Коллатца получится рассматриваемое число, называется числами-предшественниками.

Чисел-предшественников для любого элемента множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и числа 1 можно установить путем проведения обратного вычисления. Для этих целей можно использовать следующие формулы

$$r_g = (g \cdot 2^q - 1)/3\,, r_1 = (2^q - 1)/3\,, \text{ где } g = 6n \mp 1, n \in N. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что с повышением значения показателя степени двойки q повышается значения r_g и r_1, и это будет продолжаться бесконечно. Отметим, что при обратном вычислении по формуле (3) целые числа образуют множества, элементами которых являются числа вида $3t$; $6m-1$; $6m+1$, которые будут чередоваться. Примеры обратного вычисления приводятся в Приложении 1.

Из Теоремы 1 следует, что при обратном вычислении функции Коллатца каждому элементу множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и числу 1 сопоставляется элементы соответственно множеств

$$R_g = \{v, r | v = 3t;\ r = 6m \mp 1;\ t, m \in N\}, \quad (4)$$

$$R_1 = \{v_1, r_1 | v_1 = 3t;\ r_1 = 6m \mp 1, t, m \in N\}, \quad (5)$$

При этом каждое множество R_g, сопоставляемые определенному элементу g множества G и числу 1, являются не пересекающимся. Иными словами, элементы множества R_g сопоставляемые одному элементу g множества G не будет повторяться в других множествах. Это доказывается следующим образом: Пусть два элемента принадлежащие двум множествам R_i и R_j будут равны, тогда получим следующее равенство

$$(g_1 \cdot 2^{q_1} - 1)/3 = (g_2 \cdot 2^{q_2} - 1)/3 \quad \text{или} \quad g_1/g_2 = 2^{q_2}/2^{q_1}.$$

Последнее равенство не имеет решение в целых числах, так как правая часть равенства равна четному числу или 1 (если $q_1 \leq q_2$), а левая часть равенства равна нечетному или нецелому числу, так как g_1 и g_2 являются нечетным числами, причем $g_1 \neq g_2$.

Нетрудно доказать, что элементы множества R_1 не содержаться во множествах R_g, так как, если $q_1 \leq q_2$, то

$$(1 \cdot 2^{q_1} - 1)/3 \neq (g \cdot 2^{q_2} - 1)/3 \quad \text{или} \quad 1/g \neq 2^{q_2}/2^{q_1}.$$

Отметим, что если из множеств R_g и R_1 отделить элементы соответствующие числам вида $6m \mp 1$ и объединить их в одно множество, то получим множество $K = \{k | k = 6m \mp 1, m \in N\}$, состоящих только из чисел-предшественников. Это означает, что множества G и K состоят из одинаковых чисел, т.е. состоят из одних и тех же элементов. При этом может возникать следующий вопрос: *Действительно ли все числа-предшественники содержатся во множестве К?*

Отметим, что если один и более элементы множества K не являются числами-предшественниками, то это означает, что графы корневые вершины которых соответствует этим элементам не могут соединятся с общим графом.

Теорема 2. Все элементы множества $K = \{k|k = 6m \mp 1, m \in N\}$ *сопоставляются элементам множества* $G = \{g|g = 6n \mp 1, n \in N\}$ *и числу 1, т.е. являются числами-предшественниками.*

Теорема 2 доказываются следующим образом: Пусть один или более элементы множества K не являются числами-предшественниками, тогда при вычислении функции Коллатца применением этих элементов не должны получиться числа имеющие вид $6n \mp 1$ или число 1, это противоречит пункту 1.3 доказательства Теоремы 1, значит Теорема 2 верна и она доказана.

Если вышесказанное представить графический, то получим бесконечно много микрографов соответствующему каждому элементу множества G и числу 1, каждый из которых похож на букет шаров, привязанной на один шар. Схема графов числа 1 и числа вида $6n \mp 1$ с шестью числами показаны на рисунке 1.

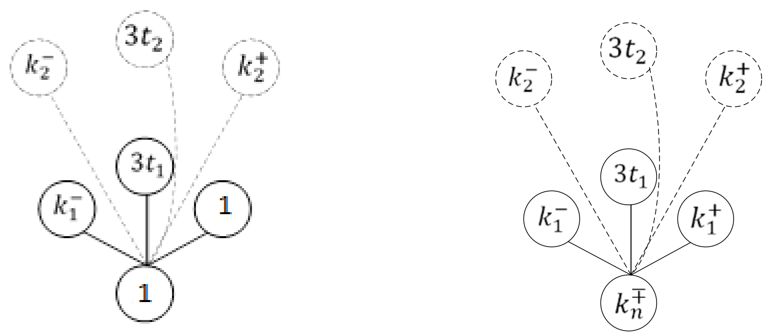

Рисунок 1. Микрографы соответствующее числу 1 и одному элементу множества G

Примечание: $k^- = 6m - 1, k^+ = 6m + 1,\ k^\mp = 6n \mp 1.$

Фактический каждому элементу множества G и числу 1 сопоставляется бесконечно много чисел вида $3t$ и $6m \mp 1$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТСУТСТВИЯ ЦИКЛОВ

Известно, что если при вычислении функции Коллатца вместо формулы $3n+1$ использовать формулу $3n-1$, то в некоторых случаях частное значение функции будет равно аргументу функции предыдущей итерации, из-за чего вычисление повторяется бесконечно. Подобная ситуация в теории графа называется циклическим путем (или контуром).

Таким образом, если частное значение функции Коллатца через один и более итерации будет равно числу, используемого в качестве аргумента для вычисления функции на старте, то образуется цикл функции Коллатца.

Сначала рассмотрим двух итерационный цикл функции. Двух итерационный цикл функции Коллатца для чисел вида $k^{\mp} = 6m \mp 1$ можно выразить следующими двумя уравнениями,

$$1.\quad (3k_0^{\mp}+1)/2^{q_1} = k_1^{\mp};\quad 2.\ (3k_1^{\mp}+1)/2^{q_2} = k_2^{\mp};\ \ q_i, k_i^{\mp} \in N. \quad (6)$$

Если частное значение функции Коллатца $k_2^{\mp}$, полученное на второй итерации будет равно стартовому числу или аргументу функции на первой итерации $k_0^{\mp}$=$k_1^{\mp}$, то образуется двух итерационный цикл функции.

Далее, считая, что $k_2^{\mp}$=$k_0^{\mp}$, и решая совместно вышеприведенные два уравнения, найдем $k_0^{\mp}$,

$$(3((3k_0^{\mp}+1)/2^{q_1})+1)/2^{q_2} = k_0^{\mp}. \quad (7)$$

$$3^2k_0^{\mp}/2^{q_1+q_2} + 3^1/2^{q_1+q_2} + 3^0/2^{q_2} = k_0^{\mp}. \quad (8)$$

Умножив обе части уравнения (8) на 2^{q_2} получим

$$3^2k_0^{\mp}/2^{q_1} + 3/2^{q_1} + 1 = k_0^{\mp}2^{q_2}. \quad (9)$$

$$3/2^{q_1} + 1 = k_0^{\mp}(2^{q_2} - 3^2/2^{q_1}). \quad (10)$$

Далее умножив обе части уравнения (10) на 2^{q_1} получим

$$3 + 2^{q_1} = k_0^{\mp}(2^{q_2+q_1} - 3^2). \tag{11}$$

Из (11) найдем $k_0^{\mp}$,

$$k_0^{\mp} = \frac{2^{q_1}+3}{2^{q_1+q_2}-3^2}. \tag{12}$$

Таким образом, если стартовое число или частное значение функции Коллатца при аргументе $k_0^{\mp}$ будет равно числу являющейся решением уравнения (12), то при вычислении образуется цикл функции.

Используя вышеприведенный алгоритм получим нижеследующую формулу предназначенная для n – ной итерации

$$k_0^{\mp} = \frac{3^{n-1}2^0+3^{n-2}2^{q_1}+3^{n-3}2^{q_1+q_2}+\dots+3^2 2^{Q-(q_{n-2}+q_{n-1}+q_n)}+3^1 2^{Q-(q_{n-1}+q_n)}+3^0 2^{Q-q_n}}{2^Q-3^n}, \tag{13}$$

где $k_0^{\mp}$ - стартовое число, $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n$; i −порядковый номер итерации, n −общее количество итерации.

Для удобства можно представит в следующем компактном виде

$$k_0^{\mp} = \frac{S}{2^Q-3^n}, \tag{14}$$

где $S = 3^{n-1}2^0 + 3^{n-2}2^{q_1} + 3^{n-3}2^{q_1+q_2} + \dots + 3^2 2^{Q-(q_{n-2}+q_{n-1}+q_n)} + 3^1 2^{Q-(q_{n-1}+q_n)} + 3^0 2^{Q-q_n}$.

Формула (2.13) является частным случаем следующий Теоремы [?].

Theorem 0.2. *Let $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ with $k \le \ell$ and $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{N}_0$ with $u_1 < u_2 < \dots < u_k < \ell$. Furthermore, let*

$$n := \frac{\sum_{i=1}^{k} 3^{k-i} 2^{u_i}}{2^\ell - 3^k}. \tag{0.2}$$

If $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ then n is the starting value of a non-trivial cycle of f_1, i.e. the Collatz conjecture is false.

Далее, прежде чем доказать отсутствие цикла при вычислении функции $(3\,n + 1)/\,2^q$, покажем закономерности между числами предшественниками и элементами множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и числа 1.

Как было отмечено выше, если провести обратное вычисления по формулам (3) и (4) используя каждый элемент множества G и число 1, то получим числа-предшественники для каждого элемента G и числа 1. Пример обратного вычисления приводятся в Таблицах 1.1 и 1.2 Приложения 1.

Элементы множества G и соответствующие им числа-предшественников можно вычислить по формулам арифметической прогрессии, которые приведены в следующей Таблице 1, для q: 1, 2, 3, 5, 6.

Как следует из Таблицы 1, все числа вида $6n \mp 1$ в зависимости от чисел-предшественников можно разделить на 6 типов, которые выражаются арифметическими прогрессиями. При этом отметим, что дальнейшее повышение показателя степени 2 не влияет на типы чисел, однако первые члены арифметических прогрессий будут другими. Например, при q =9 формула $k_t^{\mp} = 13 + 2^3 \cdot 6t$ будет иметь вид $k_t^{\mp} = 853 + 2^9 \cdot 6t$.

С учетом этого формулу (13) представим в следующем виде

$$k_0^{\mp} + 18t = \frac{S}{2^Q - 3^n}, \qquad (15)$$

где $k_0^{\mp} = 5, 7, 11, 13, 17, 19$; $t = 0, 1, 2, \ldots$

Если уравнение (15) имеет решение при $t > 0$, то оно должно иметь решение и при $t = 0$, так как в этом случае уравнение (15) будет иметь вид

$$k_0^{\mp} = \frac{S}{2^Q - 3^n} - 18t. \qquad (16)$$

Также верно обратное утверждение: Если уравнение (16) не имеет решение, то уравнение (15) также не имеет решения.

Таблица 1. Формулы для вычисления чисел-предшественников функции $(3n+1)/2^q$

		Формулы чисел-предшественников $k_t^{\mp}$ при разных показателях степени 2					
		q =1	q =2	q =3	q =4	q =5	q =6
0	1		1		5		
1	$5+3\cdot 6t$			$13+2^3\cdot 6t$		$53+2^3\cdot 6t$	
2	$7+3\cdot 6t$				$37+2^4\cdot 6t$		$149+2^6\cdot 6t$
3	$11+3\cdot 6t$	$7+2^1\cdot 6t$		$29+2^3\cdot 6t$			
4	$13+3\cdot 6t$		$17+2^2\cdot 6t$				$277+2^6\cdot 6t$
5	$17+3\cdot 6t$	$11+2^1\cdot 6t$				$181+2^5\cdot 6t$	
6	$19+3\cdot 6t$		$25+2^2\cdot 6t$		$101+2^4\cdot 6t$		

Примечание. Числу 1 на при в зоне q: 1, 2, 3, 5, 6 соответствует два числа-предшественника 1 и 5, что приведены на строке с порядковым номером 0.

Это означает, если при вычислении функции $(3n+1)/2^q$ со стартовыми числами $5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, 19$ цикл не будет, то цикла не будет при любых числах вида $6n \mp 1$.

Таким образом, поскольку известно, что при вычислении функции $(3n+1)/2^q$ со стартовыми числами $5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, 19$ цикла не будет, то цикла не будет при любых числах вида $6n \mp 1$.

Вопрос 1. Почему при вычислении функции $(3n-1)/2^q$ в некоторых случаях образуются циклы, а в графе образуются замкнутые пути ?

Ответ на этот вопрос сформулируем на основе вышеприведенного утверждения для функции $(3n+1)/2^q$. В данном случае также как для функции $(3n+1)/2^q$ числа вида $6n \mp 1$ в зависимости от чисел-предшественников можно разделить на 6 типов, которые выражаются арифметическими прогрессиями.

Таким образом, для функции $(3n-1)/2^q$ можно утверждать следующее: Если при вычислении функции $(3n-1)/2^q$ с стартовым числом $k_0^{\mp}$ создается цикл, то цикл будет и при стартовым числе $k_0^{\mp} + 3 \cdot 6t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$

Например, известно, что при следующих данных $q_1 = 1;\ q_2 = 2;\ k_1^{\mp} = 5;\ k_2^{\mp} = 7$, при вычислении функции $(3n-1)/2^q$ образуется цикл. Отсюда следует, что при вычислении функции $(3n-1)/2^q$ использованием в качестве стартовых числа вида $5 + 3 \cdot 6t$ и $7 + 3 \cdot 6t$ также должны образоваться цикл (или должно получиться 1). Например, если стартовать с чисел 23 и 31, то при вычислении функции $(3n-1)/2^q$ образуется цикл.

Отметим, что если при вычислении функции $(3n+1)/2^q$ использовать целые отрицательные числа, то в некоторых случаях образуются цикл. Это связано тем, что графы функций $(3(-n)+1)/2^q$ и $(3n-1)/2^q$ эквивалентны, так абсолютные значения чисел (или модуль чисел), получаемых в результате вычисления, в обоих случаях равны.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ

Поскольку каждое число вида $6m \mp 1$ являющейся элементом множества K и соответствующее верхним вершинам графа элементов множества G и числа 1, равно определенному элементу множества G, то все графы можно объединить в один общий граф путем соединения равных чисел. Объединение графов производиться следующим образом.

Сначала определяются числа вида $6m \mp 1$ соответствующие верхним вершинам графа числа 1, затем выбираются графы элементов множества G, корневые вершины которых равны верхним вершинам графа 1. После этого на верхние вершины графа числа 1 устанавливаются выбранные графы элементов множества G, путем соединения равных чисел, соответствующих верхним вершинам графа 1 и корневым вершинами графов выбранных элементов множества G. Далее на верхние вершины графов, установленных на графе числа 1, устанавливаются другие графы других элементов множества G, путем подбора равных чисел. Далее, повторяя такую процедуру получим один объемный бесконечно растущий граф-дерево, каждая вершина которого будет иметь связь с числом 1.

На рисунке 2 показан пример объединения двух плоских графов, соответствующих элементам 5 и 13 множества G.

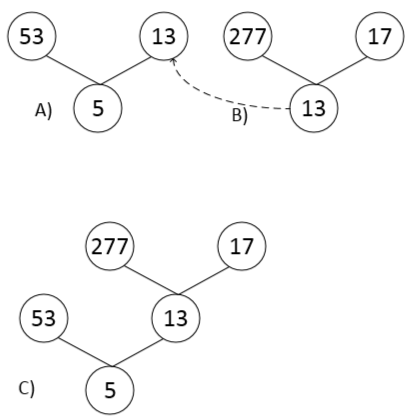

Рисунок 2. Пример объединения двух графов

Отметим, что числа кратные 3 не участвуют в формировании общего графа, хотя каждый граф, включая граф числа 1, содержит таких чисел. Тем не менее для полноты картины их тоже можно показать на общем графе. Общий граф-дерево включающие чисел кратных 3 будет иметь вид, как это показано на рисунке 3.

Из графа-дерева, показанного на рисунке 3, следует, что каждая вершина имеет свое число кратное 3. Вместе с тем, числа кратные 3, как показано на рисунке 3, не оказывают влияния на формирования структуры графа. Если начать вычисление с чисел кратных 3, то путь стыкуются с вершиной, соответствующей числу вида $6n \mp 1$, а далее путь будет продолжена по структуре графа. Данная структура соответствует утверждению о том, что при вычислении функции Коллатца на основе чисел кратных 3 получиться числа вида $6n \mp 1$.

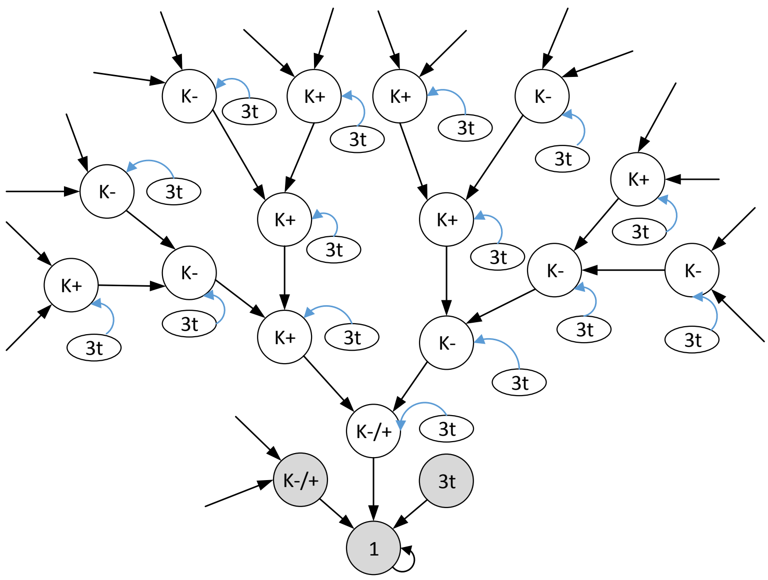

Рисунок 3. Ориентированный граф-дерево, включающий чисел кратных 3

На рисунке 3 две нижние закрашенные вершины со знаками $K -/+$ и $3t$, которые связаны с вершиной 1, символизируют, что чисел вида $6n \mp 1$ и чисел кратных 3, которые при вычислении функции Коллатца будут равны степени двойки, бесконечно много. При этом такие числа вида $6n \mp 1$ формируют свои ветви в графе-дереве. Стрелка, исходящая из вершины 1 и направленная туда же (петля) показывает, что если вычисление функции Коллатца начать с числа 1, то получиться 1.

Если на общем графе-дереве показать и четные числа $(2t)$, то получим граф показанный на рисунке 4.

Отметим, что графы, показанные на рисунках 3 и 4 построены на основе первых трех чисел-предшественников элементов множества G и числа 1, поэтому они являются плоскими. Фактически общий граф-дерево являются трехмерным, так как каждому элементу множества G и числа 1 соответствуют бесконечно много чисел-предшественников.

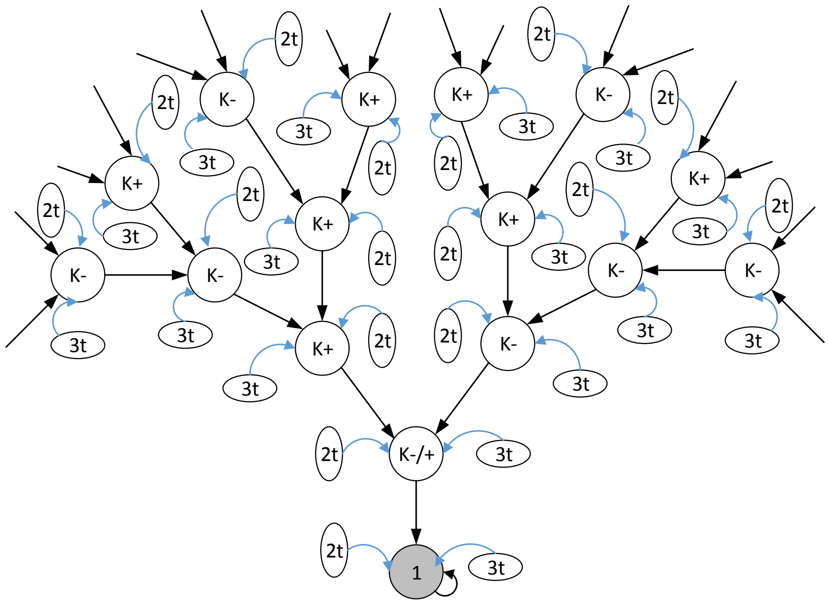

Рисунок 4. Ориентированный граф-дерево с четными и нечетными числами.

Таким образом, доказано, что если число 1 и все элементы множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$, а также чисел-предшественников соответствующих числу 1 и элементам множества G объединить в виде графа, то образуются общий трехмерный граф-дерево, каждая вершина которого связана с конечной вершиной, связанной с единицей. Отсюда следует, что гипотеза Коллатца верна, и она доказана.

ССЫЛКИ

[1] L. Collatz, On the motivation and origin of the (3n + 1) – Problem, J. Qufu Normal University, Natural Science Edition, 12(3) (1986) 9–11.

[2] J. C. Lagarias, The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem, American Mathematical Society, 2010.

[3] Terens Tao, Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values. arXiv:1909.03562 [math.PR]

Приложение 1. ПРИМЕР ОБРАТНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Таблица 1.1. Обратное вычисление функции Коллатца по формуле $r = ((6n \mp 1) \cdot 2^q - 1)/3$, где $q = 0,1,2,3$ ....

n	q=1-6						q=7-12					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,333333	1	2,333333	5	10,33333	21	42,33333	85	170,3333	341	682,3333	1365
3	1,666667	3,666667	7,666667	15,66667	31,66667	63,66667	127,6667	255,6667	511,6667	1023,667	2047,667	4095,667
5	3	6,333333	13	26,33333	53	106,3333	213	426,3333	853	1706,333	3413	6826,333
7	4,333333	9	18,33333	37	74,33333	149	298,3333	597	1194,333	2389	4778,333	9557
9	5,666667	11,66667	23,66667	47,66667	95,66667	191,6667	383,6667	767,6667	1535,667	3071,667	6143,667	12287,67
11	7	14,33333	29	58,33333	117	234,3333	469	938,3333	1877	3754,333	7509	15018,33
13	8,333333	17	34,33333	69	138,3333	277	554,3333	1109	2218,333	4437	8874,333	17749
15	9,666667	19,66667	39,66667	79,66667	159,6667	319,6667	639,6667	1279,667	2559,667	5119,667	10239,67	20479,67
17	11	22,33333	45	90,33333	181	362,3333	725	1450,333	2901	5802,333	11605	23210,33
19	12,33333	25	50,33333	101	202,3333	405	810,3333	1621	3242,333	6485	12970,33	25941
21	13,66667	27,66667	55,66667	111,6667	223,6667	447,6667	895,6667	1791,667	3583,667	7167,667	14335,67	28671,67
23	15	30,33333	61	122,3333	245	490,3333	981	1962,333	3925	7850,333	15701	31402,33
25	16,33333	33	66,33333	133	266,3333	533	1066,333	2133	4266,333	8533	17066,33	34133
27	17,66667	35,66667	71,66667	143,6667	287,6667	575,6667	1151,667	2303,667	4607,667	9215,667	18431,67	36863,67
29	19	38,33333	77	154,3333	309	618,3333	1237	2474,333	4949	9898,333	19797	39594,33
31	20,33333	41	82,33333	165	330,3333	661	1322,333	2645	5290,333	10581	21162,33	42325
33	21,66667	43,66667	87,66667	175,6667	351,6667	703,6667	1407,667	2815,667	5631,667	11263,67	22527,67	45055,67
35	23	46,33333	93	186,3333	373	746,3333	1493	2986,333	5973	11946,33	23893	47786,33

Таблица 1.2. Вычисление чисел-предшественников формулами арифметической прогрессии

		3+12t	1+24t	13+48t	5+96t	53+192t	21+384t	213+768t	85+1536t	853+3072t	341+6144t	3413+12288t	1365+24576t
		7+12t	9+24t	29+48t	37+96t	117+192t	149+384t	469+768t	597+1536t	1877+3072t	2389+6144t	7509+12288t	9557+24576t
		11+12t	17+24t	45+48t	69+96t	181+192t	277+384t	725+768t	1109+1536t	2901+3072t	4437+6144t	11605+12288t	17749+24576t
g		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1			1		5		21		85		341		1365
5	1	3		13		53		213		853		3413	
7	2		9		37		149		597		2389		9557
11	3	7		29		117		469		1877		7509	
13	4		17		69		277		1109		4437		17749
17	5	11		45		181		725		2901		11605	
19	6		25		101		405		1621		6485		25941
23	1	15		61		245		981		3925		15701	
25	2		33		133		533		2133		8533		34133
29	3	19		77		309		1237		4949		19797	
31	4		41		165		661		2645		10581		42325
35	5	23		93		373		1493		5973		23893	
37	6		49		197		789		3157		12629		50517
41	1	27		109		437		1749		6997		27989	
43	2		57		229		917		3669		14677		58709
47	3	31		125		501		2005		8021		32085	
49	4		65		261		1045		4181		16725		66901
53	5	35		141		565		2261		9045		36181	