About conservation the angular momentum for asymmetric tensors in electrodynamics

Yurii A. Spirichev

The State Atomic Energy Corporation ROSATOM, "Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering" - branch of Federal Scientific-Production Center "Production Association "Start" named after Michael V.Protsenko", Zarechny, Penza region, Russia

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

(Dated: August 6, 2017)

Abstract

It is customary to assume that the law of conservation of the angular momentum is violated for an asymmetric energy-momentum tensors. This is the reason for criticizing the Minkowski tensor and other asymmetric energy-momentum tensors. In this paper, it is shown that the laws of conservation of energy and momentum following from an asymmetric tensor in the form of its total divergence are equivalent to the divergence of its symmetric part. It is shown that the total divergence of the antisymmetric part of the asymmetric tensor is identically zero. From this, it follows that for the asymmetric energy-momentum tensor the law of conservation of the angular momentum is also fulfilled. It is shown that the linear invariant of the Minkowski tensor for a vacuum does not correspond to the quadratic invariant of the electromagnetic field. This indicates that the linear invariant of the Minkowski tensor and the three-dimensional stress tensor are not correct.

Keywords: Energy-momentum tensor, electromagnetic momentum, angular momentum

1. Introduction

The tensors of energy-momentum (EMT) play a fundamental role in the description of nature. Of them, follow the equations of laws of conservation of energy and momentum. The problem of choosing the EMT and the shape of the electromagnetic momentum of the interaction of the electromagnetic field with the medium has a long history and is the subject of numerous research and discussions. In recent years on this issue published papers [1-51]. In these articles discusses the forms EMT, the electromagnetic momentums in the medium, the power of Abraham and other electromagnetic forces. In discussions on this issue, typically consider Minkowski and Abraham EMT. The main argument against Minkowski EMT is its asymmetry. The asymmetrical EMT is credited with the violation of the law of conservation of angular momentum. This negative feature makes researchers, starting with Abraham, to build different variants of the symmetric EMT [52-57]. Electromagnetic momentum is a part of EMT, so his form is also the subject of debate. In these discussions competing forms of Minkowski momentums and the Abraham. The density of the electromagnetic momentum of Minkowski has the form $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$. The density of the electromagnetic momentum of Abraham has the form $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$. Here $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ - respectively, the electric field strength and electric induction; **H** and **B** are, respectively, the magnetic field intensity and magnetic induction. There are a number of experimental work for determining which of these form conform better to the reality. In paper [1] reviewed the experiments work on this problem and made their analysis, from which it follows that hitherto not obtained reliable experimental evidence of the correctness of any one of these forms of electromagnetic momentum. Thus, until recently, this fundamental question of electrodynamics remained open. In paper [4] from the tensors of the electromagnetic field and electromagnetic induction mathematically strictly obtained the EMT of the interaction of electromagnetic field with the dielectric medium, from which it follows the equations of conservation and the wave equations for energy and momentum. In paper [5] obtained the EMT of the interaction of electromagnetic field with a conducting environment (charges and currents). These EMT are asymmetric, leading to criticism from supporters of the use of symmetric tensors. Indeed, from a symmetric tensor of mechanical energy-momentum follows be covariant equation of conservation of mechanical momentum and angular momentum $\partial_t \mathbf{p}^M + \partial_m \sigma^M_{mn} = \mathbf{F}^E_{ext}$, where σ^M_{mn} - a three-dimensional tensor of flux density of mechanical momentum, or stress tensor; $\mathbf{F}^E_{ext}$ - is the electric force, which are third-party forces. The covariant equation of conservation of electromagnetic momentum $\mathbf{p}^{\mathrm{E}}$ in a continuous medium has the form [58, 59] $\partial_t \mathbf{p}^E + \partial_m \sigma^E_{mn} = \mathbf{F}^M_{ext}$, where σ^E_{mn} - a three-dimensional tensor of flux density of electromagnetic momentum or stress tensor; $\mathbf{F}^M_{ext}$ - the mechanical forces that are third-party forces. In this case, mechanical forces are a reaction of the environment on electromagnetic forces. We can write make a complete covariant equation of balance of mechanical and electromagnetic forces $\mathbf{F}^M_{ext} = \mathbf{F}^E_{ext}$ or $\partial_t \mathbf{p}^E + \partial_m \sigma^E_{mn} = \partial_t \mathbf{p}^M + \partial_m \sigma^M_{imn}$. More generally this equation can be written in the form of a four-dimensional divergence of the tensor of energy-momentum for each of the indices [6]: $\partial^\mu T^E_{\mu\nu} = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$ and $\partial^\nu T^E_{\mu\nu} = \partial^\nu T^M_{\mu\nu}$, where $T^E_{\mu\nu}$ and $T^M_{\mu\nu}$, respectively, electromagnetic and mechanical the energy-momentums tensors. If $T^E_{\mu\nu}$ is a symmetric tensor, then there are no questions, since this equation is the equality of divergences of symmetric tensors. However, if it $T^E_{\mu\nu}$ is asymmetric tensor, this question requires special consideration. The purpose of this article is to examine the issue of conservation of electromagnetic energy, momentum and angular momentum for asymmetric EMTs.

2. The asymmetric tensors of electromagnetic energy-momentum

The canonical EMT written in the General form:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3;\ i, k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

where W – energy density;

S – Energy flux density (Poynting vector);

g – Momentum density;

$\boldsymbol{t}_{ik}$ – tensor of the momentum flux density (the stress tensor)

The second rank tensor has a divergence for each of the indexes:

$$\partial^{\mu} T^{E}_{\mu\nu} = \partial^{\mu} T^{M}_{\mu\nu} \text{ и } \partial^{\nu} T^{E}_{\mu\nu} = \partial^{\nu} T^{M}_{\mu\nu} \tag{2}$$

For a symmetric mechanical energy-momentum tensor, the divergences for each of the indices are equal. Therefore, the right-hand sides of these equations are equal. Divergences for each index exist simultaneously, so they can be written as a sum of divergences by taking the sum of equations (2):

$$(\partial^{\mu} T^{E}_{\mu\nu} + \partial^{\nu} T^{E}_{\mu\nu})/2 = \partial^{\mu} T^{M}_{\mu\nu} \tag{3}$$

Asymmetric tensor $T^{E}_{\mu\nu}$ can be decomposed into an antisymmetric $T^{E}_{[\mu\nu]}$ and symmetric $T^{E}_{(\mu\nu)}$ tensors:

$$T^{E}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\cdot T^{E}_{[\mu\nu]} + \frac{1}{2}\cdot T^{E}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} 0 & i\frac{1}{c}\mathbf{S} - ic\cdot\mathbf{g} \\ -i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} - t_{ki} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} 2W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g} \\ i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} + t_{ki} \end{bmatrix} \tag{4}$$

It is obvious that the divergences of the antisymmetric tensor $T^{E}_{[\mu\nu]}$ is equal in absolute value and have different signs. Therefore, the sum of its divergences equal to zero. Then the left-hand side of equation (3) will contain only two equal divergences with respect to different indices of the symmetric EMT $T^{E}_{(\mu\nu)}$, and equation (3) can be written in the form:

$$\partial^{\mu} T^{E}_{(\mu\nu)} = \partial^{\mu} T^{M}_{\mu\nu} \tag{5}$$

where, taking into account the coefficient ½ $T^{E}_{(\mu\nu)} = \begin{bmatrix} W & (i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g})/2 \\ (i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g})/2 & (t_{ik} + t_{ki})/2 \end{bmatrix}$. Now on the right and left sides of this equation there are symmetric EMT, therefore, in this equation the angular momentum is conserved. Then the existing view that an asymmetric EMT violates the law of conservation of angular momentum is incorrect. The reason for the erroneous view is that usually divergence is research only for one of the indices of the energy-momentum tensor. Then in the equation of conservation of the electromagnetic momentum, the Abraham vortex force appears $\mathbf{F}_A = \partial_t \mathbf{g}^M - \partial_t \mathbf{g}^A = \nabla\times(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H})$ [60]. Then the vortex force of the Abraham leads to the appearance of an uncompensated angular momentum (the effect of Feigele) and to the violation of the angular momentum conservation law. This error leads to the fact that some authors [61 - 67] and others are considering the possibility of extracting this angular momentum from a vacuum. The

Abraham force follows from an antisymmetric EMT in the form of its divergence by any of the indices. In full divergence of the asymmetric and antisymmetric EMT, the Abraham force enters with different signs and vanishes. Thus, the complete divergence of the antisymmetric tensor $T^{E}_{[\mu\nu]}$ proves that the Abraham force is identically equal to zero and does not really exist in nature. Consequently, there is no uncompensated moment of momentum in nature, and it is impossible to extract it from the vacuum.

All complete conservation laws for energy and momentum follow from the symmetric part $T^{E}_{(\mu\nu)}$ of the asymmetric tensor $T^{E}_{\mu\nu}$. Therefore, to each asymmetric EMT there corresponds a symmetric EMT associated with it, which can be used for practical calculations.

To asymmetric tensor of Minkowski corresponds (subject to the coefficient ½) the symmetric EMT:

$$W = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2 \qquad \mathbf{S} = (c^2\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\times\mathbf{H})/2$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2 \qquad t_{ik} = (E_i D_k + E_k D_i + B_i H_k + B_k H_i)/2 - \delta_{ik}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})/2$$

To asymmetric EMT obtained in the work [4], corresponds (subject to the coefficient ½) the symmetric EMT:

$$W = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \qquad \mathbf{S} = (c^2\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\times\mathbf{H})/2$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2 \qquad t_{ik} = (E_i D_k + E_k D_i + B_i H_k + B_k H_i)/2 - 3\cdot\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{6}$$

This EMT has the remarkable feature that distinguishes it from other known EMT. Its linear invariant (the sum of diagonal components) is the expression $I = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$. For vacuum, this invariant is the canonical quadratic invariant of the electromagnetic field $I = E^2 - B^2$, which is the density of Lagrangian function of electromagnetic field [68]. This EMT differs from Minkowski's tensor only by diagonal components, but this difference is of principal importance, since it is associated with electromagnetic forces in the medium. From this invariant it follows that the electromagnetic forces in the medium can change sign depending on the ratio of the electric and magnetic characteristics of the medium, associated with the **D** and **H**.

Linear invariant of Minkowski tensor has the form $I^M = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$. Linear Invariant of tensor Minkowski for the electromagnetic field in vacuum has the form $I^M = E^2 + B^2$. This invariant is quadratic for the electromagnetic field. For an electromagnetic field in a vacuum, there are only two quadratic invariants: $I_1 = E^2 - B^2$ и $I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$. From this, it follows that the Minkowski's invariant is invalid. It follows from this that the three-dimensional Minkowski stress tensor describing the electromagnetic forces is also incorrect.

In paper [5] obtained asymmetric tensor for a conducting medium $T^{E}_{\mu\nu} = \mathbf{A}_\mu \otimes \mathbf{J}_\nu$, where $\mathbf{A}_\mu$ - the electromagnetic potential, $\mathbf{J}_\nu$ - four-dimensional current density. Its components have the form:

$W = \rho \cdot \varphi$ - the density of total electromagnetic energy, where ρ - is the charge density, φ - is the scalar potential of the electromagnetic field;

$\mathbf{g} = \rho \cdot \mathbf{A}$ - the density of electromagnetic momentum, where A - is the vector potential of the electromagnetic field;

$\mathbf{S} = \varphi \cdot \mathbf{J}$ - the flux density of electromagnetic energy, where J - is the current density;

$t_{ik} = -\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k$ - the three-dimensional tensor of flux density of electromagnetic momentum or stress tensor.

This asymmetric tensor also can be decomposed into antisymmetric and symmetric EMT (4). Of the antisymmetric EMT follows an equation of force of Abraham for a conducting medium in the form of its divergence, on any of the indexes $\mathbf{F}_A = \partial_t(\rho \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi \cdot \mathbf{J}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J})$. In the complete divergences of asymmetric and antisymmetric tensors, the Abraham force enters with different signs and is equal to zero. To asymmetric tensor for a conducting medium corresponds (subject to the coefficient ½) the symmetric EMT:

$$W = \rho \cdot \varphi \qquad \mathbf{S} = (\varphi \cdot \mathbf{J} + c^2 \cdot \rho \cdot \mathbf{A})/2$$

$$\mathbf{g} = ((\varphi \cdot \mathbf{J})/c^2 + \rho \cdot \mathbf{A})/2 \qquad t_{ik} = (\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k + \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{J}_i)/2 \tag{7}$$

Linear symmetric invariant of this tensor has the form:

$$I = \varphi \cdot \rho - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$$

This invariant is known in electrodynamics [69] as the density of the Lagrangian of the interaction of electromagnetic field with electrical charges.

3. Forms of an electromagnetic momentums for asymmetric tensors

The density of electromagnetic momentum in the dielectric medium in the of Minkowski form has the form $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$. The density of electromagnetic momentum in the of Abraham form has the form $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$. Consider the differences of these two forms of electromagnetic momentums. Sommerfeld A. [70] divided the electromagnetic quantities connected with the force and associated with the medium. To the quantities connected with the force, he related the electric field strength **E** and the induction of the magnetic field **B**. To the quantities connected with the medium, he referred to the electric induction **D** and the intensity of the magnetic field **H**. The connections between **E** and **D**, **B** and **H** are determined by the material equations. For weak electromagnetic fields in isotropic non-ferromagnetic dielectric medium without dispersion is usually take the material equations in the form $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu \cdot \mu_0$, where ε_0 and μ_0 are, respectively, the relative dielectric permittivity and magnetic permeability of the medium. Electric induction **D** and the magnetic field strength **H**, respectively, depend on electric and magnetic characteristics of the medium. Then the density of electromagnetic momentum of Minkowski $\mathbf{g}^M = \mathbf{D}\times\mathbf{B}$, which includes electric induction **D**, describes the portion of the electromagnetic momentum associated with the electrical characteristics of the medium. The density of electromagnetic momentum Abraham $\mathbf{g}^A = \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2$, which includes the magnetic field strength H describes the part of the electromagnetic momentum associated with the magnetic characteristics of the medium. From this it follows that each of these forms describes only part of the full electromagnetic momentum. Out the asymmetric tensor (6) in the form of the divergences for each of its indices, follow equations of conservation for both forms of momentum density. The full form of the density of electromagnetic momentum in the dielectric medium has the form:

$$\mathbf{g}^E = (\mathbf{g}^M + \mathbf{g}^A)/2 = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2.$$

Of asimmetryc tensor for conducting medium also follow the two forms of the density of electromagnetic momentum: 1) $\mathbf{g}^E = \rho\cdot\mathbf{A}$ и 2) $\mathbf{g}^E = \varphi\cdot\mathbf{J}/c^2$. The first electromagnetic momentum shape associated with the charges density, and the second shape associated with the speed of their movement. From the decomposition of an asymmetric EMT into a symmetric and antisymmetric EMT, the total shape of the electromagnetic pulse density for a conducting medium follows in the form:

$$\mathbf{g}^E = (\varphi\cdot\mathbf{J}/c^2 + \rho\cdot\mathbf{A})/2$$

This density form of the electromagnetic momentum may find application in the theoretical research of the dynamics of the plasma.

4. Full equations of conservation of electromagnetic energy and momentum for an asymmetric tensors

The equations of conservation of electromagnetic energy and momentum are the full four-dimensional divergences of the asymmetric tensor $T^E_{\mu\nu}$: $(\partial^\mu T^E_{\mu\nu} + \partial^\nu T^E_{\mu\nu})/2 = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$ or its symmetric part $\partial^\mu T^E_{(\mu\nu)} = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$. The three-dimensional equations of conservation of density of energy and momentum for dielectric media with losses are of the form:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) + c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B} + (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2)/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \qquad (8)$$

$$(\frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) + \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V})$$

ore $$\partial_t(\mathbf{g}^A + \mathbf{g}^M)/2 - (\partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) + \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}), \qquad (9)$$

where m - is the mass density of charges; **p** - is the density of mechanical momentum, **V** - is the velocity of the charges.

If the dielectric medium is described by the canonical constitutive equations with a scalars ε and μ, the off-diagonal components of the stress tensor t_{ik} equal to zero. Then the electromagnetic forces acting on the medium, are determined only by diagonal components of tensor t_{ik} and equations (8) and (9) can be written as:

$$\frac{\varepsilon\cdot\varepsilon_0}{c}\partial_t E^2 + c\cdot\nabla\cdot(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B} + (\mathbf{E}\times\mathbf{B})/\mu\cdot\mu_0\cdot c^2)/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \tag{10}$$

$$\partial_t(\mathbf{g}^A + \mathbf{g}^M)/2 - \nabla(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot E^2 - 2\cdot B^2/\mu\cdot\mu_0)/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}) \tag{11}$$

The full three-dimensional equations of conservation of energy and momentum for a conducting medium (the density of charges and currents) have the following form:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi\cdot\rho) + (\nabla\cdot(\rho\cdot\mathbf{A}) + \frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\varphi\cdot\mathbf{J}))/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \tag{12}$$

$$(\frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi\cdot\mathbf{J}) + \partial_t(\rho\cdot\mathbf{A}) + \partial_i(\mathbf{A}_i\otimes\mathbf{J}_k) + \partial_k(\mathbf{A}_i\otimes\mathbf{J}_k))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}) \tag{13}$$

Equations (10) and (12) are the complete equations of conservation of energy and equation (9), (11) and (13) are the equations of balance of density of electromagnetic and mechanical forces. Equations (12) and (13) can be used in plasma physics to model the motion of charged particles in an electromagnetic field.

5. Conclusion

The widespread opinion that the asymmetric of energy-momentum tensor violates the law of conservation of momentum is incorrect. The full divergence of a tensor of the second rank is equal to the sum of the divergences for each of its indexes. Full asymmetrical divergence of a EMT is the divergence of its symmetric part, i.e. a symmetric EMT. The full divergence of the antisymmetric part is identically equal to zero. The angular momentum for the asymmetric tensor is preserved, since the momentum conservation equations follows from of its symmetric part.

Derived all forms of electromagnetic momentum for dielectric and conducting medium and the complete equations of conservation of energy and momentum. It is shown that the linear invariant of the tensor of Minkowski does not match the quadratic invariant of the electromagnetic field. This indicates the incorrectness of the linear invariant of the of the Minkowski tensor and three-dimensional stress tensor.

References

1. I. Brevik, *Minkowski momentum resulting from a vacuum–medium mapping procedure, and a brief review of Minkowski momentum experiments*, Annals of Physics 377 (2017) 10–21.

2. Rodrigo Medina and J. Stephany, *The energy-momentum tensor of electromagnetic fields in matter*, arXiv:1703.02109.
3. Mario G. Silveirinha, *Revisiting the Abraham-Minkowski Dilemma*, arXiv: 1702.05919.
4. Yu. A. Spirichev, *A new form of the energy-momentum tensor of the interaction of an electromagnetic field with a non-conducting medium. The wave equations. The electromagnetic forces*, arXiv: 1704.03815.
5. Yu. A. Spirichev, *About the Abraham force in a conducting medium*, arXiv: 1707.008642.
6. J. J. Bisognano, *Electromagnetic Momentum in a Dielectric: a Back to Basics Analysis of the Minkowski-Abraham Debate*, arXiv: 1701.08683.
7. Yu. A. Spirichev, *Electromagnetic energy, momentum and forces in a dielectric medium with losses*, arXiv: 1705.08447.
8. M. E. Crenshaw, *The Role of Conservation Principles in the Abraham--Minkowski Controversy*, arXiv: 1604.01801.
9. C. Wang, *"Is the Abraham electromagnetic force physical?"* Optik, (2016) 127, 2887–2889.
10. P. L. Saldanha, J. S. Oliveira Filho, *Hidden momentum and the Abraham-Minkowski debate*, arXiv: 1610.05785.
11. M. Testa, *A Comparison between Abraham and Minkowski Momenta*, Journal of Modern Physics, 2016, 7, 320-328.
12. C.J. Sheppard, B.A. Kemp, Phys. Rev. A 93 (2016) 053832.
13. I. N. Toptygin, K. Levina, Phys. Usp. **59** 141 (2016)
14. V. V. Nesterenko, A. V. Nesterenko, *Ponderomotive forces in electrodynamics of moving medium: The Minkowski and Abraham approaches*, arXiv: 1604.01708
15. V. V. Nesterenko and A. V. Nesterenko, J. Math. Phys. 57, 032901 (2016).
16. V. V. Nesterenko and A. V. Nesterenko, J. Math. Phys. 57, 092902 (2016).
17. C. Wang, J. Ng, M. Xiao, C.T. Chan, Sci. Adv. 2 (2016) e1501485.
18. H. Choi, M. Park, D. S. Elliott, K. Oh, *Optomechanical Measurement of the Abraham Force in an Adiabatic Liquid Core Optical Fiber Waveguide*, arXiv: 1501.05225.
19. L. Zhang, W. She, N. Peng, U. Leonhardt, New J. Phys. 17 (2015) 053035
20. G. Verma and K. P. Singh, Phys. Rev. Lett. 115, 143902 (2015)
21. S.M. Barnett, R. Loudon, New J. Phys. 17 (2015) 063027.
22. B.A. Kemp, Progr. Opt. 60 (2015) 437.
23. I. Brevik, *Explanation for the transverse radiation force observed on a vertically hanging fiber*, arXiv: 1401.6545.
24. I. Brevik, Trans. Roy. Norw. Soc. Sci. Lett. (3) (2014) 83. arXiv: 1310.3684 [quant-ph].
25. U. Leonhardt, Phys. Rev. A 90 (2014) 033801.

26. N.G.C. Astrath, L.C. Malacarne, M.L. Baesso, G.V.B. Lukasievicz, S.E. Bialkowski, Nature Commun. **5** (2014) 4363.
27. T. Ramos, G. F. Rubilar and Yu. N. Obukhov, *First principles approach to the Abraham-Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive media*, arXiv: 1310.0518.
28. Yu. N. Obukhov, *First principles approach to the Abraham-Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive medium*, arXiv: 1310.0518v2.
29. M. Testa, Ann. Phys. (NY) 336 (2013).
30. N.S. Aanensen, S.E. Ellingsen, I. Brevik, Phys. Scr. 87 (2013) 055402.
31. M. Mansuripur, A.R. Zakharian, E.M. Wright, Phys. Rev. A 88 (2013) 023826.
32. I. Brevik and S. E. Ellingsen, *Detection of the Abraham force with a succession of short optical pulses*, Phys. Rev. A 86, 025801 (2012).
33. D. J. Griffiths, Amer. J. Phys. 80 (2012) 7.
34. V. P. Makarov and A.A. Rukchadze, Phys. Usp. **54** 1285 (2011)
35. V. G. Veselago, Phys. Usp. **54** 1161 (2011)
36. M.E. Crenshaw and T.B. Bahder, *Energy-momentum tensor of the electromagnetic field in a dielectric*, Opt. Comm. 284 (2011) 2460-2465.
37. Pablo L. Saldanha, *Division of the Energy and of the Momentum of Electromagnetic Waves in Linear Medium into Electromagnetic and Material Parts*, arXiv: 1102.0491
38. B.A. Kemp, J. Appl. Phys. 109 (2011) 111101.
39. G.L.J.A. Rikken, B.A. van Tiggelen, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 170401.
40. I. Brevik and S.E. Ellingsen, Ann. Phys. 326 (2011) 754.
41. R. Wunenburger, B. Issenmann, E. Brasselet, C. Loussert, V. Houstane, J.P. Delville, J. Fluid Mech. 666 (2011) 273.
42. V. G. Veselago and V. V. Shchavlev, Phys. Usp. **53** 317 (2010)
43. M.V. Davidovich, Phys. Usp. **53** 595 (2010)
44. S. Barnett, *Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma*, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 070401.
45. P.L. Saldanha, *Division of the momentum of electro- magnetic waves in linear medium into electromagnetic and material parts*, Optics Express 18 (2010) 2258-2268.
46. M. Mansuripur, *Resolution of the Abraham-Minkowski contro*versy, Opt. Comm. 283 (2010) 1997-2005.
47. I. Brevik and S. E. Ellingsen, *Transverse radiation force in a tailored optical fiber*, Phys. Rev. A (R) 81, 011806 (2010)
48. S.M. Barnett, R. Loudon, Phil. Trans. R. Soc. A 368 (2010) 927.
49. C. Baxter, R. Loudon, J. Modern Opt. 57 (2010) 830.

50. S.M. Barnett, Phys. Rev. 104 (2010) 070401.
51. P.W. Milonni, R.W. Boyd, Adv. Opt. Photonics 2 (2010) 519.
52. M. Abragam, Be.Circ. mat. Palermo **28**, 1 (1909); **31**, 527 (1910).
53. F.J. Belinfante, *Physica* **6**, 887 (1939).
54. L.P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP 12 1008 (1961).
55. V.G. Polevoi, S.M. Rytov, Sov. Phys. Usp. **21** 630 (1978).
56. Yu. N. Obukhov Ann. Phys. **17** 9/10 830 (2008).
57. V.P. Makarov, A.A. Rukchadze, Phys. Usp. **54** 1285 (2011).
58. V. L. Ginzburg, Sov. Phys. Usp. **16** 434 (1973)
59. V. L. Ginzburg and V. A. Ugarov, Sov. Phys. Usp. **19** 94 (1976)]
60. Yu. A. Spirichev, *Equation for the Abraham force in non-conducting medium and methods for its measurement*, arXiv: 1704.03368.
61. A. Feigel, Phys. Rev. Lett. 93, 268904 (2004).
62. K. Yu. Bliok and F. Nori, *Transverse and longitudinal angular momenta of Light*, arXiv: 1504.03113.
63. O. A. Croze, *Does the Feigel effect break the first law?*, arXiv: 1304.3338.
64. Yu. N. Obukhov and F. W. Hehl, *Forces and momenta caused by electromagnetic waves in magnetoelectric media*, arXiv: 0710.2219.
65. O. J. Birkeland and Iver Brevik, *On the Feigel effect: extraction of momentum from vacuum?* arXiv: 0707.2528.
66. G.L.J.A. Rikken and B.A. van Tiggelen, *Magneto-electric momentum transfer to atoms and molecules*, arXiv: 1107.5284.
67. K. Yu. Bliokh and Yu. P. Bliokh, *Conservation of Angular Moment*um, Transverse Shift, and Spin Hall Effect in Reflection and Refraction of Electromagnetic Wave Packet, arXiv: 0508.093.
68. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983).
69. J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, (Wiley, New York, 1975).
70. A. Zommerfeld, *Electrodinamix*, (M. 1958).

О сохранении момента импульса в электродинамике для несимметричного тензора энергии-импульса

Юрий А. Спиричев

Государственная корпорация по атомной энергии "Росатом". Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация

Принято считать, что для несимметричного тензора энергии-импульса нарушается закон сохранения момента импульса. Это является причиной критики тензора Минковского и других несимметричных тензоров энергии-импульса. Показано, что законы сохранения энергии и импульса, вытекающие из несимметричного тензора в виде его полной дивергенции, эквивалентны дивергенции его симметричной части, а полная дивергенция антисимметричной части несимметричного тензора тождественно равна нулю. Из этого следует, что для несимметричного тензора энергии-импульса закон сохранения момента импульса также выполняется. Следовательно, каждому несимметричному тензору энергии-импульса соответствует свой симметричный тензор, из которого вытекают законы сохранения. Получены симметричные тензоры, соответствующие несимметричному тензору Минковского и другим известным несимметричным тензорам энергии-импульса. Получены полные формы электромагнитного импульса и полные уравнения сохранения для несимметричных тензоров энергии-импульса. Показано, что линейный инвариант тензора Минковского для вакуума не соответствует квадратичному инварианту электромагнитного поля. Это указывает на неправильность линейного инварианта тензора Минковского и трехмерного тензора напряжений.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, электромагнитный импульс, момент импульса.

Содержание

1. Введение

Тензоры энергии-импульса (ТЭИ) играют фундаментальную роль в описании природы, так как из них следуют уравнения законов сохранения энергии и импульса. Проблема выбора

ТЭИ и формы электромагнитного импульса взаимодействия электромагнитного поля со средой имеет долгую историю и является предметом многочисленных исследований и дискуссий. В последние годы по этой проблеме опубликованы работы [1-51] и др. В этих статьях рассматриваются формы ТЭИ, формы электромагнитного импульса в среде, сила Абрагама и другие электромагнитные силы. В дискуссиях по этому вопросу обычно рассматривают ТЭИ Минковского и Абрагама. Главным аргументом против ТЭИ Минковского является его несимметричность. Несимметричному ТЭИ приписывают нарушение закона сохранения момента импульса. Такое отрицательное свойство заставляет исследователей, начиная с Абрагама, заниматься построением различных вариантов симметричных ТЭИ [52 - 57]. Электромагнитный импульс является составной частью ТЭИ, поэтому форма импульса также является предметом дискуссий. В этих дискуссиях конкурируют формы импульса Минковского и Абрагама. Плотность электромагнитного импульса в форме Минковского имеет вид $\mathbf{g}^M = \mathbf{D}\times\mathbf{B}$. Плотность электромагнитного импульса в форме Абрагама имеет вид $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2$. Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ – соответственно, напряженность электрического поля и электрическая индукция; $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ – соответственно, напряженность магнитного поля и магнитная индукция. Выполнен ряд экспериментальных работ по определению того, какая из этих форм лучше соответствует реальности. В обзоре [1] рассмотрены экспериментальные работы по этой проблеме и сделан их анализ, из которого следует, что до настоящего времени не получено достоверных экспериментальных доказательств правильности какой-либо одной из этих форм электромагнитного импульса. Таким образом, до недавнего времени этот фундаментальный вопрос электродинамики оставался открытым. В работе [4] из тензоров электромагнитного поля и электромагнитной индукции математически строго получен ТЭИ взаимодействия электромагнитного поля с диэлектрической средой, из которого получены уравнения сохранения и волновые уравнения для энергии и импульса в диэлектрической среде. В работе [5] получен ТЭИ взаимодействия электромагнитного поля с проводящей средой (зарядами и токами), который ранее в электродинамике отсутствовал. Эти ТЭИ являются несимметричными, что приводит к критике со стороны сторонников применения симметричных тензоров. Действительно, из симметричного тензора механической энергии-импульса следует ковариантное уравнение сохранения механического импульса и момента импульса $\partial_t \mathbf{p}^M + \partial_m \sigma^M_{mn} = \mathbf{F}^E_{ext}$, где σ^M_{mn} - трехмерный тензор потока плотности механического импульса или тензор напряжений; $\mathbf{F}^E_{ext}$ - электрические силы, которые здесь являются сторонними силами. Ковариантное уравнение сохранения электромагнитного импульса $\mathbf{p}^E$ в сплошной среде имеет вид [58,59] $\partial_t \mathbf{p}^E + \partial_m \sigma^E_{mn} = \mathbf{F}^M_{ext}$, где σ^E_{mn} - трехмерный тензор потока плотности электромагнитного импульса или тензор напряжений; $\mathbf{F}_{ext}^{M}$ - механические силы, которые здесь являются сторонними силами. В рассматриваемом случае механические силы являются ответной реакцией среды на электромагнитные силы. Можно составить полное ковариантное уравнение баланса механических и электромагнитных сил $\mathbf{F}_{ext}^{M} = \mathbf{F}_{ext}^{E}$ или $\partial_t \mathbf{p}^E + \partial_m \sigma_{mn}^E = \partial_t \mathbf{p}^M + \partial_m \sigma_{imn}^M$. В более общем виде это уравнение можно записать в виде четырехмерных дивергенций тензоров энергии-импульса по каждому из индексов [6]: $\partial^\mu T_{\mu\nu}^E = \partial^\mu T_{\mu\nu}^M$ и $\partial^\nu T_{\mu\nu}^E = \partial^\nu T_{\mu\nu}^M$, где $T_{\mu\nu}^E$ и $T_{\mu\nu}^M$, соответственно, тензоры электромагнитной и механической энергии-импульса. Если $T_{\mu\nu}^E$ является симметричным тензором, то вопросов не возникает, так как это уравнение является равенством дивергенций симметричных тензоров. Но если $T_{\mu\nu}^E$ является несимметричным тензором, то этот вопрос требует особого рассмотрения. Целью настоящей статьи является рассмотрение вопроса сохранения электромагнитной энергии, импульса и момента импульса для несимметричного ТЭИ.

2. Несимметричные тензоры энергии-импульса в электродинамике

Канонический ТЭИ запишем в общем виде:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3;\ i, k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где W – плотность энергии;

S – плотность потока энергии (вектор Пойнтинга);

g – плотность импульса;

tik – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Тензор второго ранга имеет дивергенции по каждому из индексов:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}^E = \partial^\mu T_{\mu\nu}^M \text{ и } \partial^\nu T_{\mu\nu}^E = \partial^\nu T_{\mu\nu}^M \tag{2}$$

Правые части этих уравнений равны, поскольку у симметричного тензора механической энергии-импульса дивергенции по каждому из индексов равны. Дивергенции по каждому из индексов существуют одновременно, поэтому их можно записать в виде суммы дивергенций, сложив уравнения (2):

$$(\partial^\mu T_{\mu\nu}^E + \partial^\nu T_{\mu\nu}^E)/2 = \partial^\mu T_{\mu\nu}^M \tag{3}$$

Несимметричный ТЭИ $T_{\mu\nu}^E$ можно разложить на антисимметричный $T_{[\mu\nu]}^E$ и симметричный $T_{(\mu\nu)}^E$ ТЭИ:

$$T_{\mu\nu}^E = \frac{1}{2}\cdot T_{[\mu\nu]}^E + \frac{1}{2}\cdot T_{(\mu\nu)}^E = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & i\frac{1}{c}\mathbf{S} - ic\cdot\mathbf{g} \\ -i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} - t_{ki} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g} \\ i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} + t_{ki} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Очевидно, что дивергенции антисимметричного ТЭИ $T^{E}_{[\mu\nu]}$ равны по абсолютной величине и имеют разные знаки. Поэтому сумма его дивергенций равна нулю. Тогда в левую часть уравнения (3) войдут только две равные дивергенции по различным индексам симметричного ТЭИ $T^{E}_{(\mu\nu)}$ и уравнение (3) можно записать в виде:

$$\partial^{\mu} T^{E}_{(\mu\nu)} = \partial^{\mu} T^{M}_{\mu\nu} \qquad (5)$$

где, с учетом коэффициента 1/2 $\quad T^{E}_{(\mu\nu)} = \begin{bmatrix} W & (i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g})/2 \\ (i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic\cdot\mathbf{g})/2 & (t_{ik} + t_{ki})/2 \end{bmatrix}.$

Теперь в правой и левой частях этого уравнения стоят симметричные ТЭИ, следовательно, в нем сохраняется момент импульса. Таким образом, существующее мнение о том, что для несимметричного ТЭИ не сохраняется момент импульса является ошибочным. Причиной этого ошибочного мнения является то, что обычно рассматривают дивергенцию только по одному из индексов, при этом в уравнении сохранения импульса для диэлектрической среды появляется вихревая сила Абрагама $\mathbf{F}_A = \partial_t \mathbf{g}^M - \partial_t \mathbf{g}^A = \nabla \times (\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H})$ [60], которая нарушает закон сохранения момента импульса. При этом в уравнениях взаимодействия электромагнитного поля со средой появляется не скомпенсированный момент импульса (эффект Фейгеля). Эта ошибка приводит к тому, что некоторые авторы [61 - 67] и др. рассматривают возможность извлечения этого момента импульса из вакуума. Сила Абрагама следует из антисимметричного ТЭИ $T^{E}_{[\mu\nu]}$ в виде его дивергенции по любому из индексов. В полные дивергенции несимметричного и антисимметричного ТЭИ сила Абрагама входит с разными знаками и при сложении дивергенций по обоим индексам она сокращается. Таким образом, полная дивергенция антисимметричного ТЭИ $T^{E}_{[\mu\nu]}$ доказывает, что сила Абрагама тождественно равна нулю и реально в природе не существует. Следовательно, не скомпенсированного момента импульса в природе также не существует, и извлечь его из вакуума невозможно.

Все полные законы сохранения для энергии и импульса следуют из симметричной части $T^{E}_{(\mu\nu)}$ несимметричного тензора $T^{E}_{\mu\nu}$. Следовательно, каждому несимметричному ТЭИ соответствует связанный с ним симметричный ТЭИ, который можно использовать для практических вычислений.

Несимметричному ТЭИ Минковского соответствует (с учетом коэффициента ½) симметричный ТЭИ:

$$W = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2 \qquad \mathbf{S} = (c^2\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\times\mathbf{H})/2$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2 \qquad t_{ik} = (E_i D_k + E_k D_i + B_i H_k + B_k H_i)/2 - \delta_{ik}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})/2$$

Несимметричному ТЭИ, полученному в работе [4], соответствует (с учетом коэффициента ½) симметричный ТЭИ:

$$W = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \qquad \mathbf{S} = (c^2\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\times\mathbf{H})/2$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2 \qquad t_{ik} = (E_iD_k + E_kD_i + B_iH_k + B_kH_i)/2 - 3\cdot\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad (6)$$

Этот ТЭИ имеет замечательную особенность, отличающую его от других известных ТЭИ. Его линейным инвариантом (суммой диагональных компонентов) является выражение $I = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$. Для вакуума этот инвариант является каноническим квадратичным инвариантом электромагнитного поля $I = E^2 - B^2$, представляющим собой плотность функции Лагранжа электромагнитного поля [68]. Этот ТЭИ отличается от ТЭИ Минковского только диагональными компонентами, но это различие является принципиальным, так как оно связано с электромагнитными силами в среде. Из этого инварианта следует, что электромагнитные силы в среде могут менять знак в зависимости от соотношения величины электрических и магнитных характеристик среды, связанных с **D** и **H**.

Линейным инвариантом ТЭИ Минковского является выражение: $I^M = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$. Инвариант ТЭИ Минковского для электромагнитного поля в вакууме $I^M = E^2 + B^2$ не совпадает с каноническим квадратичным инвариантом электромагнитного поля $I = E^2 - B^2$. Следовательно, инвариант ТЭИ Минковского является неправильным, так как для электромагнитного поля существует только два квадратичных инварианта: $I_1 = E^2 - B^2$ и $I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$. Из этого следует, что неправильным является и трехмерный тензор напряжений Минковского, описывающий электромагнитные силы.

В работе [5] получен несимметричный ТЭИ для проводящей среды $T^E_{\mu\nu} = \mathbf{A}_\mu \otimes \mathbf{J}_\nu$, где $\mathbf{A}_\mu$ - электромагнитный потенциал, $\mathbf{J}_\nu$ - четырехмерная плотность тока. Его компоненты имеют вид:

$W = \rho\cdot\varphi$ - плотность полной электромагнитной энергии, где ρ - плотность зарядов, φ - скалярный потенциал электромагнитного поля;

$\mathbf{g} = \rho\cdot\mathbf{A}$ - плотность электромагнитного импульса, где **A** - векторный потенциал электромагнитного поля;

$\mathbf{S} = \varphi\cdot\mathbf{J}$ - плотность потока электромагнитной энергии, где **J** - плотность тока;

$t_{ik} = -\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k$ - трехмерный тензор плотности потока электромагнитного импульса или тензор напряжений.

Этот несимметричный ТЭИ также можно разложить на антисимметричный и симметричный ТЭИ (4). Из антисимметричного ТЭИ, в виде его дивергенции по одному из индексов, следует уравнение силы Абрагама для проводящей среды:

$$\mathbf{F}_A = \partial_t(\rho \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi \cdot \mathbf{J}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J})$$

Здесь также сила Абрагама входит в полные дивергенции несимметричного и антисимметричного ТЭИ с разными знаками и при сложении дивергенций по разным индексам она сокращается, т.е. и здесь сила Абрагама тождественно равна нулю и реально в природе не существует.

Этому несимметричному ТЭИ для проводящей среды соответствует симметричный ТЭИ:

$$W = \rho \cdot \varphi \qquad \mathbf{S} = (\varphi \cdot \mathbf{J} + c^2 \cdot \rho \cdot \mathbf{A})/2$$

$$\mathbf{g} = ((\varphi \cdot \mathbf{J})/c^2 + \rho \cdot \mathbf{A})/2 \qquad t_{ik} = (\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k + \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{J}_i)/2 \qquad (7)$$

Линейный инвариант этого симметричного ТЭИ имеет вид:

$$I = \varphi \cdot \rho - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$$

Этот инвариант известен в электродинамике [69], как плотность функции Лагранжа взаимодействия электромагнитного поля с электрическими зарядами.

3. Формы электромагнитного импульса для несимметричного тензора

Плотность электромагнитного импульса для диэлектрической среды в форме Минковского имеет вид $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$. Плотность электромагнитного импульса в форме Абрагама имеет вид $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$. Рассмотрим различия этих двух форм электромагнитного импульса. Зоммерфельд А. [70] разделил электромагнитные величины на силовые и количественные. К силовым величинам он отнес напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$. К количественным величинам он отнес электрическую индукцию $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$. Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ определяется материальными уравнениями. Для слабого электромагнитного поля в изотропной неферромагнитной диэлектрической среде без дисперсии обычно принимают материальные уравнения в виде $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu \cdot \mu_0$, где ε и μ, соответственно, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Электрическая индукция $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ соответственно, зависят от электрических и магнитных характеристик среды. Тогда плотность электромагнитного импульса Минковского $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$, в которую входит электрическая индукция $\mathbf{D}$, описывает часть электромагнитного импульса, связанную с электрическими характеристиками среды. Плотность электромагнитного импульса Абрагама $\mathbf{g}^A = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$, в которую входит напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$, описывает часть электромагнитного импульса, связанную с магнитными характеристиками среды. Из этого следует, что каждая из этих форм описывает только часть полного электромагнитного импульса. Из несимметричного ТЭИ (6) в виде дивергенций по каждому из его индексов следуют уравнения сохранения для обеих форм плотности импульса. Из разложения несимметричного ТЭИ на симметричный и антисимметричный ТЭИ следует полная форма плотности электромагнитного импульса для диэлектрической среды в виде:

$$\mathbf{g}^E = (\mathbf{g}^M + \mathbf{g}^A)/2 = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2.$$

Из несимметричного ТЭИ для проводящей среды $T^E_{\mu\nu} = \mathbf{A}_\mu \otimes \mathbf{J}_\nu$ также следуют две формы плотности электромагнитного импульса: 1) $\mathbf{g}^E = \rho\cdot\mathbf{A}$ и 2) $\mathbf{g}^E = \varphi\cdot\mathbf{J}/c^2$. Первая форма импульса связана с плотностью зарядов, а вторая форма импульса связана со скоростью их движения. Из разложения несимметричного ТЭИ на симметричный и антисимметричный ТЭИ следует полная форма плотности электромагнитного импульса для проводящей среды в виде:

$$\mathbf{g}^E = (\varphi\cdot\mathbf{J}/c^2 + \rho\cdot\mathbf{A})/2$$

Эта форма плотности электромагнитного импульса может найти применение при теоретическом исследовании динамики плазмы.

4 Уравнения сохранения электромагнитной энергии и импульса для несимметричного тензора

Уравнения сохранения электромагнитной энергии и импульса следуют в виде полных четырехмерных дивергенций несимметричного ТЭИ $T^E_{\mu\nu}$: $(\partial^\mu T^E_{\mu\nu} + \partial^\nu T^E_{\mu\nu})/2 = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$ или его симметричной части $\partial^\mu T^E_{(\mu\nu)} = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$. Запишем трехмерные уравнения сохранения плотности энергии и импульса для диэлектрической среды с потерями:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) + c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B} + (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2)/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \qquad (8)$$

$$(\frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) + \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V})$$

или $$\partial_t(\mathbf{g}^A + \mathbf{g}^M)/2 - (\partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) + \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}), \qquad (9)$$

где m – плотность массы зарядов; **p** – плотность механического импульса; **V** – скорость зарядов.

Если диэлектрическая среда описывается каноническими материальными уравнениями со скалярными ε и μ, то недиагональные компоненты тензора напряжений t_{ik} равны нулю, а электромагнитные силы, действующие на среду, определяются только его диагональными компонентами. Тогда уравнения (8) и (9) можно записать в виде:

$$\frac{\varepsilon\cdot\varepsilon_0}{c}\partial_t E^2 + c\cdot\nabla\cdot(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B} + (\mathbf{E}\times\mathbf{B})/\mu\cdot\mu_0\cdot c^2)/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \qquad (10)$$

$$\partial_t(\mathbf{g}^A + \mathbf{g}^M)/2 - \nabla(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot E^2 - 2\cdot B^2/\mu\cdot\mu_0)/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}) \qquad (11)$$

Запишем трехмерные уравнения сохранения энергии и импульса для проводящей среды (для плотности зарядов и токов):

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi\cdot\rho)+(\nabla\cdot(\rho\cdot\mathbf{A})+\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\varphi\cdot\mathbf{J}))/2=\partial_t m+\nabla\cdot\mathbf{p} \qquad (12)$$

$$(\frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi\cdot\mathbf{J})+\partial_t(\rho\cdot\mathbf{A})+\partial_i(\mathbf{A}_i\otimes\mathbf{J}_k)+\partial_k(\mathbf{A}_i\otimes\mathbf{J}_k))/2=\partial_t\mathbf{p}+\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}) \qquad (13)$$

Уравнения (10) и (12) являются полными уравнениями сохранения энергии, а уравнения (9), (11) и (13) являются уравнениями баланса плотности электромагнитных и механических сил. Уравнения (12) и (13) могут найти применение в физике плазмы для моделирования движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

5 Заключение

Существующее мнение о нарушения закона сохранения момента импульса при описании взаимодействия электромагнитного поля со средой несимметричным ТЭИ является ошибочным. Полная дивергенция тензора второго ранга равна сумме дивергенций по каждому из его индексов. В полную дивергенцию несимметричного ТЭИ входит только его симметричная часть, т.е. симметричный ТЭИ, а полная дивергенция его антисимметричной части тождественно равна нулю. При этом момент импульса сохраняется, так как уравнение сохранения импульса следует из симметричного ТЭИ. Получены полные формы электромагнитных импульсов для диэлектрической и проводящей среды и полные уравнения сохранения энергии и импульса. Показано, что линейный инвариант ТЭИ Минковского для вакуума не совпадает с квадратичным инвариантом электромагнитного поля. Это указывает на неправильность линейного инварианта ТЭИ Минковского и трехмерного тензора напряжений.