Les Variétés Quaternioniques

A.Balan

2 août 2017

Résumé

Les structures presque quaternioniques sont étudiées. Des tenseurs sur une variété quaternionique sont définis.

1 Définition du tenseur quaternionique

Etant donnée une variété presque quaternionique M [GHL], elle est munie de trois structures presque complexes I,J,K qui anticommutent $IJK = -1$. On définit alors le tenseur quaternionique suivant :

$$Q_{IJK}(X,Y) = [I(X),I(Y)] - [J(X),J(Y)] +$$

$$K([I(X),J(Y)]) + K([J(X),I(Y)])$$

C'est bien un tenseur, on peut s'en convaincre en multipliant X par f une fonction lisse sur M.

2 Intégrabilité de la structure presque quaternionique

On appelle intébrabilité de la structure presque quaternionique l'annulation du tenseur $Q_{IJK} = 0$. La variété est alors une variété quaternionique.

3 Torsion quaternionique

On définit, lorsque M est riemanienne et donc munie de la connexion de Levi-Civita, une torsion quaternionique :

$$T_{IJK}(X,Y) = \nabla_{I(X)}I(Y) + \nabla_{J(Y)}J(X) + K([I(X),J(Y)])$$

T est un tenseur.

4 La courbure quaternionique

La courbure quaternionique est :

$$R_{IJK}(X,Y) = \nabla_{I(X)}\nabla_{I(Y)} + \nabla_{J(Y)}\nabla_{J(X)} - \nabla_{K([I(X),J(Y)])}$$

C'est un opérateur différentiel d'ordre un.

5 L'opérateur de Dirac quaternionique

On définit un opérateur de Dirac quaternionique:

$$\mathcal{D}_{IJK} = \sum_i K(e_i)(\nabla_{I(e_i)} + \nabla_{J(e_i)})$$

Références

[GHL] S.Gallot, D.Hulin, J.Lafontaine, “Riemannian Geometry”, Springer-Verlag, Berlin, 2004.