05.03.2017

Beweis von ZFC-Axiomen als normale Aussagesätze Nr. 2.2

von Thomas Limberg

Paragraph 1, Zusammenfassung

Wir fassen 5 der 10 Axiome von ZFC (Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom) als normale Aussagesätze auf und beweisen sie. Diese 5 Sätze brauchen also nicht als Axiome eingeführt zu werden, sondern können als bewiesen verwendet werden.

Paragraph 2, Abkürzungen

D.	Definition
f	falsch
q.e.d.	quod erat demonstrandum (lat. für "was zu beweisen war")
S.	(linguistischer) Satz
w	wahr
§	Paragraph

§ 3, Motivation

In meinen Augen ist es eine falsche Herangehensweise, das Leermengen-, das Paarmengen-, das Vereinigungs-, das Unendlichkeits-, das Potenzmengen-, das Aussonderungs-, das Ersetzungs- und das Auswahlaxiom als Axiome einzuführen. Man führt ja auch nicht den Satz des Pythagoras als Axiom ein, sondern beweist ihn. Stattdessen sollten diese 8 Axiome als normale Aussagesätze eingeführt und bewiesen werden, was ich für 5 dieser 8 Axiome im Folgenden auch tue.

§ 4, Einordnung gemäß Mathematics Subject Classification 2010

03-XX	Mathematical logic and foundations
03Exx	Set theory
03E47	Other notions of set-theoretic definability
03E35	Consistency and independence results

§ 5, Das Extensionalitätsaxiom

S. 1: Es bleibt, wie gehabt, das Extensionalitätsaxiom:

S. 2, D.: $\forall A, B : (A = B \iff \forall C : (C \in A \iff C \in B))$

§ 6, Beweis der Existenz der Leermenge

S. 1: $\exists B : \forall A : A \notin B$ (Beweis erfolgt nachfolgend (S. 2 – S. 8).)

S. 2, D. der Leermenge $\emptyset$: $\forall A : A \notin \emptyset$ (Beweis der Konsistenz dieser D. erfolgt nachfolgend (S. 3 – S. 7). Eindeutigkeit folgt direkt aus dem Extensionalitätsaxiom.)

S. 3: Für alle A gilt Folgendes (S. 4 – S. 7):

S. 4: Es wird in S. 2 definiert, dass $A \notin \emptyset$.

S. 5: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste für A zusätzlich definiert werden, dass $A \in \emptyset$.

S. 6: Es gibt jedoch keine Stelle in S. 2, wo für ein C definiert würde, dass $C \in \emptyset$.

S. 7: Es kann also kein Widerspruch entstehen. (q.e.d. in S. 2)

S. 8: Da es mit $\emptyset$ also ein B gibt, für das gilt $\forall A : A \notin B$, ist S. 1 bewiesen. (q.e.d. in S. 1)

§ 7, Beweis der Existenz von Paarmengen

S. 1: $\forall A, B : \exists C : \forall D : (D \in C \iff (D = A \vee D = B))$ (Beweis erfolgt nachfolgend (S. 2 – S. 19))

S. 2: $\forall A, B \in \{w, f\} : ((A \iff B) = ((B \implies A) \wedge (\neg B \implies \neg A)))$

S. 3: (mithilfe von S. 2) S. 1 $\iff \forall A, B : \exists C : \forall D : (((D = A \vee D = B) \implies D \in C) \wedge ((D \neq A \wedge D \neq B) \implies D \notin C))$

S. 4: Für alle A und B gilt Folgendes (S. 5 – S. 20)):

S. 5, D. von C für S. 6 – S. 20: $\forall D : (((D = A \vee D = B) \implies D \in C) \wedge ((D \neq A \wedge D \neq B) \implies D \notin C))$ (Beweis der Konsistenz dieser D. erfolgt nachfolgend (S. 6 – S. 17). Eindeutigkeit folgt direkt aus dem Extensionalitätsaxiom.)

S. 6: Für alle D gilt Folgendes (S. 7 – S. 16):

S. 7: Fall 1, für $(D = A \vee D = B)$ gilt Folgendes (S. 8 – S. 11):

S. 8: Hier wird in S. 5 definiert, dass $D \in C$.

S. 9: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich $D \notin C$ definiert werden.

S. 10: $D \notin C$ wird aber nur für den Fall $(D \neq A \wedge D \neq B)$ in S. 5 definiert, was außerhalb der Fallbedingung von Fall 1 liegt.

S. 11: Es entsteht also kein Widerspruch.

S. 12: Fall 2, für $(D \neq A \wedge D \neq B)$ gilt Folgendes (S. 13 – S. 16):

S. 13: Hier wird in S. 5 definiert, dass $D \notin C$.

S. 14: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich $D \in C$ definiert werden.

S. 15: $D \in C$ wird aber nur für den Fall $(D = A \vee D = B)$ in S. 5 definiert, was außerhalb der Fallbedingung von Fall 2 liegt.

S. 16: Es entsteht also auch hier kein Widerspruch.

S. 17: S. 5 ist also konsistent. (q.e.d. in S. 5)

S. 18: Da die Existenz von C also gegeben ist, gilt $\exists C : \forall D : (((D = A \vee D = B) \implies D \in C) \wedge ((D \neq A \wedge D \neq B) \implies D \notin C))$.

S. 19: S. 4 und S. 18 ergeben mithilfe von S. 3 schließlich S. 1. (q.e.d. in S. 1)

S. 20, D.: Die Paarmenge C wird geschrieben als $\{A, B\}$.

S. 21, D.: $\forall A : \{A\} := \{A, A\}$

§ 8, Beweis der Existenz von Vereinigungsmengen

S. 1: $\forall A : \exists B : \forall C : (C \in B \iff \exists D : (D \in A \wedge C \in D))$ (Beweis erfolgt nachfolgend (S. 2 – S. 18))

S. 2: (mithilfe von § 7.S. 2) S. 1 $\iff \forall A : \exists B : \forall C : ((\exists D : (D \in A \wedge C \in D) \implies C \in B) \wedge (\neg \exists D : (D \in A \wedge C \in D) \implies C \notin B))$

S. 3: Für alle A gilt Folgendes (S. 4 – S. 19):

S. 4, D. von B für S. 5 – S. 19: $\forall C : ((\exists D : (D \in A \wedge C \in D) \implies C \in B) \wedge (\neg \exists D : (D \in A \wedge C \in D) \implies C \notin B))$ (Beweis der Konsistenz dieser D. erfolgt nachfolgend (S. 5 – S. 16). Eindeutigkeit folgt direkt aus dem Extensionalitätsaxiom.)

S. 5: Für alle C gilt Folgendes (S. 6 – S. 15):

S. 6: Fall 1, für $\exists D : (D \in A \wedge C \in D)$ gilt Folgendes (S. 7 – S. 10):

S. 7: Hier wird in S. 4 definiert, dass $C \in B$.

S. 8: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich $C \notin B$ definiert werden.

S. 9: $C \notin B$ wird aber nur für den Fall $\neg \exists D : (D \in A \wedge C \in D)$ in S. 4 definiert, was außerhalb der Fallbedingung von Fall 1 liegt.

S. 10: Es entsteht also kein Widerspruch.

S. 11: Fall 2, für $\neg \exists D : (D \in A \wedge C \in D)$ gilt Folgendes (S. 12 – S. 15):

S. 12: Hier wird in S. 4 definiert, dass $C \notin B$.

S. 13: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich $C \in B$ definiert werden.

S. 14: $C \in B$ wird aber nur für den Fall $\exists D : (D \in A \wedge C \in D)$ in S. 4 definiert, was außerhalb der Fallbedingung von Fall 2 liegt.

S. 15: Es entsteht also auch hier kein Widerspruch.

S. 16: S. 4 ist also konsistent. (q.e.d. in S. 4)

S. 17: Da die Existenz von B also gegeben ist, gilt $\exists B : \forall C : ((\exists D : (D \in A \wedge C \in D) \implies C \in B) \wedge (\neg \exists D : (D \in A \wedge C \in D) \implies C \notin B))$.

S. 18: S. 3 und S. 17 ergeben mithilfe von S. 2 schließlich S. 1. (q.e.d. in S. 1)

S. 19, D. von $\bigcup$: Die Vereinigungsmenge B wird geschrieben als $\bigcup A$.

S. 20, D. von $\cup$: $\forall A, B : A \cup B := \bigcup \{A, B\}$

§ 9, Beweis der Existenz einer unendlich großen Menge

S. 1: $\exists A : (\emptyset \in A \land \forall X : (X \in A \Longrightarrow X \cup \{X\} \in A))$ (Beweis erfolgt nachfolgend (S. 2 – S. 12))

S. 2, D. von A für S. 3 – S. 12: $\emptyset \in A \land \forall X : (X \in A \Longrightarrow X \cup \{X\} \in A)$.(Beweis der Konsistenz erfolgt nachfolgend (S. 3 – S. 11). Eindeutigkeit nicht gegeben.)

S. 3: In S. 2 wird definiert, dass $\emptyset \in A$.

S. 4: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich definiert werden, dass $\emptyset \notin A$.

S. 5: Es gibt jedoch keine Stelle in S. 2, wo für ein B definiert würde, dass $B \notin A$.

S. 6: Somit kann in diesem Punkt kein Widerspruch entstehen.

S. 7: Für alle X gilt Folgendes (S. 8 – S. 11):

S. 8: In S. 2 wird weiterhin definiert, dass $X \in A \Longrightarrow X \cup \{X\} \in A$.

S. 9: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich definiert werden, dass $X \in A \Longrightarrow X \cup \{X\} \notin A$.

S. 10: Es gibt jedoch keine Stelle in S. 2, wo für ein B definiert würde, dass $B \notin A$.

S. 11: Somit kann auch in diesem Punkt kein Widerspruch entstehen. (q.e.d. in S. 2)

S. 12: Da es also ein A gibt, für das gilt $\emptyset \in A \land \forall X : (X \in A \Longrightarrow X \cup \{X\} \in A)$, gilt S. 1. (q.e.d. in S. 1)

§ 10, Beweis der Existenz von Potenzmengen

S. 1: $\forall A : \exists P : \forall B : (B \in P \Longleftrightarrow \forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A))$ (Beweis erfolgt nachfolgend (S. 2 – S. 18))

S. 2: (mithilfe von § 7.S. 2) S. 1 $\Longleftrightarrow \forall A : \exists P : \forall B : ((\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A) \Longrightarrow B \in P) \land (\neg\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A) \Longrightarrow B \notin P))$

S. 3: Für alle A gilt Folgendes (S. 4 – S. 19):

S. 4, D. von P für S. 5 – S. 19: $\forall B : ((\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A) \Longrightarrow B \in P) \land (\neg\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A) \Longrightarrow B \notin P))$ (Beweis der Konsistenz dieser D. erfolgt nachfolgend (S. 5 – S. 16). Eindeutigkeit folgt direkt aus dem Extensionalitätsaxiom.)

S. 5: Für alle B gilt Folgendes (S. 6 – S. 15):

S. 6: Fall 1, für $\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A)$ gilt Folgendes (S. 7 – S. 10):

S. 7: Hier wird in S. 4 definiert, dass $B \in P$.

S. 8: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich $B \notin P$ definiert werden.

S. 9: $B \notin P$ wird aber nur für den Fall $\neg\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A)$ in S. 4 definiert, was außerhalb der Fallbedingung von Fall 1 liegt.

S. 10: Es entsteht also kein Widerspruch.

S. 11: Fall 2, für $\neg\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A)$ gilt Folgendes (S. 12 – S. 15):

S. 12: Hier wird in S. 4 definiert, dass $B \notin P$.

S. 13: Damit dazu ein Widerspruch entsteht, müsste zusätzlich $B \in P$ definiert werden.

S. 14: $B \in P$ wird aber nur für den Fall $\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A)$ in S. 4 definiert, was außerhalb der Fallbedingung von Fall 2 liegt.

S. 15: Es entsteht also auch hier kein Widerspruch.

S. 16: S. 4 ist also konsistent. (q.e.d. in S. 4)

S. 17: Da die Existenz von P also gegeben ist, gilt $\exists P : \forall B : ((\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A) \Longrightarrow B \in P) \wedge (\neg\forall C : (C \in B \Longrightarrow C \in A) \Longrightarrow B \notin P))$.

S. 18: S. 3 und S. 17 ergeben mithilfe von S. 2 schließlich S. 1. (q.e.d. in S. 1)

S. 19, D. von $\mathcal{P}$: Die Potenzmenge P wird geschrieben als $\mathcal{P}(A)$.

§ 11, Informationen zum Autor

eMail: thomaslimberg@gmx.de

Adresse:
Thomas Limberg
Parzellenstr. 98
03046 Cottbus

geb.: 27.11.1986