L'opérateur de Dirac symplectique

A.Balan

27 juin 2017

Résumé

Un opérateur de Dirac de type symplectique est défini à partir d'une variété kählérienne. La formule de Schrödinger-Lichnerowicz est démontrée dans ce cadre kählérien.

1 Définition de l'opérateur de Dirac symplectique

On commence par définir une 2-forme à valeurs dans les opérateurs linéaires différentiels d'ordre un sur l'espace des spineurs :

$$\mathcal{D}(X,Y)\psi = X.\nabla_Y\psi - Y.\nabla_X\psi$$

avec X,Y des champs de vecteurs, ψ un spineur, . est la multiplication de Clifford et ∇ est la connexion de Levi-Civita. On a :

$$\mathcal{D}(X,Y) \in \bigwedge^2 TM \otimes Diff_1(\Sigma)$$

avec TM le fibré tangent à la variété M et Σ le fibré des spineurs, $Diff_1$ est l'espace des opérateurs différentiels d'ordre un. Soit une 2-forme $\omega = \sum_i e_i \wedge f_i$, on définit un opérateur différentiel sur les spineurs :

$$\mathcal{D}_\omega\psi = \omega.\mathcal{D}(X,Y)\psi = \sum_i e_i.\nabla_{f_i}\psi - f_i.\nabla_{e_i}\psi$$

L'opérateur de Dirac symplectique est celui où la 2-forme est la forme symplectique sur la variété Kaehler. Pour une base hermitienne du tangent, on a :

$$\mathcal{D}_\omega\psi = \sum_i e_{2i}.\nabla_{e_{2i+1}}\psi - e_{2i+1}.\nabla_{e_{2i}}\psi$$

2 La formule de Schrödinger-Lichnerowicz

On montre maintenant une formule de Schrödinger-Lichnerowicz pour l'opérateur de Dirac symplectique sur une variété spin Kaehler [F].

Théorème 1 *On a la formule suivante :*

$$\mathcal{D}^2_\omega + \Delta = \alpha \tag{1}$$

avec α, un scalaire.

Démonstration 1

En effet :

$$\mathcal{D}_\omega^2\psi + \Delta\psi = \big(\sum_i e_{2i}.\nabla_{e_{2i+1}} - e_{2i+1}.\nabla_{e_{2i}}\big)^2\psi + \Delta\psi =$$

$$\sum_i\sum_j e_{2i}.\nabla_{e_{2i+1}}(e_{2j}.\nabla_{e_{2j+1}}\psi) - \sum_i\sum_j e_{2i}.\nabla_{e_{2i+1}}(e_{2j+1}.\nabla_{e_{2j}}\psi) -$$

$$-\sum_i\sum_j e_{2i+1}.\nabla_{e_{2i}}(e_{2j}.\nabla_{e_{2j+1}}\psi) + \sum_i\sum_j e_{2i+1}.\nabla_{e_{2i}}(e_{2j+1}.\nabla_{e_{2j}}\psi) +$$

$$+\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi + \sum_i div(e_i)\nabla_{e_i}\psi =$$

$$\sum_i\sum_j e_{2i}.\nabla_{e_{2i+1}}(e_{2j}).\nabla_{e_{2j+1}}\psi + \sum_{i\neq j} e_{2i}.e_{2j}.\nabla_{e_{2i+1}}\nabla_{e_{2j+1}}\psi -$$

$$-\sum_i\sum_j e_{2i}.\nabla_{e_{2i+1}}(e_{2j+1}).\nabla_{e_{2j}})\psi - \sum_i\sum_j e_{2i}.e_{2j+1}.\nabla_{e_{2i+1}}\nabla_{e_{2j}}\psi -$$

$$-\sum_i\sum_j e_{2i+1}.\nabla_{e_{2i}}(e_{2j}).\nabla_{e_{2j+1}}\psi - \sum_i\sum_j e_{2i+1}.e_{2j}.\nabla_{e_{2i}}\nabla_{e_{2j+1}}\psi +$$

$$+\sum_i\sum_j e_{2i+1}.\nabla_{e_{2i}}(e_{2j+1}).\nabla_{e_{2j}}\psi + \sum_{i\neq j} e_{2i+1}.e_{2j+1}.\nabla_{e_{2i}}\nabla_{e_{2j}}\psi +$$

$$+\sum_i div(e_i)\nabla_{e_i}\psi =$$

$$= \sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}}e_{2j}, e_k)e_{2i}.e_k.\nabla_{e_{2j+1}}\psi + \sum_{i\neq j} e_{2i}.e_{2j}.\nabla_{e_{2i+1}}\nabla_{e_{2j+1}}\psi -$$

$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}}e_{2j+1}, e_k)e_{2i}.e_k.\nabla_{e_{2j}}\psi - \sum_i\sum_j e_{2i}.e_{2j+1}.\nabla_{e_{2i+1}}\nabla_{e_{2j}}\psi -$$

$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}}e_{2j}, e_k)e_{2i+1}.e_k\nabla_{e_{2j+1}}\psi - \sum_i\sum_j e_{2i+1}.e_{2j}.\nabla_{e_{2i}}\nabla_{e_{2j+1}}\psi +$$

$$+\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}}e_{2j+1}, e_k)e_{2i+1}.e_k.\nabla_{e_{2j}}\psi + \sum_{i\neq j} e_{2i+1}.e_{2j+1}.\nabla_{e_{2i}}\nabla_{e_{2j}}\psi +$$

$$+\sum_j\sum_i g(\nabla_{e_i}e_j, e_i)\nabla_{e_j}\psi =$$

$$= \alpha$$

Pour montrer que l'expression est bien scalaire, il faut et il suffit de montrer qu'elle ext tensorielle en ψ. On remplace donc ψ par $f\psi$:

$$\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}}e_{2j}, e_k)e_{2i}.e_k.\nabla_{e_{2j+1}}f\psi + \sum_{i\neq j} e_{2i}.e_{2j}.\nabla_{e_{2i+1}}\nabla_{e_{2j+1}}f\psi -$$

$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}}e_{2j+1}, e_k)e_{2i}.e_k.\nabla_{e_{2j}}f\psi - \sum_i\sum_j e_{2i}.e_{2j+1}.\nabla_{e_{2i+1}}\nabla_{e_{2j}}f\psi -$$

$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j},e_k) e_{2i+1}.e_k.\nabla_{e_{2j+1}} f\psi - \sum_i \sum_j e_{2i+1}.e_{2j}.\nabla_{e_{2i}}\nabla_{e_{2j+1}} f\psi +$$
$$+\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j+1},e_k) e_{2i+1}.e_k.\nabla_{e_{2j}} f\psi + \sum_{i\neq j} e_{2i+1}.e_{2j+1}.\nabla_{e_{2i}}\nabla_{e_{2j}} f\psi +$$
$$+\sum_j \sum_i g(\nabla_{e_i} e_j,e_i)\nabla_{e_j} f\psi$$

Selon la courbure, on a $R(X,Y)\psi = \nabla_X\nabla_Y\psi - \nabla_Y\nabla_X\psi - \nabla_{[X,Y]}\psi$, c'est un tenseur, il faut donc montrer, en remplaçant, que l'expression suivante est tensorielle :

$$\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j},e_k) e_{2i}.e_k.\nabla_{e_{2j+1}} f\psi + \sum_{i<j} e_{2i}.e_{2j}.\nabla_{[e_{2i+1},e_{2j+1}]} f\psi -$$
$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j+1},e_k) e_{2i}.e_k.\nabla_{e_{2j}} f\psi - \sum_{i\leq j} e_{2i}.e_{2j+1}.\nabla_{[e_{2i+1},e_{2j}]} f\psi -$$
$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j},e_k) e_{2i+1}.e_k.\nabla_{e_{2j+1}} f\psi - \sum_{i\leq j} e_{2i+1}.e_{2j}.\nabla_{[e_{2i},e_{2j+1}]} f\psi +$$
$$+\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j+1},e_k) e_{2i+1}.e_k.\nabla_{e_{2j}} f\psi + \sum_{i<j} e_{2i+1}.e_{2j+1}.\nabla_{[e_{2i},e_{2j}]} f\psi +$$
$$+\sum_j \sum_i g(\nabla_{e_i} e_j,e_i)\nabla_{e_j} f\psi$$

Il suffit donc de montrer l'annulation de :

$$\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j},e_k) e_{2i}.e_k(e_{2j+1}f) + \sum_{i<j} e_{2i}.e_{2j}([e_{2i+1},e_{2j+1}]f) -$$
$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i+1}} e_{2j+1},e_k) e_{2i}.e_k(e_{2j}f) - \sum_{i\leq j} e_{2i}.e_{2j+1}([e_{2i+1},e_{2j}]f) -$$
$$-\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j},e_k) e_{2i+1}.e_k(e_{2j+1}f) - \sum_{i\leq j} e_{2i+1}.e_{2j}([e_{2i},e_{2j+1}]f) +$$
$$+\sum_{i,j,k} g(\nabla_{e_{2i}} e_{2j+1},e_k) e_{2i+1}.e_k(e_{2j}f) + \sum_{i<j} e_{2i+1}.e_{2j+1}.([e_{2i},e_{2j}]f) +$$
$$+\sum_j \sum_i g(\nabla_{e_i} e_j,e_i)(e_j f)$$

On utilise que la connexion est une connexion de Levi-Civita et préserve donc la métrique :

$$-\sum_{i,j,k} g(e_{2j},\nabla_{e_{2i+1}} e_k) e_{2i}.e_k(e_{2j+1}f) + \sum_{i<j} e_{2i}.e_{2j}([e_{2i+1},e_{2j+1}]f) +$$
$$+\sum_{i,j,k} g(e_{2j+1},\nabla_{e_{2i+1}} e_k) e_{2i}.e_k(e_{2j}f) - \sum_{i\leq j} e_{2i}.e_{2j+1}([e_{2i+1},e_{2j}]f) +$$
$$+\sum_{i,j,k} g(e_{2j},\nabla_{e_{2i}} e_k) e_{2i+1}.e_k(e_{2j+1}f) - \sum_{i\leq j} e_{2i+1}.e_{2j}([e_{2i},e_{2j+1}]f) -$$

$$-\sum_{i,j,k} g(e_{2j+1},\nabla_{e_{2i}}e_k)e_{2i+1}.e_k(e_{2j}f) + \sum_{i<j} e_{2i+1}.e_{2j+1}.([e_{2i},e_{2j}]f)-$$

$$-\sum_j \sum_i g(e_j,\nabla_{e_i}e_i)(e_jf) =$$

On a $g = J.\omega$ et $\nabla J = 0$

$$\sum_{i,j,k} g(e_{2j+1},\nabla_{e_{2i+1}}e_k)e_{2i}.Je_k(e_{2j+1}f) + \sum_{i<j} e_{2i}.e_{2j}([e_{2i+1},e_{2j+1}]f)+$$

$$+\sum_{i,j,k} g(e_{2j},\nabla_{e_{2i+1}}e_k)e_{2i}.Je_k(e_{2j}f) - \sum_{i\leq j} e_{2i}.e_{2j+1}([e_{2i+1},e_{2j}]f)-$$

$$-\sum_{i,j,k} g(e_{2j+1},\nabla_{e_{2i}}e_k)e_{2i+1}.Je_k(e_{2j+1}f) - \sum_{i\leq j} e_{2i+1}.e_{2j}([e_{2i},e_{2j+1}]f)-$$

$$-\sum_{i,j,k} g(e_{2j},\nabla_{e_{2i}}e_k)e_{2i+1}.Je_k(e_{2j}f) + \sum_{i<j} e_{2i+1}.e_{2j+1}.([e_{2i},e_{2j}]f)-$$

$$-\sum_j \sum_{i=k} g(e_j,\nabla_{e_i}e_k)Je_i.Je_k.(e_jf) =$$

$$= 0$$

Par la torsion nulle de la connexion de Levi-Civita. On a donc montré la formule de Schrödinger-Dirac symplectique. Pour des raisons de symétries, α représente en fait la courbure scalaire.

Références

[F] T.Friedrich, "Dirac operators in Riemannian Geometry", Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.