on considère l'équation diophantienne de degré 4

$$x^4 - y^4 = z^4 - w^4$$

on pose : $x + y = a(z + w) \quad L_1$

$$x - y = b(z - w) \quad L_2$$

$$x + iy = c(z + iw) \quad L_3$$

$$x - iy = \frac{1}{abc}(z - iw) \quad L_4$$

a et b sont des nombres réels non nuls et c un nombre complexe non nul $c = u + iv$

on a d'après les deux premières lignes : $2x = (a + b)z + (a - b)w$ et $2y = (a - b)z + (a + b)w$.

l'équation $x + iy = (u + iv)(z + iw)$ donne : $x = uz - vw$ et $y = uw + vz$

l'équation $x - iy = \frac{1}{abc}(z - iw)$ donne $x = \frac{u}{ab(u^2 + v^2)}z - \frac{v}{ab(u^2 + v^2)}w$ et $y = \frac{v}{ab(u^2 + v^2)}z + \frac{u}{ab(u^2 + v^2)}w$

on choisis a, b , u , et v tels que $ab(u^2 + v^2) = 1$

la deuxième équation $u^2 + v^2 + ab - au - bu = 0$

exemple : a=2 b=½ u= ⅘ v=⅗

et aussi $w = \frac{-a + b + 2v}{a + b - 2u}z$

$$w = \frac{a + b - 2u}{-a + b - 2v}z$$

$u^2 + v^2 + ab - au - bu = 0$

on utilise ces expression dans l'équation $ab(u^2 + v^2) = 1$

donc

$$u = \frac{a^2b^2 + 1}{ab(a+b)} \quad \text{et} \quad v^2 = \frac{(a^3b - 1)(1 - ab^3)}{a^2b^2(a+b)^2}$$

on fait le changement de variable $b = \dfrac{1+t}{a}$ $ab = 1 + t$

$(a^3b - 1)(1 - ab^3) = [a^3(\dfrac{1+t}{a}) - 1][1 - a(\dfrac{1+t}{a})^3]$ après calculs

$= (1/a^2)[(a^2-1)^2 + (a^2-1)(a^2-3)t + (-6a^2+3)t^2 + (-4a^2+1)t^3 - a^2t^4]$ (1)

on suppose que le numérateur de expression est égale à

$(a^2 - 1 + ft + gt^2)^2$ (2)

par identification du coeffitient de t : on obtient $f = \dfrac{a^2 - 3}{2}$

par identification du coefficient de t^2 on obtient

$$g = \frac{-a^4 - 18a^2 + 3}{8(a^2 - 1)}$$

les deux expressions (1) et (2) sont égales donc il reste à identifier les termes en t^4 et t^3

donc

$$t = \frac{-4a^2 + 1 - 2fg}{a^2 + g^2}$$

conclusion :

$$v = \frac{a^2 - 1 + ft + gt^2}{a^2 b(a+b)}$$

expression de t en fonction de a :

$$t = \frac{8(-1 + 18a^2 - 18a^6 + a^8)}{9 - 44a^2 + 190a^4 + 100a^6 + a^8}$$

calcul de b en fonction de a :

$$b = \frac{1 + 100a^2 + 190a^4 - 44a^6 + 9a^8}{a(9 - 44a^2 + 190a^4 + 100a^6 + a^8)}$$

on revient au problème de départ :

$x = uz - vw$ $\quad$ $y = uw + vz$

$$w = \frac{-a + b + 2v}{a + b - 2u} z$$

$$(uz - v(\frac{-a+b+2v}{a+b-2u})z)^4 - (u(\frac{-a+b+2v}{a+b-2u} + vz)^4 = z^4 - (\frac{-a+b+2v}{a+b-2u}z)^4$$

puis en simplifiant par z :

$$(u-v(\frac{-a+b+2v}{a+b-2u}))^4-(u(\frac{-a+b+2v}{a+b-2u}+v)^4=1^4-(\frac{-a+b+2v}{a+b-2u})^4$$

puis en multipliant par $a+b-2u$, on obtient

$$(u(a+b-2u)-v(-a+b+2v))^4-(u(-a+b+2v)+v(a+b-2u))^4=(a+b-2u)^4-(-a+b+2v)^4$$

après simplifications :

$$(-au-bu+2ab+av-bv)^4-(-au+bu+av+bv)^4=(a+b-2u)^4-(-a+b+2v)^4$$

$$f=\frac{a^2-3}{2}$$

$$g=\frac{3-18a^2-a^4}{8(-1+a^2)}$$

$$z = \frac{8(-1 + 18a^2 - 18a^6 + a^8)}{9 - 44a^2 + 190a^4 + 100a^6 + a^8}$$

$$b = \frac{1 + 100a^2 + 190a^4 - 44a^6 + 9a^8}{a(9 - 44a^2 + 190a^4 + 100a^6 + a^8)}$$