le but de cet article est de donner un paramétrage de l'équation diophantienne x^3+y^3=z^3+t^3

Soit (C) la courbe du plan d'équation
$x^3+y^3=1+a^3$ avec a un paramètre réel

le point M(a;1) appartient à la courbe (C)

cette courbe représente la fonction $f(x)=(1+a^3-x^3)^{\frac{1}{3}}$

Soit T la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

$$f'(x)=(1/3)(-3x^2)(1+a^3-x^3)^{-2/3}$$

soit $f'(a)=-a^2$

la tangente T a pour équation $y=-a^2(x-a)+1$

on calcul maintenant les points d'intersection de T et la courbe de f en résolvant le système

$x^3+y^3=1+a^3$ et $y=-a^2(x-a)+1$

ce qui ne donne un autre point sur la courbe de f d'abscisse
$\frac{2a+a^4}{-1+a^3}$

ce point appartient à la tangente T et à la courbe de f

$\frac{1+2a^3}{a^3-1}$

on en déduit que $(a^4+2a)^3=(2a^3+1)^3+(a^4-a)^3+(a^3-1)^3$

exemple si a=2 $20^3=17^3+14^3+7^3$
si a=-2 $12^3=(-15)^3+18^3+(-9)^3$

Soient x, y, et z des nombres réels ; on choisit ces nombres de façon à ce que l'identité suivante soit vérifiée pour tout a réel : $(xa^4+ya)^3=(ya^3+x)^3+(xa^4+za)^3+(-za^3-x)^3$

ensuite on identifie les coefficients de a^9, a^6, a^3 et le terme constant

après identification on obtient l'équation suivante

$y^2+yz+z^2=3x^2$.

après paramètrage de cette équation diophantienne du second degré on obtient

$x=3u^2+v^2 \quad y=6uv-3u^2+v^2 \quad z=6u^2-2v^2$

on a l'identité suivante

$$(3x^2+5xy-5y^2)^3+(4x^2-4xy+6y^2)^3+(5x^2-5xy-3y^2)^3=(6x^2-4xy+4y^2)^3 \ ;$$

Soient $A_1=a^3-1; A_2=a^4+2a; A_3=2a^3+1; A_4=a^4-a$

$$(-A_1x^2-A_3xy+A_3y^2)^3+(A_2x^2-A_2xy+A_4y^2)^3+(-A_3x^2+A_3xy+A_1y^2)^3=(A_4x^2-A_2xy+A_2y^2)^3$$