Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2016, 6(4), 122-128
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2016.64016

A New Weighted Average Operator Based on Simplified Neutrosophic and Its Application

Rui Hu, Mengjin Wei, Hongchun Sun

School of Sciences, Linyi University, Linyi Shandong
Email: 1057902521@qq.com

Received: Oct. 29th, 2016; accepted: Nov. 20th, 2016; published: Nov. 23rd, 2016

Abstract

In this paper, a new simplified neutrosophic weighted average operator is presented, which is named as the simplified Neutrosophic Weighted Maclaurin Mean (NWMM). At the same time, the aggregated formula of NWMM is also established and showed in detail, and some properties of NWMM are researched. Finally, a practical application in E-commerce of the developed method is given.

Keywords

Neutrosophic Set, Maclaurin Mean, E-Commerce

基于简单中性集的一类加权平均算子及其应用

胡　瑞，魏梦瑾，孙洪春

临沂大学理学院，山东　临沂
Email: 1057902521@qq.com

收稿日期：2016年10月29日；录用日期：2016年11月20日；发布日期：2016年11月23日

摘　要

本文，提出了一类新的简单中性集加权平均算子，记为简单中性集加权麦克劳林平均(NWMM)。同时，

文章引用：胡瑞，魏梦瑾，孙洪春．基于简单中性集的一类加权平均算子及其应用[J]．运筹与模糊学，2016，6(4): 122-128. http://dx.doi.org/10.12677/orf.2016.64016

详细证明了NWMM聚合公式，并探讨了NWMM的一些性质。最后，给出了NWMM在电子商务应用中的数值实验。

关键词

中性集合，麦克劳林平均，电子商务

1. 引言

为了同时处理不相容，不准确和不完整的信息，Smarandache [1]提出了较区间模糊集、直觉模糊集等更广的中性集合(NS)。基于中性集在科学或工程中的实际应用，有必要对其作出一定的限定，随之许多弱化中性集合被逐渐提出，如间隔中性集合(INS) [2]，单值中性集合(SVNS) [3]以及简单中性集合(SNS) [4]。这里，探讨简单中性集合的一些理论及应用。Ye [4]定义了简单的中性值(SNVs)的运算法则，提出了一种比对方法和一些简单中性集的聚集算子。对简单中性值还建立了余弦相似性测度[4]和基于对数的交叉熵测度[5]。Peng 等[6]对简单的中性值定义了一些新的运算法则和比较方法，克服了现有简单中性值运算法则的一些问题，并提出了一些新的简单的中性值的聚集算子。显然，在文献[4] [6]中所有的聚集算子都只能用来单独研究聚集参数，并且无法互相建立联系。众所周知，Choquet 积分型算子、Bonferroni 平均型算子、Heronian 平均型算子可以解决上述问题。在本文中，将使用另一种更强大的算子来解决上述问题，那就是麦克劳林平均(MM)，它最初是由 Maclaurin [7]提出，再由 Detemple 和 Robertson [8]进行发展。但在过去，麦克劳林平均只被运用到不等式的理论和应用研究中[9] [10] [11]，近两年，J. D. Qin 和 X. W. Liu [12] [13]用其来聚集直觉模糊信息和语言模糊信息。在麦克劳林平均中包含一个重要的参数 k，即 $k=1,2,\cdots,n$ (见下面公式(6))。从而，麦克劳林对称平均能够反映多输入参数之间的相互关系($k\ge 2$)，而其他三种算子只能反映每两个参数之间的相互关系。因此，对于信息融合来说，麦克劳林平均更加的灵活高效。

2. 预备知识

本节，介绍简单的中性集合的一些定义及其运算法则。给出麦克劳林平均及其运算法则。首先，给出Ye [4]定义的以下简单的中性集。

定义 2.1：设 X 为点(对象)组成的空间，令 x 为 X 中的一般元素，X 中的一个简单中性集能用一个实隶属函数 $T_A(x)$，一个不确定性隶属函数 $I_A(x)$ 和一个虚隶属函数 $F_A(x)$ 来描述。如果函数 $T_A(x)$，$I_A(x)$ 和 $F_A(x)$ 是真实标准 $[0,1]$ 中的单区间或单子集，则

$$T_A(x): X\to[0,1],\ \ I_A(x): X\to[0,1],\ \ F_A(x): X\to[0,1]$$

然后，定义简单的中性集 A 为：$A=\left\{\left\langle x,T_A(x),I_A(x),F_A(x)\right\rangle \middle| x\in X\right\}$。

为简单，下面只考虑简单的中性集中 $T_A(x)$，$I_A(x)$ 和 $F_A(x)$ 的值在真实标准 $[0,1]$ 中为一个单点。根据 Ye [4]定义的简单中性集的运算法则和次序关系。

定义 2.2：令 $A=\left\langle T_A(x),I_A(x),F_A(x)\right\rangle$, $B=\left\langle T_B(x),I_B(x),F_B(x)\right\rangle$ 为两个简单中性集且 $\lambda>0$，则

$$A+B=\left\langle 1-\left(1-T_A(x)\right)\left(1-T_B(x)\right), I_A(x)I_B(x), F_A(x)F_B(x)\right\rangle \tag{1}$$

$$AB=\left\langle T_A(x)T_B(x), 1-\left(1-I_A(x)\right)\left(1-I_B(x)\right), 1-\left(1-F_A(x)\right)\left(1-F_B(x)\right)\right\rangle \tag{2}$$

$$\lambda A=\left\langle 1-\left(1-T_A(x)\right)^{\lambda}, I_A(x)^{\lambda}, F_A(x)^{\lambda}\right\rangle \tag{3}$$

$$A^{\lambda}=\left\langle T_A\left(x\right)^{\lambda},1-\left(1-I_A\left(x\right)\right)^{\lambda},1-\left(1-F_A\left(x\right)\right)^{\lambda}\right\rangle \tag{4}$$

当 $X=\{x\}$，称 $A=\langle T_A(x),I_A(x),F_A(x)\rangle$ 为一个简单中性值(SNV)，表示为 $A=\langle T_A,I_A,F_A\rangle$。

定义 2.3： 令 $A=\langle T_A,I_A,F_A\rangle$ 为一个简单中性值，则记分函数 $S(A)$ 和精度函数 $H(A)$ 定义如下：

$$S(A)=\frac{1}{3}(T_A-pI_A-F_A) \tag{5}$$

$$H(A)=\frac{1}{3}(T_A-pI_A-F_A) \tag{6}$$

其中 $p\in[0,1]$ 由决策者决定的。特别的，分别令 $p=1$， $p=0$， $p=0.5$，则有三个选择方案：模糊，精确和标准。显然，$H(A)$ 值越大，简单的中性集 A 越精确。根据记分函数 S 和精确函数 H，给出两个简单中性值之间的次序关系。

定义 2.4： 令 A 和 B 为两个简单中性值，则

如果 $S(A)<S(B)$，则 A 小于 B，记为 $A<B$。

如果 $S(A)<S(B)$，则(1)如果 $H(A)=H(B)$，则 A 和 B 相同，表示为 $A=B$。(2)如果 $H(A)<H(B)$，则 A 小于 B，表示为 $A<B$。

下面，给出麦克劳林平均，最初由 Maclaurin 提出，是一个重要的集结算子。

定义 2.5： [7]令 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一个非负实数集合，且 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$。如果

$$MM^{(k)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left(\frac{\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod_{j=1}^{k}a_{i_j}}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{7}$$

则 $MM^{(k)}$ 称为麦克劳林平均(MM)，其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 取遍 $(1,2,\cdots,n)$， C_n^k 为二项式系数。

显然，麦克劳林平均忽略了聚合参数的权重向量。为此，Qin 和 Liu [12]定义了一个加权的麦克劳林平均(WMM)。

定义 2.6： 设 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为一个非负实数集，$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为 a_i 的权向量，其中 ω_i 表示 a_i 的重要程度，并满足 $\omega_i\in[0,1]$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$。若

$$WMM_{\omega}^{(k)}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left(\frac{\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}a_{i_j}}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{8}$$

则 $WMM_{\omega}^{(k)}$ 称为加权麦克劳林平均(WMM)。

3. 简单中性加权麦克劳林平均

本节，给出一种新的简单中性加权平均算子，用以聚集简单的中性信息。首先，定义以下聚合算子。

定义 3.1： 设 $A_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 为一个简单中性集合，$k\in\{1,2,\cdots,n\}$。简单中性加权麦克劳林平均定义为

$$NWMM_{\omega}^{(k)}(A_1,A_2,\cdots,A_n)=\left(\frac{\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}A_{i_j}}{\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{9}$$

其中 $\omega=\left(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $A_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$ 的权向量， $\omega_j\in\left[0,1\right]$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$。

基于定义 2.2 中对简单中性集的运算法则，可推导出简单中性加权麦克劳林平均(NWMM)的计算公式。

定理 3.1：对于简单的中性集的集合 $A_j=\left\langle T_{A_j},I_{A_j},F_{A_j}\right\rangle\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，有

$$
\begin{aligned}
NWMM_{\omega}^{(k)}\left(A_1,A_2,\cdots,A_n\right)=&\left(\left(1-\left(\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}T_{A_{i_j}}\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)^{\frac{1}{\Delta_k}}\right)^{\frac{1}{k}},\right.\\
&1-\left(1-\left(1-\left(\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-I_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)^{\frac{1}{\Delta_k}}\right)^{\frac{1}{k}},1-\left(1-\left(\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-F_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)^{\frac{1}{\Delta_k}}\right)^{\frac{1}{k}}\right),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

其中 $\Delta_k=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}$。

证明：由(1)~(3)，有

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k}\left(\omega_{i_j}A_{i_j}\right)&=\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}\prod_{j=1}^{k}A_{i_j}=\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}\left\langle\prod_{j=1}^{k}T_{A_{i_j}},1-\prod_{j=1}^{k}(1-I_{A_{i_j}}),1-\prod_{j=1}^{k}(1-F_{A_{i_j}})\right\rangle\\
&=\left(1-\left(1-\prod_{j=1}^{k}T_{A_{i_j}}\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}},\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-I_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}},\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-F_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod_{j=1}^{k}\left(\omega_{i_j}A_{i_j}\right)=&\left(1-\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}T_{A_{i_j}}\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}},\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-I_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}},\right.\\
&\left.\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-F_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)
\end{aligned}
$$

再由(9)和(3)得

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod_{j=1}^{k}\left(\omega_{i_j}A_{i_j}\right)}{\Delta_k}=&\left(1-\left(\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}T_{A_{i_j}}\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)^{\frac{1}{\Delta_k}},\left(\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-I_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)^{\frac{1}{\Delta_k}},\right.\\
&\left.\left(\prod_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-F_{A_{i_j}}\right)\right)^{\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}}\right)^{\frac{1}{\Delta_k}}\right),
\end{aligned}
$$

基于以上讨论，由(4)可得(10)。

现在，由(9)~(10)，容易证明下面的一些简单中性加权麦克劳林对称平均性质。

定理 3.2：(幂等性)如果 $A_j = A = \langle T_A, I_A, F_A \rangle \left(j = 1, 2, \cdots, n \right)$ 则

$$NWMM_{\omega}^{(k)}\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right) = A \text{。}$$

定理 3.3：(单调性)如果 $A_j \subseteq A_j^* \left(j = 1, 2, \cdots, n \right)$，则

$$NWMM_{\omega}^{(k)}\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right) \le NWMM_{\omega}^{(k)}\left(A_1^*, A_2^*, \cdots, A_n^*\right) \text{。}$$

定理 3.4：(有界性)令 $A_j \left(j = 1, 2, \cdots, n \right)$ 为简单中性集合，

$$A^- = \left\langle \min_j T_{A_j}, \max_j I_{A_j}, \max_j F_{A_j} \right\rangle,\quad A^+ = \left\langle \max_j T_{A_j}, \min_j I_{A_j}, \min_j F_{A_j} \right\rangle,$$

则 $A^- \le NWMM_{\omega}^{(k)}\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right) \le A^+$。

4. 简单中性加权麦克劳林对称平均在电子商务中的应用

本节，介绍一项评估电子商务网站客户满意度的研究项目[14]。目的是从不同的电商网站中筛选出最佳电商网站，这能够提供企业对电商网站的选择。对五家电商网站 $A_j \left(j = 1, 2, \cdots, 5 \right)$ 的顾客满意度进行评估。假设一家企业近期想投资电商并期望利润最大，需要确定五家电商网站的客户满意度，以选择最佳一家。投资企业须根据以下四种特性作出决定：

G_1 是电商网站的平台特性，G_2 是电商网站的储存特性，G_3 是电商网站的售前和售后服务，G_4 是电商网站的交易支付与物流配送，五种选择方案 $A_j \left(j = 1, 2, \cdots, 5 \right)$ 要基于以上四种特性并通过 SNV 进行评估。该决策矩阵 $D = \left(d_{ij} \right)$ 列出如下：

$$D = \begin{bmatrix} \langle 0.4, 0.2, 0.3 \rangle & \langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle & \langle 0.3, 0.4, 0.1 \rangle & \langle 0.7, 0.0, 0.1 \rangle & \langle 0.4, 0.3, 0.3 \rangle \\ \langle 0.5, 0.1, 0.3 \rangle & \langle 0.3, 0.2, 0.2 \rangle & \langle 0.5, 0.2, 0.3 \rangle & \langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle & \langle 0.7, 0.2, 0.1 \rangle \\ \langle 0.2, 0.2, 0.5 \rangle & \langle 0.7, 0.1, 0.2 \rangle & \langle 0.5, 0.1, 0.2 \rangle & \langle 0.4, 0.3, 0.2 \rangle & \langle 0.3, 0.2, 0.3 \rangle \\ \langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle & \langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle & \langle 0.6, 0.3, 0.1 \rangle & \langle 0.5, 0.2, 0.1 \rangle & \langle 0.6, 0.3, 0.2 \rangle \end{bmatrix}$$

关于特性权重，由决策者决定为 $\omega = \left(0.2, 0.3, 0.3, 0.2 \right)^{\mathrm{T}}$。下面，利用简单中性加权麦克劳林对称平均($k = 2$)来得到最理想的电子商务网站。

步 1：基于决策矩阵，由公式(9)能计算出 $A_j \left(j = 1, 2, \cdots, 5 \right)$ 的聚合值 D_j：

$$D_1 = \langle 0.4095, 0.1479, 0.3330 \rangle,\quad D_2 = \langle 0.5181, 0.1664, 0.2063 \rangle,\quad D_3 = \langle 0.4783, 0.2310, 0.1803 \rangle,$$

$$D_4 = \langle 0.5427, 0.1433, 0.1547 \rangle,\quad D_5 = \langle 0.4953, 0.2422, 0.2192 \rangle \text{。}$$

步 2：由公式(4) ($p = 0.5$)计算出分值 $S\left(D_j\right)\left(j = 1, 2, \cdots, 5 \right)$：

$$S\left(D_1\right) = 0.00085,\quad S\left(D_2\right) = 0.07620,$$

$$S\left(D_3\right) = 0.06083,\quad S\left(D_4\right) = 0.10545,\quad S\left(D_5\right) = 0.05167 \text{。}$$

步 3：依据分值 $D_j \left(j = 1, 2, \cdots, 5 \right)$ 对所有的方案 $A_j \left(j = 1, 2, \cdots, 5 \right)$ 进行排序：

$$A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_1 \text{。}$$

因此，最佳方案为 A_4。

下面，利用加权算术平均算子 F_{ω} [4]来解决以上问题，主要步骤如下：

步 1：运用 F_{ω}，可以获得 $A_j\left(j=1,2,\cdots,5\right)$ 的加权算术平均值 α_j：

$$\alpha_j = F_{\omega}\left(d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, d_{4j}\right) = \sum_{i=1}^{4} \omega_i d_{ij}, \forall j = 1, 2, \cdots, 5.$$

然后，得到

$$\alpha_1 = \langle 0.41, 0.15, 0.34 \rangle，\alpha_2 = \langle 0.52, 0.17, 0.2 \rangle，\alpha_3 = \langle 0.48, 0.23, 0.19 \rangle,$$

$$\alpha_4 = \langle 0.54, 0.16, 0.16 \rangle，\alpha_5 = \langle 0.5, 0.24, 0.22 \rangle。$$

步 2：由公式(4)计算分值 $S\left(\alpha_j\right)\left(j=1,2,\cdots,5\right)$ $\left(p=0.5\right)$：

$$S\left(\alpha_1\right) = -0.00167，S\left(\alpha_2\right) = 0.07833,$$

$$S\left(\alpha_3\right) = 0.05833，S\left(\alpha_4\right) = 0.1，S\left(\alpha_5\right) = 0.05333。$$

步 3：依据分值 $\alpha_j\left(j=1,2,\cdots,5\right)$ 对所有方案 $A_j\left(j=1,2,\cdots,5\right)$ 进行排序：

$$A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_1。$$

得出的结果与我们所提出方法的结果一致，最佳方案仍为 A_4。

基金项目

中国物流学会与中国物流与采购联合会计划项目(2015CSLKT3-199)；全国高校物流教研课题(JZW2014048, JZW2014049)和国家级大学生创新创业训练计划项目(2016)。

参考文献 (References)

[1] Smarandache, F. (1998) Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set, and Logic. American Research Press, Rehoboth.

[2] Wang, H., Smarandache, F., Sunderraman, R. and Zhang, Y.Q. (2005) Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing. Hexis, Phoenix.

[3] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y.Q. and Sunderraman, R. (2010) Single Valued Neutrosophic Sets. *Multispace Multistructure*, **4**, 410-413.

[4] Ye, J. (2014) A Multicriteria Decision-Making Method Using Aggregation Operators for Simplified Neutrosophic Sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **26**, 2459-2466.

[5] Ye, J. (2014) Single Valued Neutrosophic Cross-Entropy for Multicriteria Decision Making Problems. *Applied Mathematical Modelling*, **38**, 1170-1175. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.07.020

[6] Peng, J.J., Wang, J.Q., Wang, J., Zhang, H.Y. and Chen, X.H. (2016) Simplified Neutrosophic Sets and Their Applications in Multi-Criteria Group Decision-Making Problems. *International Journal of Systems Science*, **47**, 2342-2358. http://dx.doi.org/10.1080/00207721.2014.994050

[7] Maclaurin, C. (1729) A Second Letter to Martin Folkes, Esq.; Concerning the Roots of Equations, with Demonstration of Other Rules of Algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, **36**, 59-96. http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1729.0011

[8] Detemple, D. and Robertson, J. (1979) On Generalized Symmetric Means of Two Variables. University of Belgrade Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta. Serija Matematikai Fizika, No. 634/677, 236-238.

[9] Bapat, R.B. (1993) Symmetric Function Means and Permanents. *Linear Algebra and Its Applications*, **182**, 101-108. http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(93)90494-9

[10] Abu-Saris, R. and Hajja, M. (2006) On Gauss Compounding of Symmetric Weighted Arithmetic Means. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **322**, 729-734. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.069

[11] Gao, P. (2008) On a Conjecture on the Symmetric Means. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **337**, 416-424. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.011

[12] Qin, J.D. and Liu, X.W. (2014) An Approach to Intuitionistic Fuzzy Multiple Attribute Decision Making Based on Maclaurin Symmetric Mean Operators. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **27**, 2177-2190.

[13] Qin, J.D. and Liu, X.W. (2015) Approaches to Uncertain Linguistic Multiple Attribute Decision Making Based on Dual Maclaurin Symmetric Mean. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **29**, 171-186. http://dx.doi.org/10.3233/IFS-151584

[14] Zhou, L.Y., Zhao, X.F. and Wei, G.W. (2014) Hesitant Fuzzy Hamacher Aggregation Operators and Their Application to Multiple Attribute Decision Making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **26**, 2689-2699.