

# **La trigonométrie des figures et formes géométriques arrondies**

MENDZINA ESSOMBA FRANCOIS  
ESSOMBA ESSOMBA DIEUDONNE GAEL

## Résumé

Une même équation mathématique relie le cercle au carré, la sphère au cube, l'hyper-sphère à l'hyper-cube, une autre également relie l'ellipse au rectangle, l'ellipsoïde à un parallélépipède rectangle, l'hyper-ellipsoïde à l'hyper- parallélépipède rectangle.

La compréhension de ces équations nous a emmené très loin dans un univers si familier aux mathématiciens, l'univers des fonctions périodiques et celui des formes géométriques aux bouts arrondis en y dévoilant une infinité de nouvelles constances mathématiques associées.

## Abstract

The same mathematical equation connects the circle to the square, the sphere to the cube, the hyper-sphere to the hyper-cube, another also connects the ellipse to the rectangle, the ellipsoid to a rectangular parallelepiped, the hyper-ellipsoid To the rectangular hyper-parallelepiped.

The understanding of these equations has taken us very far in a universe so familiar to mathematicians, the universe of periodic functions, and that of geometric forms with rounded ends revealing an infinity of new mathematical constants associated with them.

Il y a si longtemps que nous nous intéressés aux équations du cercle et du carré dont la forme ont la particularité d'être constructibles grâce à une règle et un compas. Je me suis longtemps interrogé sur la nature des figures qui pouvaient exister entre le cercle et le carré, jusqu'à ce que nous répondions à cette interrogation que modestement nous présentons dans cet article consacré à la trigonométrie desdites figures.

## I- Description des fonctions trigonométriques de base à partir de l'équation générale.

soit l'équation cartésienne (S) générale dans Le plan suivante :

$$(S) : X^n + Y^n = 1 \quad (1.1)$$

L'équation différentielle associée à (S) est (S'):

$$(S)' : X'X^{n-1} + Y'Y^{n-1} = 0 \quad (1.2)$$

**Théorème 1:**

*(S') admet une solution pour :*

$$\begin{aligned} X' &= -Y^{n-1} \\ Y' &= X^{n-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

On peut facilement vérifier ce théorème par remplacement de  $X'$  et  $Y'$  dans l'équation différentielle.

Pour le cas  $n = 2$ .

On a :

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad X' = -Y, \quad Y' = X$$

On en déduit aisément que :

$$X = \cos(x) \text{ et } Y = \sin(x)$$

Ce qui indique que (S) est bien un cercle.

Il en résulte de ce premier théorème qu'il existe une infinité de fonctions  $X$  et  $Y$  différentes les unes aux autres en fonction de l'indice  $n$ , ainsi pour  $n = 1$  le système (S) est une droite d'équation, pour  $n = 2$ , (s) est un cercle de rayon 1.

Intéressons nous à présent au cas  $n > 2$ , en recherchant quelques propriétés élémentaires, la figure associée et la représentation géométrique.

## II- symbolique :

Avant de commencer nous noterons  $X = \cos ess_n(x)$  et  $Y = \sin ess_n(x)$  correspondant au cosinus et sinus de François Mendzina Essomba pour les valeurs d'indice  $n$  pairs et  $X = \cosh ess_n(x)$  et  $Y = \sinh ess_n(x)$  pour les fonctions hyperboliques générales :

Ce qui nous amène à réécrire pour le premier cas les formules (2) et (3):

$$\begin{aligned}(\cos ess_n(x))^n + (\sin ess_n(x))^n &= 1 \\ (\cos ess_n(x))' &= -(\sin ess_n(x))^{n-1} \\ (\sin ess_n(x))' &= (\cos ess_n(x))^{n-1}\end{aligned} \quad (2.1)$$

## III- fonctions réciproques et fonctions composées générales:

Nous définissons de manière générale les réciproques des fonctions  $X$  et  $Y$  de même que nous présentons quelques fonctions qui peuvent en résulter d'elles:

### 1) Fonctions réciproques :

i) Cas de la fonction  $X(x)$ .

Nous avons :

$$X(X^{-1}(x)) = x \Rightarrow (X^{-1}(x))' X'(X^{-1}(x)) = 1$$

Grace à l'équation (3), on remplace  $X'(X^{-1}(x))$  par sa fonction dérivée et on trouve :

$$(X^{-1}(x))' [-[Y(X^{-1}(x))]^{n-1}] = 1 \Rightarrow (X^{-1}(x))' = -\frac{1}{[Y(X^{-1}(x))]^{n-1}}$$

Par la suite on considère l'équation (1) et on obtient :

$$\begin{aligned}(X^{-1}(x))' &= -\frac{1}{[Y(X^{-1}(x))]^{n-1}} = -\frac{1}{\left[\left(1 - (X(X^{-1}(x)))^n\right)^{1/n}\right]^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{(1 - x^n)^{\frac{n-1}{n}}}\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$X^{-1}(x) = -\arccos ess_n(x) = -\int \frac{dx}{(1 - x^n)^{\frac{n-1}{n}}} \quad (3.2)$$

ii) Cas de la fonction  $Y(x)$

Pour la fonction  $Y$ , nous en déduisons que :

$$Y^{-1}(x) = \text{arc sin } ess_n(x) = \int \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{n-1}{n}}} \quad (3.3)$$

## 2) fonctions composées générales:

1) - les résultantes de types tangentes :

Cette fonction sera notée  $T_n(x)$  et sera définie par la relation :

$$T_n(x) = \tan ess_n(x) = \frac{Y(x)}{X(x)} = \frac{\sin ess_n(x)}{\cos ess_n(x)} \quad (3.4)$$

$T(x)$  est définie pour  $X(x) \neq 0$ , et a pour fonction dérivée :

$$T_n'(x) = \frac{1}{(X(x))^2} = \frac{1}{(\cos ess_n(x))^2} = (1 + T_n)^{2/n} \quad (3.5)$$

Sa fonction réciproque :

$$\arctan ess_n = \int \frac{dx}{(1+x^n)^{2/n}} \quad (3.6)$$

**Remarque :** pour  $n = 4$ , la formule (3.6) correspond à la fameuse courbe lemniscatique de Gauss.

2) les résultantes de types cotangentes :

La fonction de type cotangente associée s'écrira :

$$coT_n(x) = \frac{X(x)}{Y(x)} = \frac{\cos ess_n(x)}{\sin ess_n(x)} \quad (3.7)$$

Et sa fonction dérivée :

$$(coT_n(x))' = \frac{-1}{(Y(x))^2} \quad (3.8)$$

Sa fonction réciproque :

$$\text{arc cotg } ess_n(x) = - \int \frac{dx}{(1+x^n)^{2/n}} \quad (3.9)$$

On peut également construire pour les fonctions  $h(x)$ ,  $sh(x)$ , ou avec des extensions semblables à exponentiel et logarithme des fonctions  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

## IV- Fonctions de type hyperbolique :

Nous n'allons pas trop nous étendre sur ce volet ici, les figures associées étant de nature divergente. Nous le ferons dans un autre article plus profondément. La description porte donc sur la présentation de quelques fonctions.

soit l'équation cartésienne (S) générale dans Le plan suivante :

$$(S) : X^n - Y^n = 1 \quad (4.1)$$

L'équation différentielle associée à (S) est (S'):

$$(S') : X'X^{n-1} - Y'Y^{n-1} = 0 \quad (4.2)$$

**Théorème 1:**

(S') admet une solution pour :

$$\begin{aligned} X' &= Y^{n-1} \\ Y' &= X^{n-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} X' &= Y^{n-1} = (\sinh \operatorname{ess}_n(x))^{n-1} \\ Y' &= X^{n-1} = (\cosh \operatorname{ess}_n(x))^{n-1} \end{aligned}$$

1) Les fonctions réciproques sont :

$$X^{-1}(x) = \operatorname{arc} \cosh \operatorname{ess}_n(x) = \int \frac{dx}{(x^n - 1)^{\frac{n-1}{n}}} \quad (4.4)$$

$$Y^{-1}(x) = \operatorname{arc} \sinh \operatorname{ess}_n(x) = \int \frac{dx}{(x^n - 1)^{\frac{n-1}{n}}} \quad (4.5)$$

2) Les fonctions qui en résultent :

$$Th_n(x) = \tanh \operatorname{ess}_n(x) = \frac{Y(x)}{X(x)} = \frac{\sinh \operatorname{ess}_n(x)}{\cosh \operatorname{ess}_n(x)} \quad (4.6)$$

$$cTh_n(x) = \frac{X(x)}{Y(x)} = \frac{\cosh \operatorname{ess}_n(x)}{\sinh \operatorname{ess}_n(x)} \quad (4.7)$$

## V- Généralisation des fonctions trigonométriques symétriques

Nous définissons les fonctions trigonométriques symétriques comme toutes formules qui satisfont l'équation  $x^m + y^m = 1$  où  $m = 2k$ ,  $k$  de  $N$ , les fonctions trigonométriques asymétriques étant obtenues par toute équation  $x^m + y^n = 1$  où  $m$  et  $n$  sont des entiers pairs et  $2m \neq 2n$

Les formules trigonométriques symétriques sont définies par la relation :

$$X^{2k} + y^{2k} = 1 \quad (5.1)$$

I- **Description générale :**

1) **Théorème 3**

Les fonctions  $X(x)$  et  $Y(x)$  sont des fonctions périodiques et la période  $p$  desdites fonctions est donnée par la relation :

$$p = 2\sigma_k = 4 \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^{2k})^{\frac{2k-1}{2k}}} = \frac{2}{k} B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right) = \frac{2}{k} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} \quad (5.1)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$X(x + 2\sigma_k) = X(x) \text{ et } Y(x + 2\sigma_k) = Y(x) \quad (5.2)$$

$\Gamma(x)$  et  $B(x)$  étant respectivement les fonctions Gamma et Beta

2) **Théorème 4**

Les constantes  $\sigma_k$  sont irrationnelles et transcendants.

3) **Théorème 5**

Soient  $S_1$  et  $S_2$ , respectivement ensembles des solutions des équations  $X(x) = 0$  et  $Y(x) = 0$  :

On a :

$$S_1 = \left\{ \frac{\sigma_k}{2} + 2k_i \sigma_k, k_i \in \mathbb{Z} \right\} ; S_2 = \{ \sigma_k + 2k_i \sigma_k, k_i \in \mathbb{Z} \} \quad (5.3)$$

Ce qui nous amène à écrire :

$$X\left(\frac{\sigma_k}{2}\right) = X\left(\frac{3\sigma_k}{2}\right) = X\left(\frac{5\sigma_k}{2}\right) = X\left(\frac{7\sigma_k}{2}\right) = \dots = X\left(\frac{(2k+1)\sigma_k}{2}\right) = 0$$

$$Y(\sigma_k) = Y(2\sigma_k) = Y(3\sigma_k) = Y(4\sigma_k) = \dots = Y(k\sigma_k) = 0$$

Ce résultat est facilement vérifiable en procédant à la rotation de la figure géométrique.

4) **Théorème 6**

Les fonctions  $X(x)$  sont des fonctions paires et  $Y(x)$  des fonctions impaires.

$$(5.4)$$

5) **Théorème 7**

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sigma_1 < \sigma_k < \sigma_{k \rightarrow \infty} \Rightarrow \pi < \sigma_k < 4 \quad (5.5)$$

La preuve est le point culminant de ce travail, l'interprétation géométrique de cette formule lie le cercle au le carré et l'ellipse au rectangle en une équation unique.

En effet, pour  $k = 2$ , (S) décrit un cercle de rayon  $r = 1$ .

Et lorsque  $k \rightarrow \infty$  l'équation (S) définie par  $S : X^{2k} + Y^{2k} = 1$  décrit une figure mathématique qui tend de plus en plus vers un carré de côté  $c = 2$ .

### 6) Théorème 8

Lorsque  $k \rightarrow \infty$  l'équation (S) définie par S :

$$\frac{X^{2k}}{a^{2k}} + \frac{Y^{2k}}{b^{2k}} = 1 \quad (5.6)$$

est un objet mathématique qui tend de plus en plus proche du rectangle de longueur  $a$  et de largeur  $b$  si  $a > b$  et inversement si  $b > a$ .

#### Preuve des théorèmes 7 et 8 :

Faisons une représentation géométrique dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  de l'objet mathématique associé à l'équation :

$$X^{2k} + Y^{2k} = 1$$

A cela, intéressons nous aux points particuliers  $A_k(0,1)$ ,  $B_k(1,0)$  et  $C_k(X = Y, Y = X)$

➤  $A_k(0,1)$  et  $B_k(1,0)$  sont des points invariants :

- $A_1(0,1) = A_2(0,1) = A_3(0,1) = \dots = A_k(0,1)$
- $B_1(1,0) = B_2(1,0) = B_3(1,0) = \dots = B_k(1,0)$

➤ Pour le point  $C_k(X = Y, Y = X)$ ,

$$X^{2k} + Y^{2k} = 1 \Rightarrow 2X^{2k} = 2Y^{2k} = 1 \Rightarrow X = Y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2k}}$$

Pour  $\in [1 ; \infty[$ ,  $X$  et  $Y$  sont tristement croissantes.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y = \lim_{k \rightarrow \infty} X = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} = 1$$

$$\|\vec{OC}_1\| < \|\vec{OC}_2\| < \|\vec{OC}_3\| < \dots < \|\vec{OC}_k\|$$

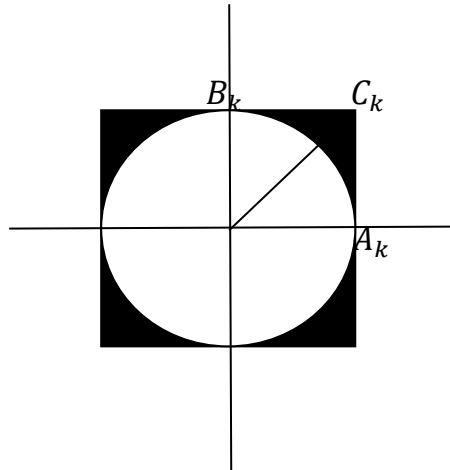
Nous en déduisons donc :

- Pour  $k = 1$ , nous avons :  $A_1(0,1)$  ;  $B_1(1,0)$  et  $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , ce qui correspond à un cercle.
- Pour  $\rightarrow \infty$ , nous avons :  $A_k(0,1)$  ;  $B_k(1,0)$  et  $C_k(1, 1)$ , ce qui tend vers un carré.

Il est facilement vérifiable que la diagonale est également bornée :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} < 1$$

Les objets décrits que nous pouvons considérer comme des carrés à bouts arrondis de longueur centrale  $r = 1$  et de diagonale  $\|\overrightarrow{OC_k}\|$  sont contenus sur la surface hachurée en noir.



Les objets décrits étant compris entre un cercle et un carré, l'aire des figures est également comprise entre celle du cercle et du carré, à savoir  $\pi$  et 4, ce qui justifie amplement le théorème 7 qui peut également être prouvé par les calculs numériques voir tableau de quelques valeurs.

Pour les ellipses le même raisonnement conduit à la démonstration :

Faisons une représentation géométrique dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  de l'objet mathématique associé à l'équation :

$$\frac{X^{2k}}{a^{2k}} + \frac{Y^{2k}}{b^{2k}} = 1$$

A cela, intéressons nous aux points particuliers  $A_k(0, a)$ ,  $B_k(1, b)$  et  $C_k(X = a/b Y, Y = b/a X)$  ;

➤  $A_k(a, 0)$  et  $B_k(0, b)$  sont des points invariants :

- $A_1(a, 0) = A_2(a, 0) = A_3(a, 0) = \dots = A_k(a, 0)$
- $B_1(0, b) = B_2(0, b) = B_3(0, b) = \dots = B_k(0, b)$

➤ Pour le point  $C_k(X = a/b Y, Y = b/a X)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{X^{2k}}{a^{2k}} + \frac{Y^{2k}}{b^{2k}} = 1 &\Rightarrow X^{2k} \left( \frac{1}{a^{2k}} + \frac{1}{b^{2k}} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \right) = X^{2k} \left( \frac{2}{a^{2k}} \right) = 1 \\ &\Rightarrow X = \frac{a}{2^{1/2k}} \text{ et } Y = \frac{b}{2^{1/2k}} \end{aligned}$$



Pour  $\in [1 ; \infty[$ , les fonctions  $X$  et  $Y$  sont tristement croissantes.

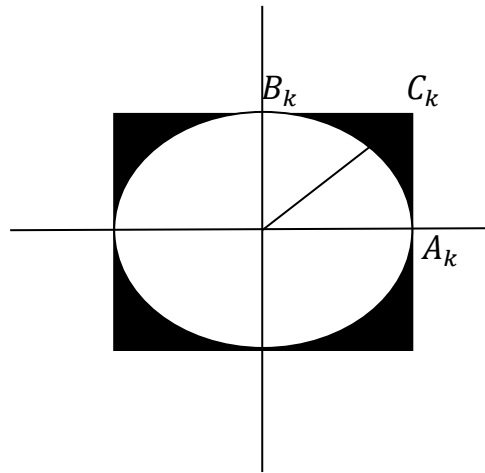
$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{2^{1/2k}} \right) = b ; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} X = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{2^{1/2k}} \right) = a$$

$$\|\vec{OC}_1\| < \|\vec{OC}_2\| < \|\vec{OC}_3\| < \dots < \|\vec{OC}_k\|$$

Nous en déduisons donc :

- Pour  $k = 1$ , nous avons :  $A_1(a, 0)$  ;  $B_1(0, b)$  et  $C_1(\frac{a}{2^{1/2}}, \frac{b}{2^{1/2}})$ , ce qui correspond à une ellipse.
- Pour  $\rightarrow \infty$ , nous avons :  $A_k(a, 0)$  ;  $B_k(0, b)$  et  $C_k(a, b)$ , ce qui tend vers un rectangle de côté  $a$  et  $b$ .

Les objets décrits que nous pouvons considérer comme des rectangles à bouts arrondis de longueur et largeur centrales  $L = a$  et  $l = b$  sont contenus sur la surface hachurée en noire.



## VI- Surfaces et périmètres des figures géométriques décrites.

### Théorème 9

La surface d'un carré de bout arrondi généré par l'équation  $X^{2k} + Y^{2k} = 1$  est :

$$S_k = \sigma_k$$

**Preuve :**

On obtient d'après la relation (5.1) :  $Y = (1 - X^{2k})^{1/2k}$

A travers la symétrie de la figure, l'on utilise une intégrale :

$$S_k = 2 \int_{-1}^1 (1 - X^{2k})^{1/2k} dx = 4 \int_0^1 (1 - X^{2k})^{1/2k} dx = \frac{2}{k} B\left(\frac{1}{2k} ; 1 + \frac{1}{2k}\right) = \sigma_k \quad (6.1)$$

Plus généralement, la surface d'un carré arrondi d'indice  $n$ , de longueur centrale  $r = R = OA_k$  et de longueur diagonale  $h = OC_k$  est :

$$S_k = \sigma_k R^2 \quad (6.2).$$

### **Théorème 10**

*Le périmètre d'un carré arrondi d'indice  $n$ , de longueur centrale  $r = R = OA_k$  et de longueur diagonale  $h = OC_k$  est :*

$$P_k = 4\sigma_k \quad (6.3)$$

### **Démonstration :**

Le périmètre  $P$  du carré arrondi de rayon central  $R$  est compris entre le périmètre du cercle  $R$  et le périmètre du carré de côté  $c = 2R$ .

$$2\pi R < P < 8R$$

D'après le **théorème 7**

$$\pi < \sigma_k < 4$$

On en déduit que :

$$2\pi R < 2R\sigma_k < 8R \Rightarrow P = 2R\sigma_k$$

### **Théorème 11**

*L'aire de la surface d'une ellipse de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$  est :*

$$S_k = ab\sigma_k \quad (6.4)$$

La preuve peut également être obtenue du théorème 7, en considérant cette fois là qu'à l'infini l'ellipse décrit un rectangle de longueur  $2a$  et de largeur  $2b$ , le périmètre recherché devient donc encadré par :

$$\pi ab < P_k < 4ab$$

On en déduit que :

$$S = ab\sigma_k$$

### **Théorème 11**

*Le périmètre d'un rectangle arrondi est compris entre le périmètre d'une ellipse de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$  et celui d'un rectangle de côté  $2a$  et  $2b$  :*

$$4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2(\cos(x))^2 + b^2(\sin(x))^2} dx < P < 4(a + b) \quad (6.5)$$

Cette inégalité dans ses deux bornes ne nous permet d'en déduire théorème 7, par conséquent nous ne pouvons pas en déduire la valeur exacte de P par cette méthode.

Une valeur approchée de P pour de grande valeur de k serait :

$$P \approx (a + b)\sigma_k \quad (6.6)$$

La valeur exacte quant-à elle devrait faire intervenir les intégrales elliptiques de troisième et de quatrième espèce.

## **VII- Extension des fonctions trigonométriques aux bords arrondis dans l'espace**

Nous définissons les fonctions trigonométriques symétriques dans l'espace comme toutes formules qui satisfont l'équation  $x^m + y^m + z^m = 1$  où  $m = 2k$ ,  $k$  de  $N$ , les fonctions trigonométriques asymétriques étant obtenues par toute équation  $x^m + y^n + z^w = 1$  où  $m$ ,  $n$  et  $w$  sont des entiers pairs et  $m \neq n \neq w$

Les formules trigonométriques symétriques dans l'espace sont définies par la relation :

$$X^{2k} + y^{2k} + Z^{2k} = 1 \quad (7.1)$$

### **1- Les sphères bombées ou cubes aux bouts arrondis**

soit l'équation générale dans l'espace (S) suivante :

$$(S) : X^n + Y^n + Z^n = 1 \quad (7.2)$$

#### **Théorème 12**

L'équation différentielle associée à (S) est :

$$X'X^{n-1} + Y'Y^{n-1} + Z'Z^{n-1} = 0 \quad (7.3)$$

Cette équation admet une solution pour :

$$\begin{aligned} X' &= Y^{n-1} + Z^{n-1} \\ Y' &= -X^{n-1} + Z^{n-1} \\ Z' &= -X^{n-1} - Y^{n-1} \end{aligned} \quad (7.4)$$

#### **Théorème 13**

- Pour  $n = 2$ , (S) désigne une sphère de rayon 1 ;
- Pour  $n = 2k$ , avec  $k \rightarrow \infty$  (S) tend vers un cube de côté  $c = 2$  ; (7.5)

### **2- Les ellipsoïdes bombées ou pavés aux bouts arrondis**

soit l'équation générale dans l'espace (S) suivante :

$$(S) : \frac{X^n}{a^n} + \frac{Y^n}{b^n} + \frac{Z^n}{c^n} = 1 \quad (7.6)$$

### **Théorème 14**

L'équation différentielle associée à (S) est :

$$\frac{X'X^{n-1}}{a^n} + \frac{Y'Y^{n-1}}{b^n} + \frac{Z'Z^{n-1}}{c^n} = 0 \quad (7.7)$$

Qui admet une solution pour :

$$\begin{aligned} X' &= \frac{Y^{n-1}}{b^n} + \frac{Z^{n-1}}{c^n} \\ Y' &= -\frac{X^{n-1}}{a^n} + \frac{Z^{n-1}}{c^n} \\ Z' &= -\frac{X^{n-1}}{a^n} - \frac{Y^{n-1}}{b^n} \end{aligned} \quad (7.8)$$

### **Théorème 15**

- Pour  $n = 2$ , (S) désigne une ellipsoïde ;
- Pour  $n = 2k$ , avec  $k \rightarrow \infty$  (S) tend vers un pavé droit de côté  $a, b$  et  $c$  (7.9)

### **3- les hyper-sphères bombées ou hyper-cubes aux bouts arrondis dans un espace de dimension m**

Soit l'équation générale dans l'espace (S) suivante :

$$(S) : x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots x_m^n = 1 \quad (7.10)$$

### **Théorème 16**

L'équation différentielle associée à (S) est :

$$(x_1)'x_1^{n-1} + (x_2)'x_2^{n-1} + (x_3)'x_3^{n-1} + \dots (x_m)'x_m^{n-1} = 0 \quad (7.11)$$

Et admet une solution pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1)' = x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_m^{n-1} + x_m^{n-1} \\ (x_2)' = -x_1^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_m^{n-1} + x_m^{n-1} \\ (x_3)' = -x_1^n - x_2^n + \dots + x_m^{n-1} + x_m^{n-1} \\ \vdots \\ (x_{m-1})' = -x_1^n - x_2^n - \dots - x_m^{n-1} + x_m^{n-1} \\ (x_m)' = -x_1^n - x_2^n - \dots - x_{m-1}^{n-1} - x_m^{n-1} \end{array} \right. \quad (7.12)$$

### Théorème 17

- Pour  $n = 2$ , (S) désigne une hyper-sphère de dimension  $n$  ;
- Pour  $n = 2k$ , avec  $k \rightarrow \infty$  (S) tend vers un hypercube de dimension  $n$  de côté  $c = 2$  ;

### 4- les hyper-ellipsoïdes et hyper-pavés aux arrondis

Soit l'équation générale dans l'espace (S) suivante dans un repère orthonormé dans un espace à  $n$  dimensions :

$$(S) : \frac{x_1^n}{a_1^n} + \frac{x_2^n}{a_2^n} + \frac{x_3^n}{a_3^n} + \dots + \frac{x_m^n}{a_m^n} = 1 \quad (7.12)$$

### Théorème 15 :

L'équation différentielle associée à (S) est :

$$\frac{(x_1)'x_1^{n-1}}{a_1^n} + \frac{(x_2)'x_2^{n-1}}{a_2^n} + \frac{(x_3)'x_3^{n-1}}{a_3^n} + \dots + \frac{(x_m)'x_m^{n-1}}{a_m^n} = 0 \quad (7.13)$$

Et admet une solution pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1)' = x_2^{n-1}/a_2 + x_3^{n-1}/a_3 + \dots + x_{m-1}^{n-1}/a_{m-1} + x_m^{n-1}/a_m \\ (x_2)' = -x_1^{n-1}/a_1 + x_3^{n-1}/a_3 + \dots + x_{m-1}^{n-1}/a_{m-1} + x_m^{n-1}/a_m \\ (x_3)' = -x_1^{n-1}/a_2 - x_2^{n-1}/a_2 + \dots + x_{m-1}^{n-1}/a_{m-1} + x_m^{n-1}/a_m \\ \vdots \\ (x_{m-1})' = -x_1^{n-1}/a_1 - x_2^{n-1}/a_2 - \dots - x_{m-2}^{n-1}/a_{m-2} + x_m^{n-1}/a_m \\ (x_m)' = -x_1^{n-1}/a_2 - x_2^{n-1}/a_2 - \dots - x_{m-2}^{n-1}/a_{m-2} - x_{m-1}^{n-1}/a_{m-1} \end{array} \right. \quad (7.14)$$

### Théorème 16 :

- Pour  $n = 2$ , (S) désigne un hyper-ellipsoïde de dimension  $n$  ;
  - Pour  $n = 2k$ , avec  $k \rightarrow \infty$  (S) tend vers un hyperpavé de dimension  $a_1 a_2 \dots a_m$  ;
- (7.15)

### VIII- Volume des sphères et des ellipsoïdes aux formes arrondies.

#### 1) Volume de la sphère de la sphère de dimension 3:

Nous considérons dans la description qui suit  $V_k(m)$  comme le volume d'indice  $k$  et de dimension  $m$ ,  $V_k(1)$  est un segment,  $V_k(2)$  est une surface et  $V_k(3)$  un volume,  $V_k(4)$  un hyper volume etc...

Si l'on fait tourner une surface (S) le long de l'axe (OI) le volume élémentaire engendré par l'aire de la surface sera :

$$dV = \sigma_n x^2 dy$$

En revenant sur l'équation (1.1)

$$x^n + y^n = 1 \Rightarrow x^n = 1 - y^n \Rightarrow x = (1 - y^n)^{\frac{1}{n}}$$

On en déduit :

$$x^2 = (1 - y^n)^{\frac{2}{n}}$$

En remplaçant dans la formule :

$$dV = \sigma_n (1 - y^n)^{\frac{2}{n}} dy \Rightarrow V_n(3) = \int_{-1}^1 \sigma_n (1 - y^n)^{\frac{2}{n}} dy$$

Ce qui nous conduit à :

$$V_n(3) = \int_{-1}^1 \sigma_n (1 - y^n)^{\frac{2}{n}} dy = \frac{2\sigma_n}{n} B\left(\frac{1}{n}; \frac{n+2}{n}\right) = \frac{2\sigma_n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$$

En remplaçant  $n$  par  $2k$ , on obtient :

$$V_k(3) = \int_{-1}^1 \sigma_k (1 - y^{2k})^{\frac{1}{k}} dy = 2 \int_0^1 \sigma_k (1 - y^{2k})^{\frac{1}{k}} dy = \frac{\sigma_k}{k} B\left(\frac{1}{2k}; \frac{k+1}{k}\right)$$

Ce qui donne finalement :

$$V_k(3) = \frac{\sigma_k}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} = \frac{1}{k^2} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} \quad (8.1)$$

Et pour n'importe quel rayon  $R$ , nous aurons :

$$\begin{aligned} V_k(3)_R &= \frac{\sigma_k}{k} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{1}{k}\right) R^3 = \frac{\sigma_k}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} R^3 \\ &= \frac{1}{k^2} B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right) B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{1}{k}\right) R^3 = \frac{1}{k^2} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} R^3 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$V_k(3)_R = \frac{\sigma_k \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} R^3 = \frac{1}{k^2} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} R^3 \quad (8.2)$$

On peut vérifier l'encadrement suivant pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{4\pi}{3} < V_k(R) < 8 \quad (8.3)$$

Où les deux bornes sont respectivement les volumes du cercle de rayon 1 et cube de côté  $c = 2$ .

## 2) volume de l'ellipsoïde dans un espace à trois dimensions générée par l'équation elliptique suivante :

Si l'on fait tourner une surface (S) le long de l'axe (OI) le volume élémentaire engendré par l'aire de la surface sera :

$$dV = \sigma_n x^2 dy$$

En revenant sur l'équation (5.6)

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1 \Rightarrow x^n = a^n \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right) \Rightarrow x = a \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

On en déduit :

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\frac{2}{n}}$$

En remplaçant dans la formule :

$$dV = \sigma_n a^2 \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\frac{2}{n}} dy \Rightarrow V_n(R) = \sigma_n a^2 \int_{-b}^b \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\frac{2}{n}} dy$$

Ce qui nous conduit à :

$$V_n(3) = \sigma_n a^2 \int_{-b}^b \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\frac{2}{n}} dy = \frac{ba^2 \sigma_n}{n} B\left(\frac{1}{n}; \frac{n+2}{n}\right) = \frac{ba^2 \sigma_n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$$

En remplaçant n par 2k, on obtient :

$$V_k(3) = \sigma_n a^2 \int_{-b}^b \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\frac{2}{n}} dy = \frac{ba^2 \sigma_k}{k} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{ba^2 \sigma_k}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)}$$

Finalement :

$$V_k(3) = \frac{ba^2 \sigma_k \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} = \frac{ba^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k^2 \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} \quad (8.4)$$

Pour la formule plus générale (7.6) suivante :

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$$

Nous aurons :

$$V_k(3) = \frac{abc \sigma_k}{k} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{abc \sigma_k \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} = \frac{abc \left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k^2 \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)}$$

Ainsi :

$$V_k(3) = \frac{abc \sigma_k \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} = \frac{abc \left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k^2 \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} \quad (8.5)$$

### 3) Volume et surface de l'hyper-sphère dans un espace de dimension $m$

Il est démontré pour le degré 2 que le volume est proportionnel au rayon  $r$ , par récurrence on démontre facilement qu'il en est de même pour les indices supérieurs :

Cette propriété nous amène à établir ce qui suit avec  $2k$  comme degré de l'équation,  $m$  dimension de l'espace et  $V(m)$  volume de la figure arrondie :

$$V_k(3) = \int_{-1}^1 \sigma_k (1 - y^{2k})^{\frac{1}{k}} dy = \frac{\sigma_k \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)} = \frac{1 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k^2 \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right)}$$

$$\begin{aligned} V_k(4) &= \int_{-1}^1 V_3(k) (1 - y^{2k})^{\frac{3}{2k}} dy = \frac{V_3(k)}{k} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{3}{2k}\right) \\ &= \frac{\sigma_k}{k^2} B\left(\frac{1}{2k}; \frac{k+1}{k}\right) B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{3}{2k}\right) \\ &= \frac{1 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^4 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k^3 \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{4}{2k}\right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
V_n(5) &= \int_{-1}^1 V_n(4) (1 - y^{2k})^{\frac{4}{2k}} dy = \frac{V_n(4)}{k} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{4}{2k}\right) \\
&= \frac{\sigma_k}{k^3} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{1}{k}\right) B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{3}{2k}\right) B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{4}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{k^4} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right)^5 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{5}{2k}\right)}
\end{aligned}$$

On en déduit de cette récurrence que :

$$\begin{aligned}
V_n(m) &= \int_{-1}^1 V_n(m-1) (1 - y^{2k})^{\frac{m-1}{2k}} dy = \frac{V_n(m-1)}{k} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{m-1}{2k}\right) = \\
&= \frac{\sigma_k}{k^{m-2}} B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{2}{2k}\right) B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{3}{2k}\right) B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{4}{2k}\right) \times \dots \times B\left(\frac{1}{2k}; 1 + \frac{m-1}{2k}\right) \\
&= \frac{\sigma_k}{k^{m-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2}{2k}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{4}{2k}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m-1}{2k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{4}{2k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{5}{2k}\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)}
\end{aligned}$$

Après simplification, le volume de l'hypersphère de rayon  $R = 1$  est donné par la relation :

$$V_k(m) = \frac{1}{k^{m-1}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} = \frac{1}{k^m} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} \quad (8.6)$$

Ce volume pour un rayon quelconque  $R$  sera :

$$V_k(m) = \frac{1}{k^{m-1}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} R^m = \frac{1}{k^m} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} R^m \quad (8.7)$$

Son aire sera par conséquent :

$$S_k(m) = \frac{m}{k^{m-1}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} R^{m-1} = \frac{m}{k^m} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} R^{m-1} \quad (8.8)$$

#### 4) Volume et surface de l'hyper-ellipsoïde de dimension $m$

$$V_k(m) = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_m}{k^{m-1}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_m}{k^m} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right]^m}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} \quad (8.9)$$

Son aire sera sensiblement :

$$S_k(m) \approx \frac{(a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \dots + a_m^{m-1}) \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) \right]^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k^{m-1} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m}{2k}\right)} \quad (8.10)$$

## IX- Fonctions générées par des degrés asymétriques.

Généralisation :

Dans la première partie du document nous avons étudié les fonctions pour des degrés de même valeurs que nous avons considérées comme des équations aux degrés symétriques.

Nous considérons les équations au degré asymétriques, toutes équations de la forme :

$$\begin{aligned} X^{2\lambda} + Y^{2\beta} &= 1 & (9.1) \\ \text{où } \lambda \text{ et } \beta &\in \mathbb{N} / \lambda \neq \beta \neq 0 \end{aligned}$$

L'équation différentielle associée à (S) est (S'):

$$(S)' : \lambda X' X^{2\lambda-1} + \beta Y' Y^{2\beta-1} = 0 \quad (9.2)$$

**Théorème 17:**

(S') admet une solution pour :

$$\begin{aligned} X' &= -\beta Y^{2\beta-1} \\ Y' &= \lambda X^{2\lambda-1} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Nous noterons pour les fonctions à degré asymétriques  $X = \cos \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$  et  $Y = \sin \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$  pour les figures fermées et  $X = \cosh \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$  et  $Y = \sinh \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$  pour les figures hyperboliques générales. Des constructions de toutes les autres fonctions deviennent évidentes avec cette forme notamment :  $\cos^{-1} \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$ ,  $\sin^{-1} \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$ ,  $\tan \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$ ,  $\tan^{-1} \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$ ,  $\sec \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$ ,  $\sec^{-1} \text{ess}_{\lambda/\beta}(x)$ ... etc.

**Théorème 18 :**

Les fonctions  $X$  et  $Y$  sont des fonctions périodiques de période  $p$  :

$$p = \frac{4 \Gamma\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\beta}\right)}{\lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\beta}\right)} = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\beta}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\lambda}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\beta}\right)} \quad (9.4)$$

**Théorème 19:**

L'aire de la figure géométrique décrite est de  $p/2$  ;

$$\sigma_{\lambda/\beta} = \sigma_{\beta/\lambda} = \frac{2 \Gamma\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\beta}\right)}{\lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\beta}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\beta}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\lambda}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\beta}\right)} \quad (9.5)$$

**Théorème 20:**

Lorsque  $\lambda, \beta \rightarrow \infty$ , la figure géométrique décrite est un carré de côté  $c=4$ . Ce qui justifie l'encadrement suivant :

$$\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} < \sigma_{\lambda/\beta} < 4 \quad (9.6)$$

**Théorème 21:**

Le volume est proportionnel au rayon, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} V_{\lambda/\beta}(m) &= \int_{-1}^1 V_{\lambda/\beta}(m-1) (1-y^{2\beta})^{\frac{m-1}{2\lambda}} dy \\ &= V_{\lambda/\beta}(m-1) B\left(\frac{1}{2\beta}, 1 + \frac{2\lambda + (m-1)}{2k}\right) \end{aligned}$$

**X- Exemple numérique :**

Cas de l'équation :  $(X(x))^4 + (Y(x))^4 = 1$  ;

Posons  $X(x) = \cos \text{ess}_4(x)$  et  $Y(x) = \sin \text{ess}_4(x)$

Nous avons :

$$(\cos \text{ess}_4(x))^4 + (\sin \text{ess}_4(x))^4 = 1$$

Fonctions dérivées :

$$(\cos \text{ess}_4(x))' = -(\sin \text{ess}_4(x))^3 \text{ et } (\sin \text{ess}_4(x))' = (\cos \text{ess}_4(x))^3$$

Fonctions réciproques :

$$\text{arc cos ess}_4(x) = -\int \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}} \quad \text{et} \quad \text{arc sin ess}_4(x) = \int \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$$

Période des fonctions :

$$p = 2\sigma_2 = 4 \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}}$$

Valeur numérique approchée de la constante associée :

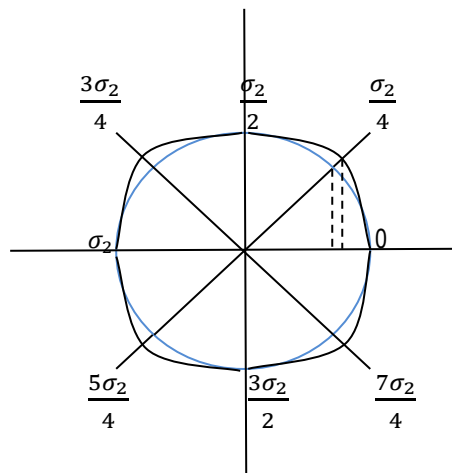
$$\sigma_2 = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{2\sqrt{\pi}} = 3,708149354620986$$

Equations associées :

$\cos ess_4(x) = 0$  solutions :  $x = \frac{\sigma_2}{2} + 2k\sigma_2$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

$\sin ess_4(x) = 0$  solutions :  $x = \sigma_2 + 2k\sigma_2$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

Représentation géométrique de l'objet mathématique décrit :



On peut également , en partant de l'équation  $x^4 + y^4 = 1$  , vérifier que l'aire de cette surface sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  vaut :

$$A = \int_0^1 (1 - x^4)^{\frac{1}{4}} dx = \frac{\sigma_2}{4}$$

Nous allons considérer la figure représentée comme un objet de rayon  $R = 1$  et de valeur

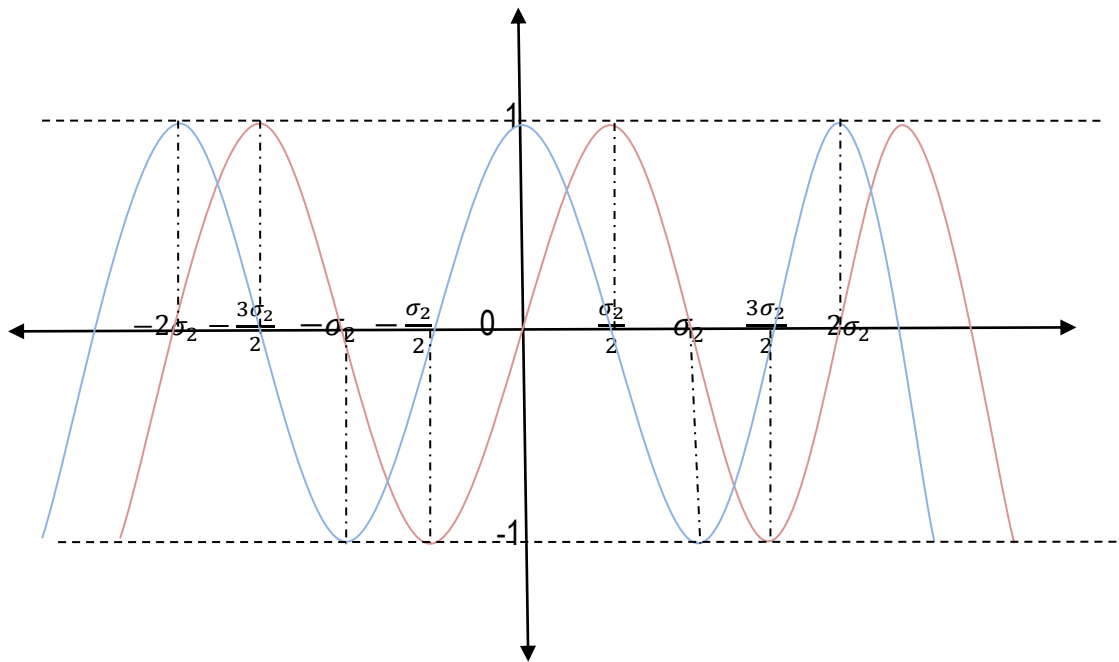
hypothénuse  $h = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$  avec une surface de valeur :  $S = \sigma_2$

Pour des rayons  $R$  supérieurs, avec la même valeur  $h$ , la surface est donnée par la relation :

$$S = \sigma_2 R^2$$

Représentation graphique des deux fonctions :

Sur la figure la courbe de  $\cos ess_4(x)$  est en bleue et de  $\sin ess_4(x)$  en rouge.



### Développement limité des dites fonctions :

Pour le calcul des dérivées, nous posons :

$$[r, k] = X^r Y^k$$

En dérivant :

$$([r, k])' = rX'X^{r-1}Y^k + kY'Y^{k-1}X^r$$

Or en revenant à l'équation (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} ([r, k])' &= -rY^{n-1}X^{r-1}Y^k + kX^{n-1}Y^{k-1}X^r = -rX^{r-1}Y^{k+n-1} + kX^{r+n-1}Y^{k-1} \\ &= -r[r-1, k+n-1] + k[r+n-1, k-1] \end{aligned}$$

Nous en déduisons pour  $a$  un réel quelconque :

$$a([r, k])' = -ra[r-1, k+n-1] + ka[r+n-1, k-1]$$

Un algorithme informatique reproduisant cette boucle pourrait facilement nous emmener à donner un développement limité de nos fonctions.

Tableau récapitulatif de quelques constantes FME

N°	Valeur approchée de la constance $\sigma_n$
$\sigma_1 = \pi$	3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628
$\sigma_2$	3,70814935460274383686770069439052009243519764704353381117185609011204355375
$\sigma_3$	3,85524259331999626209139557665254611917427312380704283412389421412743373445
$\sigma_4$	3,91384328781318103070893034994827917302712799744352778220721985728429873838
$\sigma_5$	3,94292789781003233263347789093030507915700438454787339418153597796358020327
$\sigma_6$	3,95943650355640911426981334884246873724389762506719737954011346424202275338
$\sigma_7$	3,96969669227111521338562009531125881481761886714244333918222707823827237334
$\sigma_8$	3,97650520621106741560910078785663643077000880323612441939340100950475614095
$\sigma_9$	3,98125285310061061009439732081904425397799083721733379829042425851558596596
$\sigma_{10}$	3,98469454206269945104112798385575213664812234261601518598579439273149048179
$\sigma_{11}$	3,98726873180520489211118336816534811960488928949322483761131409357801799386
$\sigma_{12}$	3,98924421751849778769331837014783106846504467551596185715617057499252750127
$\sigma_{13}$	3,99079321846673925105765183010179870847489457683325167597087962970164800402
$\sigma_{14}$	3,99203020865927973874796585993698449692603132610622945651955357376909824271
$\sigma_{15}$	3,99303368294156842699000564950924446980228612990848431750902811987929354699
$\sigma_{16}$	3,99385892009847599048232973332097445719613984479931572345578152700051143975
$\sigma_{17}$	3,99454576017319105416336172772984647657215727879424037082195626571842196358
$\sigma_{18}$	3,99512350367501713877258186856170070609020586325906388455659064717154204806
$\sigma_{19}$	3,99561408852165959089258181763062744076525754327697229580788831282102433936
$\sigma_{20}$	3,99603420342206981090832551166720286542511755381279417325015973917222635964
$\sigma_{21}$	3,9963967259677305380712753423877240969426891628729085955044482404660066685
$\sigma_{22}$	3,99671172122628755328610824426351912886519759948009990137375447678662352919
$\sigma_{23}$	3,99698714789527023984239060295098955527709867704886007329431497426250825171
$\sigma_{24}$	3,99722936594726207587975782749682576226369767582093711727235504158680729023
$\sigma_{25}$	3,99744350707068882330131074387668808108282708714144035056742722098742563904
$\sigma_{100}$	3,99983670259035443320728014490361436136027215893817180675701312157437446263
$\sigma_{1000}$	3,99999835626738153135066036532231851591936269012449184669448833688169990034
$\sigma_{10000}$	3,99999998355186132754304689727588846343447579828408510222086458036678535750
$\sigma_{100000}$	3,99999999983550779536599247609425828160015749495801815396308060865250490462
$\sigma_{1000000}$	3,9999999999835506713520806791658627731331456568203315321834473910077694798

**Quelques constances pour les degrés asymétriques.**

N°	Valeur approchée de la constance $\sigma_{\lambda/\beta} = \sigma_{\beta/\lambda}$
$\sigma_{1/2}$	3.49607673905615974728645278652149255157700660190883088375576227173438744942
$\sigma_{1/3}$	3.64297597183137241772991253467139687283255226731236391162494412820810853104
$\sigma_{2/3}$	3.79426542131987384302394156027154767895229595882846110011656425995425111282
$\sigma_{1/4}$	3.72349622789846200096805805698937132402429081317206587966913311911379012117
$\sigma_{2/4}$	3.84108397266534886970412153301195688066441967251189260736120117052572278239
$\sigma_{3/4}$	3.88829410645231725111637347897761746050021205582363070163038620351005160451
$\sigma_{1/5}$	3.77436232507191790715198165052332100233054515441779181746871464584373475904
$\sigma_{2/5}$	3.87052818944977808852518452337418301128540909207593322688040123276973649649
$\sigma_{3/5}$	3.90904592110301592586937639010525485138237289548897457897806124183497398252
$\sigma_{4/5}$	3.92987085818862052960103303824935922614013963541171938969727437239288574821
$\sigma_{6/5}$	3.95188295988412538994088989456497229458365319060397405553366586257897712727
$\sigma_{1/6}$	3.80941474965671051471243201816104734691450243053013286634856498618780013003
$\sigma_{2/6}$	3.89076123156223175312997575129415654443187698552430363675260732622536382399
$\sigma_{3/6}$	3.92329093089261085486486307075634176754330696836186181410327054824283404519
$\sigma_{4/6}$	3.94086692153430527260879572645841741218665872884853366480746067583598183126
$\sigma_{1/7}$	3.83503792910188743440596352304556229075793191563120267364995290118333434376
$\sigma_{2/7}$	3.90552262486963359474770634729704334304335485614344510125833199745118590251
$\sigma_{3/7}$	3.9336761249316475301629423034068376961919888579321262503796426394219444277
$\sigma_{4/7}$	3.94888047338143164612276985400699517284211769665593443110571248796998855775
$\sigma_{5/7}$	3.95840758598790036230814756183198953261938222314157815892529962563405351432
$\sigma_{6/7}$	3.96493912399179700316008914287763178706759395252575529958530660151113628971
$\sigma_{1/8}$	3.85458637898384354311417583813143693983761576416408160347776426884994309001
$\sigma_{2/8}$	3.91676827513467262903412258535466888054352047889539064127053967483478888667
$\sigma_{3/8}$	3.9415836638454334258183901623574182066993521480478110621006842602101803897
$\sigma_{4/8}$	3.95498049586147992065104867252063569453275661060868694861407753550456622874
$\sigma_{1/100}$	3.98777996732071559037763102678822693384321379116713456788218604592031382612
$\sigma_{1/1000}$	3.99877313184611435766227691210259164941870370923944392847945268676929025145
$\sigma_{1/10000}$	3.99987726430579688701577576849952606194788120906511345012748701701368273836
$\sigma_{1/100000}$	3.9999877259415604621971766541069748479346830675557480652936656464341670388
$\sigma_{1000000}$	3.99999877258926562276049487973384562091989390269887436636165074578599993801

## XI- Quelques relations entre les constantes sigma et la fonction gamma

Nous en déduisons grâce à notre travaux quelques valeurs sigulières de la fonction gamma.

1) Sur les quarts d'entiers

$$\left[ \Gamma \left( \frac{1}{4} \right) \right] = \sqrt{2\sigma_2\sqrt{\pi}} \quad (9.1)$$

En utilisant le symbole de Pochhammer  $x^{(n)}$ , nous obtenons :

$$\left[ \Gamma \left( n + \frac{1}{4} \right) \right] = x^{(n)} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{4} \right) \right] = x^{(n)} \sqrt{2\sigma_2\sqrt{\pi}} \quad (9.2)$$

2) Plus généralement  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\left[ \Gamma \left( \frac{1}{2n} \right) \right] = \sqrt{n\sigma_n \Gamma \left( \frac{1}{n} \right)} \quad (9.3)$$

En utilisant le symbole de Pochhammer  $x^{(n)}$ , nous obtenons :

$$\left[ \Gamma \left( n + \frac{1}{2k} \right) \right] = x^{(k)} \sqrt{k\sigma_n \Gamma \left( \frac{1}{k} \right)} \quad (9.4)$$

3) Avec la formule (9.2), il devient plus aisé de construire des gammas à valeurs singulières avec pour des termes en  $2^n$ .

$$\left[ \Gamma \left( n + \frac{1}{8} \right) \right] = x^{(4)} \sqrt{4\sigma_4 \Gamma \left( \frac{1}{4} \right)} \quad (9.5)$$

En considérant la formule d'entrée (9.1), nous obtenons :

$$\left[ \Gamma \left( n + \frac{1}{8} \right) \right] = x^{(4)} \sqrt{4\sigma_4 \sqrt{2\sigma_2\sqrt{\pi}}} \quad (9.6)$$

4) Pour la fonction 1/16

$$\left[ \Gamma \left( n + \frac{1}{16} \right) \right] = x^{(8)} \sqrt{8\sigma_8 \sqrt{4\sigma_4 \sqrt{2\sigma_2\sqrt{\pi}}}} \quad (9.7)$$

5) Ce qui de manière récurente nous conduit à :



$$\left[ \Gamma \left( n + \frac{1}{2^n} \right) \right] = x^{(2^{n-1})} 2^{n-2} \sqrt{\sigma_{2^{n-1}}} \sqrt{\sigma_{2^{n-2}}} \sqrt{\dots} \sqrt{2\sigma_2 \sqrt{\pi}} \quad (9.8)$$

6) Avec un nombre entier p quelconque :

$$\left[ \Gamma \left( n + \frac{1}{2^{n-1}p} \right) \right] = x^{(p2^{n-2})} 2^{n-2} \sqrt{p\sigma_{2^{n-2}}} \sqrt{p\sigma_{2^{n-1}}} \sqrt{\dots} \sqrt{p\sigma_p \left[ \Gamma \left( \frac{1}{p} \right) \right]} \quad (9.9)$$

### **Théorème 22.**

Tous les nombres gamma peuvent s'exprimer comme une combinaison des constantes de degré symétrique et asymétrique qui ont été définies.

### **Référence :**

Wikipedia source.

- [Karl Rawer](#), *Wave Propagation in the Ionosphere*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- O. R. Rocktäschel, *Methoden zur Berechnung der Gammafunktion für komplexes Argument*, université technologique de Dresde, 1922, thèse de doctorat.
- P. E. Böhmer, *Differenzgleichungen und bestimmte Integrale*, Leipzig, Köhler Verlag, 1939.
- [Serge Lang](#), *Complex Analysis*, Springer, coll. « GTM » (n° 103), 1998 (ISBN 978-0-38798592-3, lire en ligne [archive](#)), p. 418.
- Paul Heinrich Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII<sup>e</sup> siècle*, vol. II, St. Pétersbourg, Académie impériale des sciences, 1843 (lire en ligne [archive](#)).
- Detlef Gronau, « Why is the gamma function so as it is? », *Teaching Mathematics and Computer Science*, vol. 1, n° 1, 2003, p. 43-53.
- [Jonathan M. Borwein](#) et Robert M. Corless, « Gamma and Factorial in the Monthly », *American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, vol. 121, mars 2017,