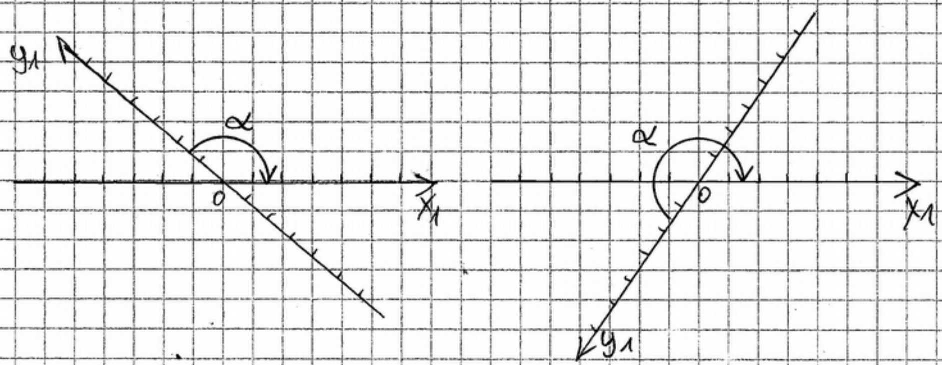
UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH O ZMIENNYM KĄCIE OSI OY WZGLĘDEM OSI OX

1

UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O ZMIENNYM KĄCIE OSI OY_1 WZGLĘDEM OSI OX_1 NAZYWAMY TAKI UKŁAD, W KTÓRYM OŚ OY_1 PRZECINA OŚ OX_1 POD DOWOLNYM KĄTEM α ZAWARTYM MIĘDZY DODATNIĄ PÓŁOSIĄ OY_1 A DODATNIĄ PÓŁOSIĄ OX_1.
PUNKTEM ODNIESIENIA JEST OX_1, KTÓRA MA STAŁY ZWROT I KIERUNEK DLA WSZYSTKICH UKŁADÓW TEGO TYPU



I WIELKOŚCI LICZBOWE WSPÓŁRZĘDNYCH x_1, y_1 W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE OSI OY_1 WZGLĘDEM OSI OX_1 BĘDĄ WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM

$x_1 = x$ $\qquad$ $y_1 \cdot \sin\alpha = y$ $\qquad$ x, y – dowolne liczby

x_1, y_1 – wartości liczbowe w układzie OX_1Y_1 liczb x i y

$\sphericalangle\alpha$ – kąt zawarty między OY_1 a OX_1

②

II. PUNKT W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE OSI OY_1 WZGLĘDEM OSI OX_1

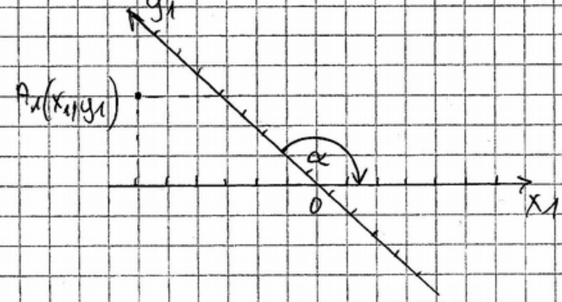
DOWOLNY PUNKT $A(x,y)$ OPISANY RÓWNANIEM $y=ax$ W TYM UKŁADZIE BĘDZIE OPISANY RÓWNANIEM

$$y_1 \cdot \sin\alpha = ax_1$$

ponieważ:

$$y = ax \ \wedge \ y = y_1 \cdot \sin\alpha \ \wedge \ x = x_1$$

to $y_1 \cdot \sin\alpha = ax_1$



PRZYKŁAD:

OBLICZ WSPÓŁRZĘDNĄ Y_1 JEŚLI KĄT α ZAWARTY MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1 WYNOSI $136°$, STAŁA $a=2$ A WSPÓŁRZĘDNA $X_1=-2$

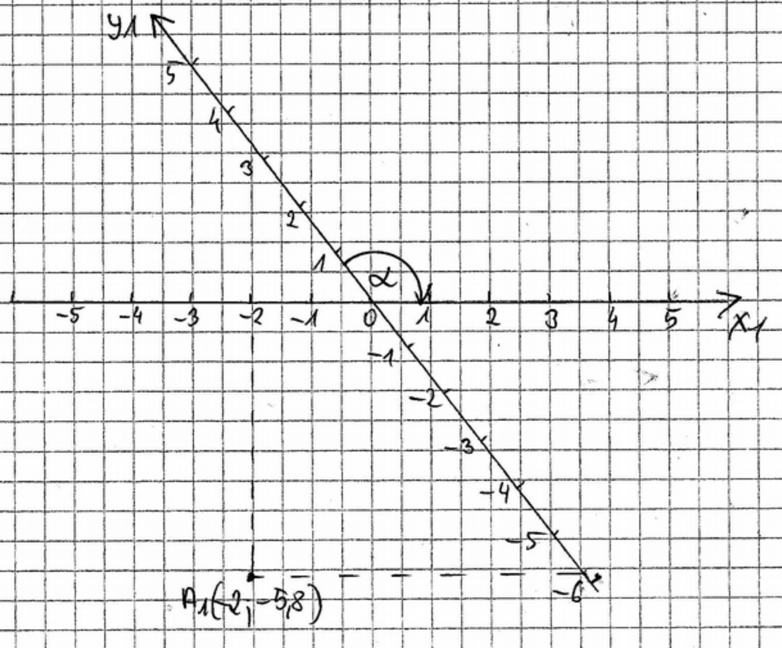
$y_1 \cdot \sin\alpha = ax_1$

$y_1 = \frac{ax_1}{\sin\alpha}$

$y_1 = \frac{2 \cdot (-2)}{0,69}$

$y_1 = -5,8$

$A_1(-2; -5,8)$



III. PRZENIESIENIE PUNKTU $A_1(x_1, y_1)$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OSIĄ OX_1 DO INNEGO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIĄ OY_2 A OSIĄ OX_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM:

$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

x_1, y_1 – współrzędne układu OX_1Y_1
x_2, y_2 – współrzędne układu OX_2Y_2

$\sphericalangle \alpha_1$ – kąt zawarty między osią OY_1 a OX_1

$\sphericalangle \alpha_2$ – kąt zawarty między osią OY_2 a OX_2

ponieważ:

$y_1 \cdot \sin\alpha_1 = a x_1$ dla układu OX_1Y_1

$y_2 \cdot \sin\alpha_2 = a x_2$ dla układu OX_2Y_2

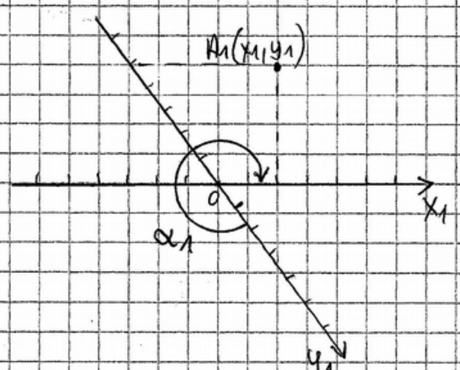
jeśli $x_1 = x \wedge x_2 = x$

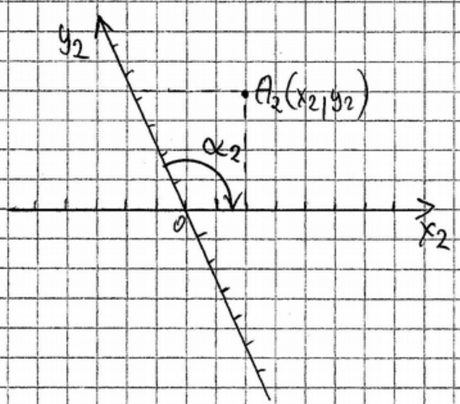
x – dowolna wartość liczbowa

to $\begin{cases} y_1 \cdot \sin\alpha_1 = a x \\ y_2 \cdot \sin\alpha_2 = a x \end{cases}$

$$y_2 \cdot \sin\alpha_2 = y_1 \cdot \sin\alpha_1$$

$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$





PRZYKŁAD.

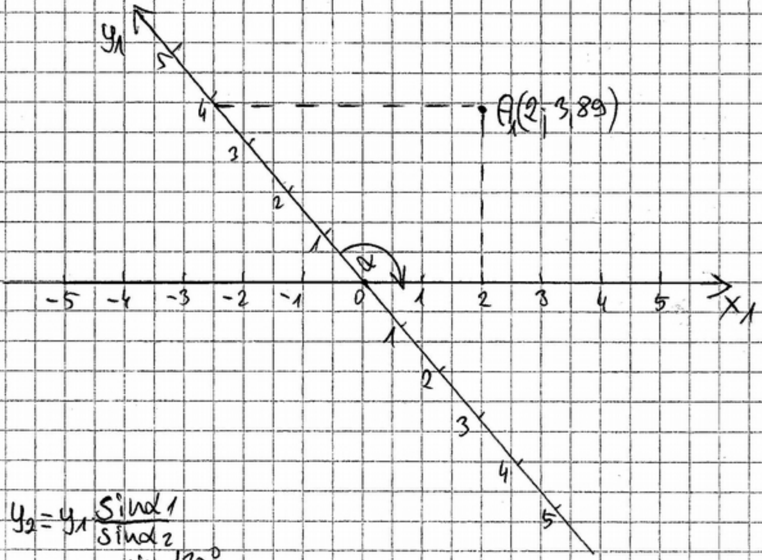
MAJĄC DWIE DOWOLNE LICZBY $x=2$, $y=3$ PRZENIEŚ DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE $\alpha_1 = 130°$ MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1 A NASTĘPNIE PRZENIEŚ DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE $\alpha_2 = 210°$ MIĘDZY OSIĄ OY_2 A OX_2

1. PUNKT $A(2,3)$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1

$x = x_1 \qquad y = y_1 \cdot \sin\alpha_1$

$x_1 = 2 \qquad y_1 = \frac{y}{\sin\alpha_1} = \frac{3}{0,77} = 3,89$

$A_1(2;3,89)$



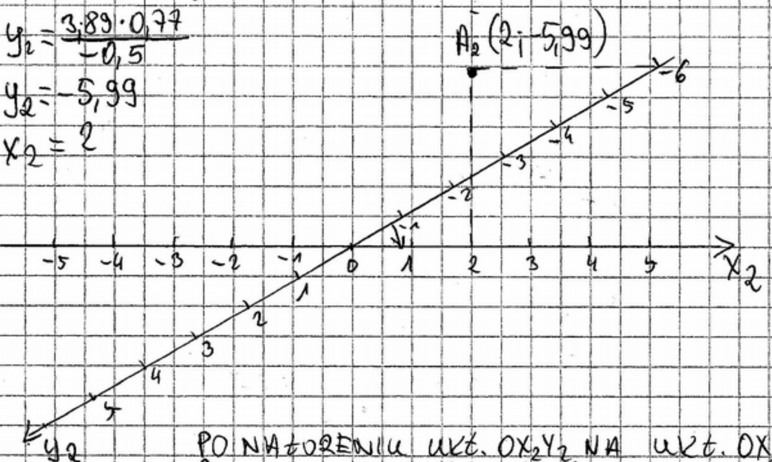
$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$

$y_2 = 3,89 \frac{\sin 130°}{\sin 210°}$

$y_2 = \frac{3,89 \cdot 0,77}{-0,5}$

$y_2 = -5,99$

$x_2 = 2$



PO NAŁOŻENIU UKŁ. OX_2Y_2 NA UKŁ. OX_1Y_1 PUNKTY A_1 I A_2 POKRYWAJĄ SIĘ.

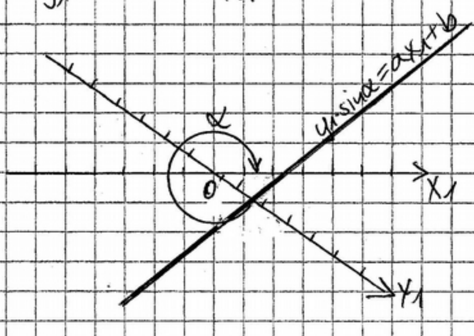
IV. FUNKCJA LINIOWA $y=ax+b$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE OSI OY_1 WZGLĘDEM OX_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM

$$y_1 \cdot \sin\alpha_1 = ax_1 + b$$

ponieważ

$$y = ax + b \quad i \quad y = y_1 \sin\alpha_1 \quad i \quad x = x_1$$

to: $y_1 \sin\alpha = ax_1 + b$



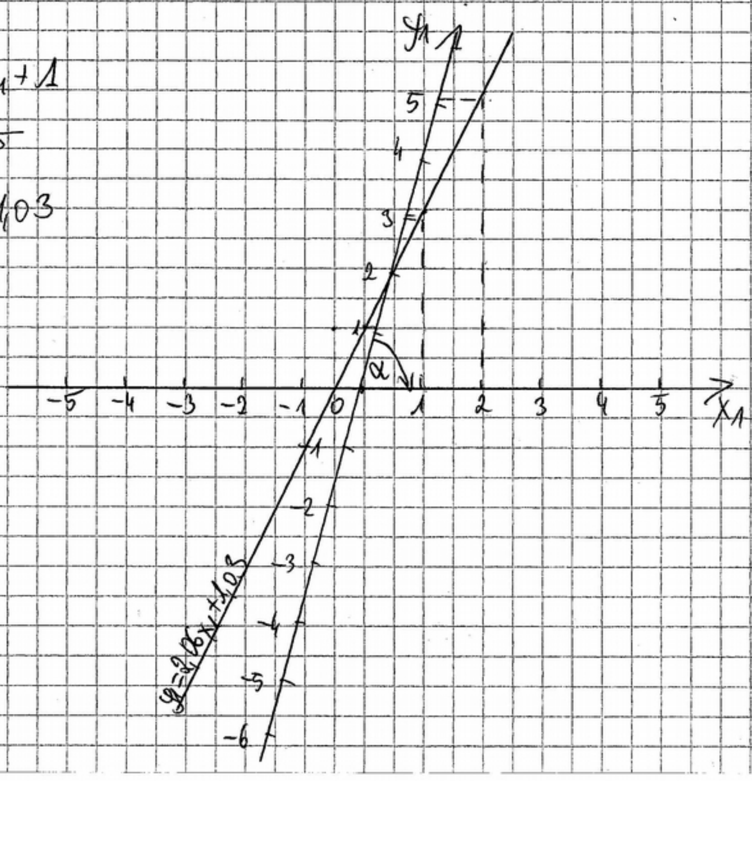
PRZYKŁAD:
NARYSUJ PROSTĄ BĘDĄCĄ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI LINIOWEJ OGÓLNEJ $y=2x+1$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE $\alpha = 75°$ MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OSIĄ OX_1

$$y = 2x + 1$$

$$y_1 \sin\alpha = 2x_1 + 1$$

$$y_1 = \frac{2x_1 + 1}{\sin 75°}$$

$$y_1 = 2{,}06x_1 + 1{,}03$$



V. PRZENIESIENIE PROSTEJ BĘDĄCEJ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI LINIOWEJ $y_1 \cdot \sin\alpha_1 = ax_1 + b$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYM OX_1Y_1 I KĄCIE MIĘDZY α_1 MIĘDZY OSIAMI OY_1 A OX_1 DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE α_2 MIĘDZY OSIAMI OY_2 A OX_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM

$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

y_1 – wartość funkcji przenoszonej

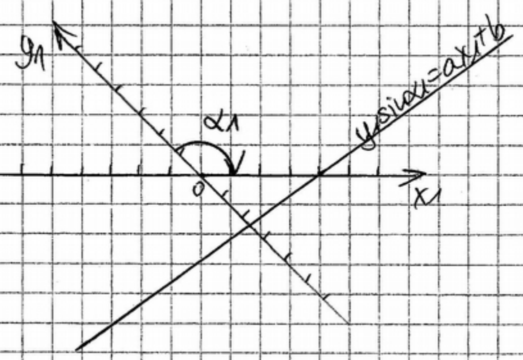
y_2 – wartość funkcji przeniesionej

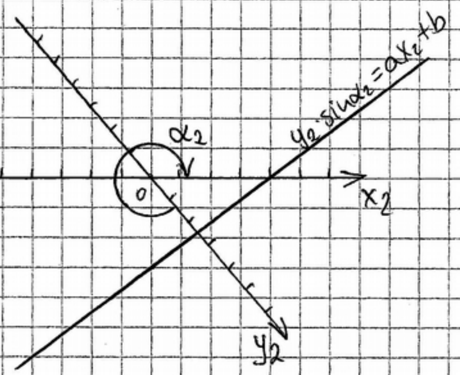
ponieważ:

$$\begin{cases} y_1 \cdot \sin\alpha_1 = ax_1 + b \\ y_2 \cdot \sin\alpha_2 = ax_2 + b \end{cases} \wedge \; x_1 = x_2$$

to $\quad y_2 \sin\alpha_2 = y_1 \sin\alpha_1$

$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$





PRZYKŁAD:

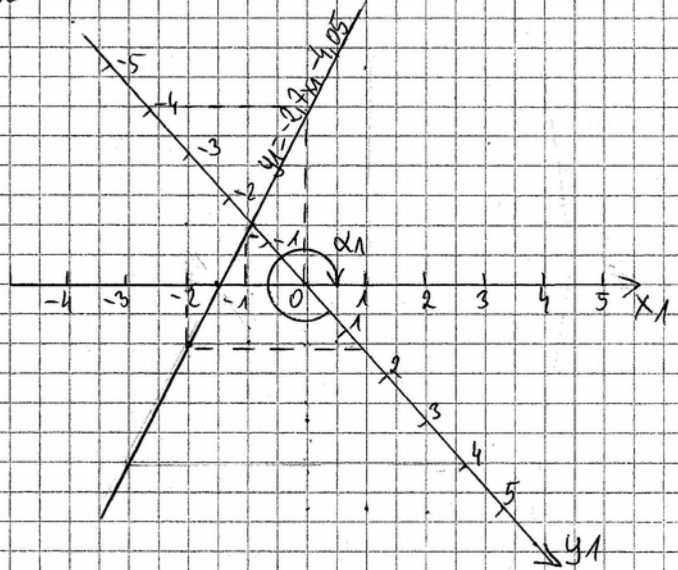
PRZENIEŚ WYKRES FUNKCJI LINIOWEJ $y_1 \cdot \sin 312^\circ = 2x_1 + 3$
Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE $\alpha_1 = 312^\circ$
DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE $\alpha_2 = 73^\circ$

$$y_1 \cdot \sin 312^\circ = 2x_1 + 3$$

$$y_1 = \frac{2x_1 + 3}{-0{,}74}$$

$$y_1 = -2{,}7x_1 - 4{,}05$$

x_1	0	-1	-2
y_1	-4,05	-1,35	1,35

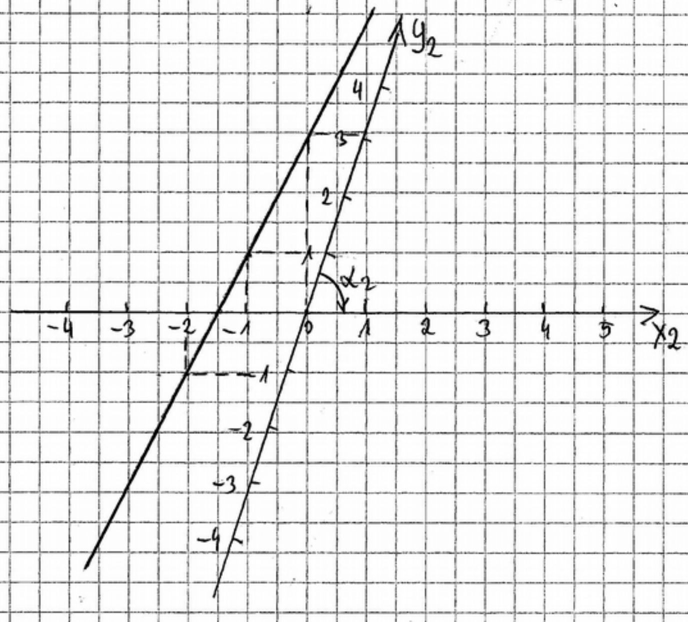


$$y_2 = y_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

$$y_2 = y \cdot \frac{\sin 312^\circ}{\sin 73^\circ}$$

$$y_2 = -0{,}77 y_1$$

x_1	0	-1	-2
y_1	-4,05	-1,35	1,35
y_2	3,12	1,03	-1,03



VI. PUNKT WSPÓLNY DWÓCH RÓŻNYCH FUNKCJI LINIOWYCH FUNKCJA $y_1 \sin\alpha_1 = a_1 x_1 + b$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE α_1 MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1 A FUNKCJA $y_2 \sin\alpha_2 = a_2 x_2 + b$ W UKŁADZIE OX_2Y_2 I KĄCIE α_2 MIĘDZY OSIĄ OY_2 A OX_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM

DLA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \quad \wedge \quad y_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sin\alpha_2 (a_1 - a_2)}$$

ponieważ

$$y_1 \sin\alpha_1 = a_1 x_1 + b_1$$
$$y_2 \sin\alpha_2 = a_2 x_2 + b_2 \quad \wedge \quad y_1 \sin\alpha_1 = y_2 \sin\alpha_2 \text{ oraz } x_1 = x_2$$

to $a_1 x_1 + b_1 = a_2 x_1 + b_2$

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

oraz $y_1 \sin\alpha_1 = a_1 x_1 + b_1 \quad \wedge \quad x_1 = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$

$$y_1 = \frac{a_1 (b_2 - b_1)}{\sin\alpha_1 (a_1 - a_2)} + \frac{b_1}{\sin\alpha_1}$$

$$y_1 = \frac{a_1 (b_2 - b_1)}{\sin\alpha_1 (a_1 - a_1)} + \frac{b_1 (a_1 - a_2)}{\sin\alpha_1 (a_1 - a_2)}$$

$$y_1 = \frac{a_1 (b_2 - b_1) + b_1 (a_1 - a_2)}{\sin\alpha_1 (a_1 - a_2)}$$

$$y_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sin\alpha_1 (a_1 - a_2)}$$

DLA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2

$$x_2 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \quad \wedge \quad y_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sin\alpha_2 (a_1 - a_2)}$$

PRZYKŁAD:
OBLICZ I ZAZNACZ W UKŁADACH WSPÓŁRZĘDNYCH PUNKT WSPÓLNY A DLA FUNKCJI LINIOWYCH:

$y_1 \cdot \sin 142^\circ = 2x_1 + 3$ DLA UKŁ. WSPÓŁ. OX_1Y_1 i $\sphericalangle \alpha = 142^\circ$

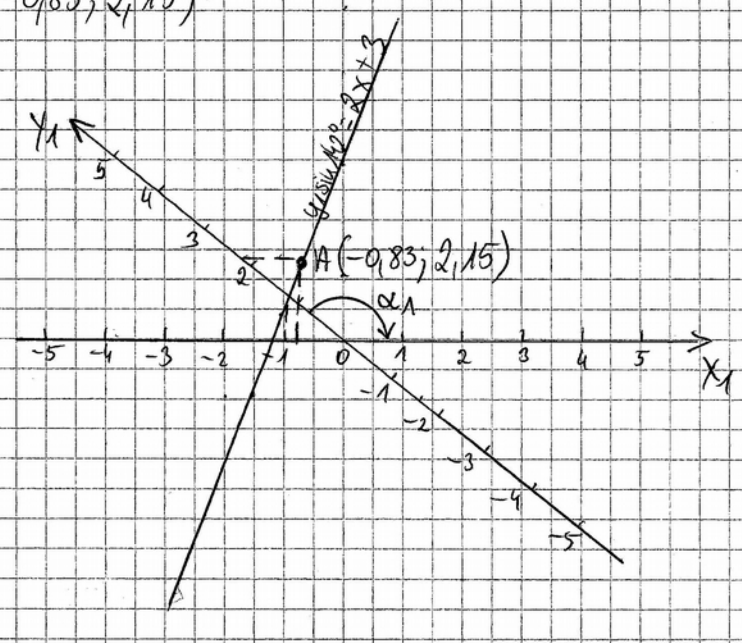
$y_2 \cdot \sin 66^\circ = -4x_2 - 2$ DLA UKŁ. WSPÓŁ. OX_2Y_2 $\sphericalangle \alpha = 66^\circ$

1. WSPÓŁRZĘDNE WSPÓLNEGO PUNKTU A DLA
$y_1 \cdot \sin\alpha_1 142^\circ = 2x + 3$

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \frac{-2-3}{2+4} = \underline{\underline{-0{,}83}}$$

$$y_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sin\alpha_1 (a_1 - a_2)} = \frac{2\cdot(-2) - (-4)\cdot 3}{0{,}62(2+4)} = \underline{\underline{2{,}15}}$$

A(−0,83; 2,15)

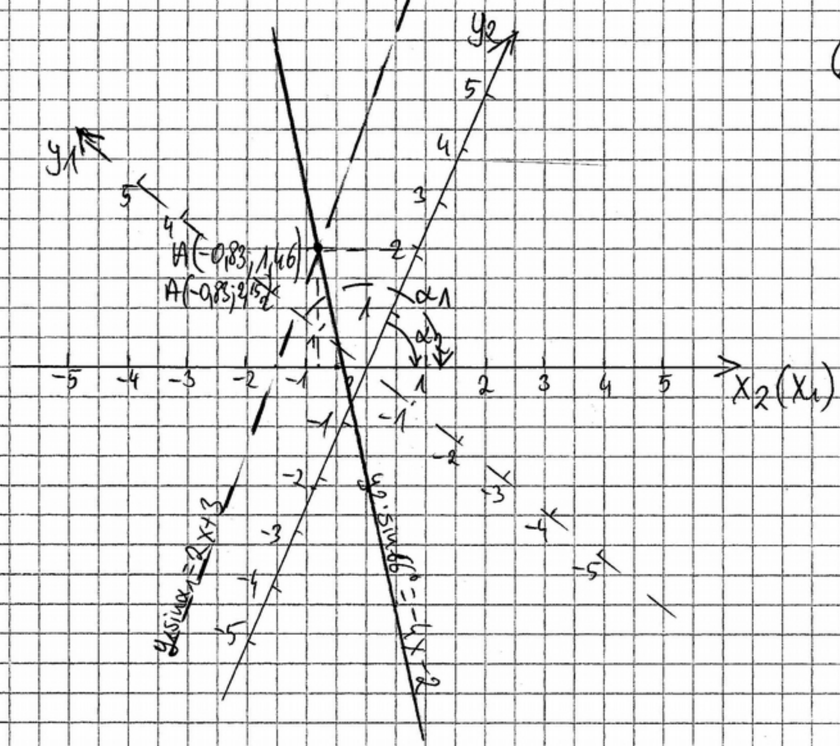


2. WSPÓŁRZĘDNE WSPÓLNEGO PUNKTU A DLA
$y_2 \cdot \sin 66^\circ = -4x_2 - 2$

$$x_2 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \underline{\underline{-0{,}83}}$$

$$y_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sin\alpha_2 (a_1 - a_2)} = \frac{2\cdot(-2) - (-4)\cdot 3}{0{,}91(2+4)} = 1{,}46$$

A(−0,83; 1,46)


y2
y1
X2(X1)
A(-0,83; 1,46)
α1
α2
y1 sin α1 = 2x+3
y2 sin 66° = -4x-2

VII. FUNKCJA KWADRATOWA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE OSI OY_1 WZGLĘDEM OSI OX_1

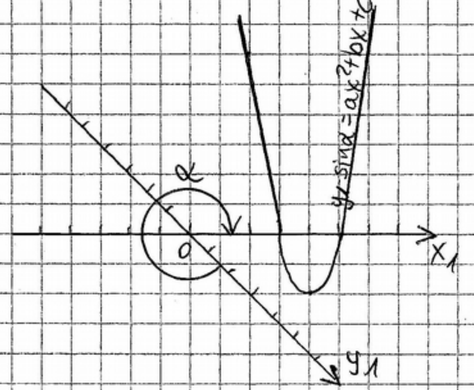
FUNKCJA KWADRATOWA $y=ax^2+bx+c$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE α OSI OY_1 WZGLĘDEM OSI OX_1 WYRAŻA SIĘ WZOREM

$$y_1 \cdot \sin\alpha = ax_1^2 + bx_1 + c$$

ponieważ

$$y=ax^2+bx+c \ \wedge \ x=x_1 \ \wedge \ y=y_1 \cdot \sin\alpha$$

to $\quad y_1 \cdot \sin\alpha = ax_1^2 + bx + c$



1. WYRÓŻNIK FUNKCJI

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

2. MIEJSCA ZEROWE

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. WIERZCHOŁEK FUNKCJI

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a \cdot \sin\alpha}$$

PRZYKŁAD:

NARYSUJ PARABOLĘ BĘDĄCĄ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI KWADRATOWEJ $y=x^2-4x+3$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE MIĘDZY OY_1 A OX_1 $\alpha=40°$

$$y_1\cdot\sin 40° = x_1^2-4x_1+3$$

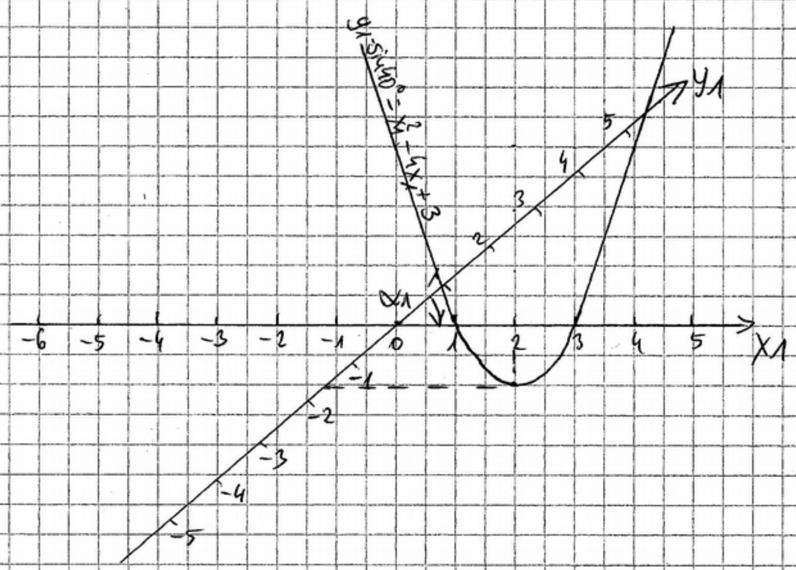
$$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\cdot1\cdot3 = 4$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2}{2}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$

$$p=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$$

$$q=\frac{-\Delta}{4a\sin\alpha_1}=\frac{-4}{4\cdot0{,}64}=-1{,}56$$



VIII. PRZENIESIENIE PARABOLI BĘDĄCEJ ROZWIĄZANIE FUNKCJI KWADRATOWEJ $y_1 \cdot \sin\alpha_1 = a x_1^2 + b x_1 + c$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE α_1 MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1 DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OY_2 I OX_2 α_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM:

$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

ponieważ:

$$y_1 \cdot \sin\alpha_1 = a x_1^2 + b x_1 + c \quad \text{DLA } OX_1Y_1$$

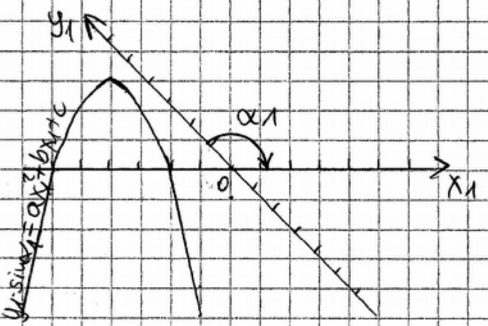
$$\wedge \quad y_2 \cdot \sin\alpha_2 = a x_2^2 + b x_2 + c \quad \text{DLA } OX_2Y_2$$

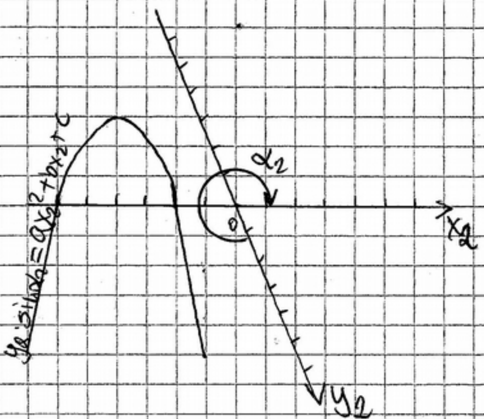
$$\wedge \quad x_1 = x = x_2$$

to

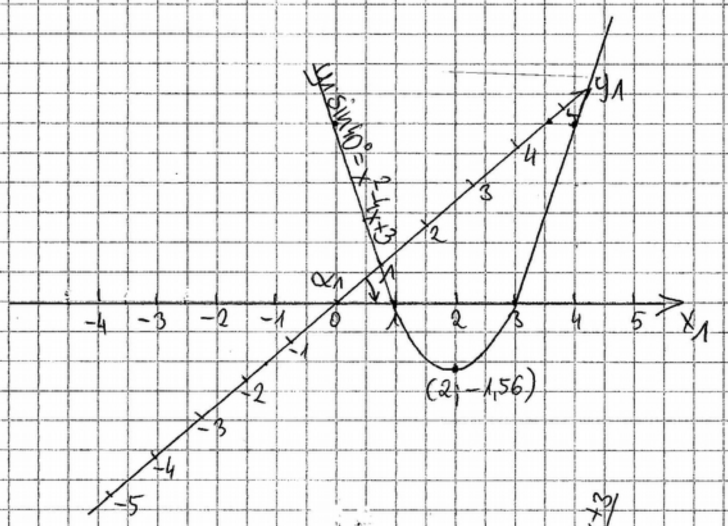
$$y_2 \sin\alpha_2 = y_1 \sin\alpha_1$$

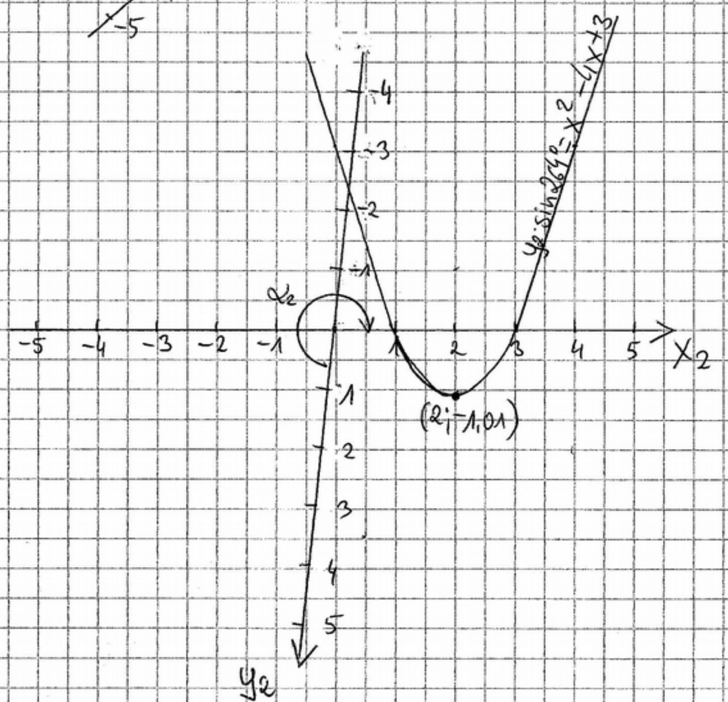
$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$





14





sin 40 = 0,64

sin 264 = -0,99

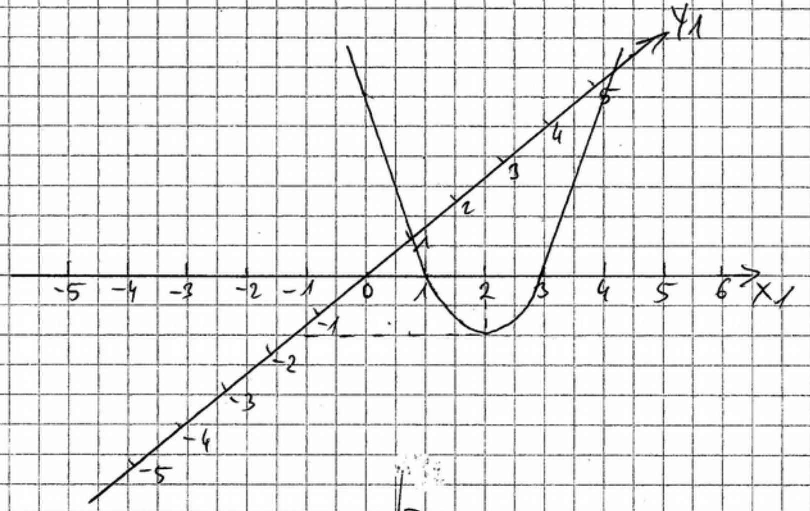
-0,65

PRZYKŁAD!
PRZENIEŚ WYKRES BĘDĄCY ROZWIĄZANIEM FUNKCJI $y_1 \cdot \sin 40° = x_1^2 - 4x_1 + 3$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE $\alpha_1 = 40°$ DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE $\alpha_2 = 264°$

1. WYKREŚLENIE PARABOLI W UKŁ. WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1

$$y_1 \cdot \sin 40° = x^2 - 4x + 3$$

$$\Delta = 4;\ x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ p = 2;\ q = -1{,}56$$



2. PRZENIESIENIE PARABOLI DO UKŁ. WSPÓŁ. OX_2Y_2

X1	0	1	3	2	4
Y1	4,68	0	0	-1,56	4,68
$y_2 = y_1 \frac{\sin 40}{\sin 264}$	-3,04	0	0	1,01	-3,04