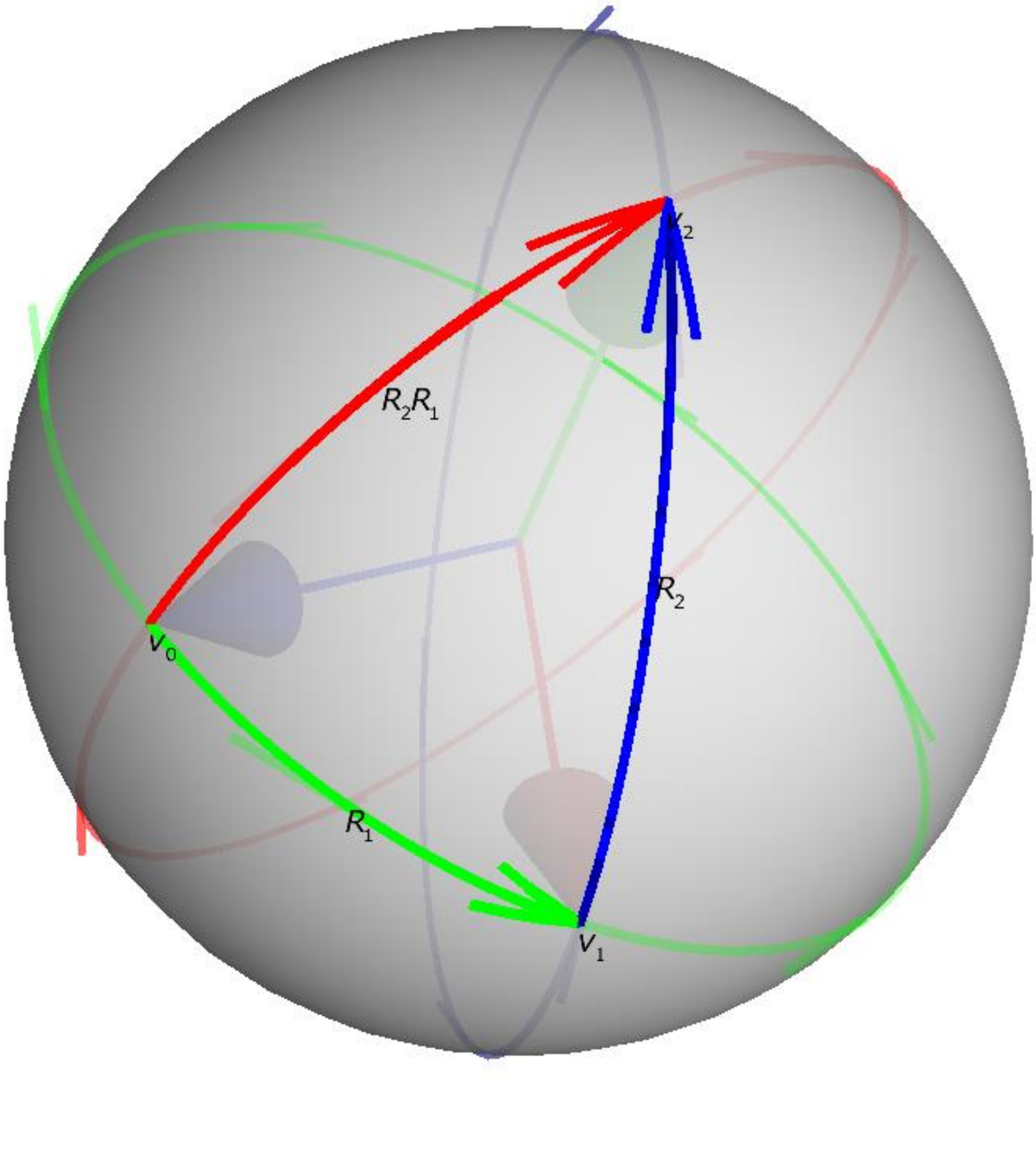
Miroslav Josipović

Množenje vektora i struktura 3D euklidskog prostora



„I naljuti se Bog na ljudski rod i dade im da govore različitim jezicima i da jedni druge ne razumiju …“

Virus

„Svjetska zdravstvena organizacija je objavila postojanje pandemije Koordinatnog Virusa u matematici i fizici. Studenti zaraženi virusom pokazuju kompulzivno izbjegavanje pojma vektora, osim kao niza brojeva, te koriste svaku priliku da vektore manično zamjenjuju listama koordinata. Najmanje dvije trećine diplomiranih fizičara je zaraženo ovim virusom, a polovica zaraženih su vjerojatno trajno oštećeni, bez mogućnosti oporavka. Preporuča se ozbiljna doza geometrijske algebre“. (*Hestenes*)

Mačka

„Kada bi duhovni učitelj i njegovi učenici započeli sa svojom večernjom meditacijom, manastirska mačka bi se razigrala i stvarala buku koja je ometala meditante. Zbog toga učitelj naredi da se mačku veže za vrijeme večernje meditacije.

Kada je učitelj umro, nastaviše vezati mačku. Kada je mačka uginula nađoše drugu i nastaviše je vezati za vrijeme meditacije.

Nekoliko stoljeća kasnije, mladi učenik nekog duhovnog učitelja napisa rad o religioznom značenju vezivanja mačke u vrijeme meditacije.“ (Miroslav Josipović: *Isprazni svoju šalicu* – zbirka zen priča)

Isprazni svoju šalicu

„Nan-ina, japanskog učitelja u razdoblju Meiđi, posjetio je jednoga dana neki profesor koji se želio raspitati o zenu. Dok je Nan-in šutke pripremao čaj profesor je neumorno pričao. Čulo se: “*Znam da ... Mislim da ... Očigledno je ...*”, itd.

Nan-in je poslužio čaj. Napunivši šalicu svome gostu, nastavio je dolijevati. Profesor je promatrao kako se čaj prelijeva, a kada se više nije mogao suzdržati, reče:

"*Puna je. Više ne može stati*!"

"*Kao i ova šalica*", reče Nan-in, "*pun si predrasuda i pretpostavki. Kako ti mogu objasniti zen ako prethodno nisi ispraznio svoju šalicu*?“ (Miroslav Josipović: *Isprazni svoju šalicu* – zbirka zen priča)

Djeliteljska algebra

“Geometrijska algebra je, u stvari, najveća moguća asocijativna djeliteljska algebra koja integrira sve algebarske sisteme (algebra kompleksnih brojeva, vektorska algebra, matrična algebra, algebra kvaterniona, itd.) u jedan koherentan matematički jezik koji uvećava snažnu geometrijsku intuiciju ljudskog uma uz preciznost algebarskog sustava.”

(de Sabbata: *Geometric algebra and applications in physics* [28])

Predgovor

Cilj ovog teksta je uvesti zainteresiranog čitatelja u svijet geometrijske algebre. Ali zašto? U redu, zamislimo razgovor Vulkanca i Neelixa. Cilj je prodati Vulkancu novi proizvod. To se može postići tako da Neelix brzo zainteresira Vulkanca, dajući mu što manje informacija, a krajnji cilj je da Vulkanac, nakon korištenja, bude iznenađen kvalitetom proizvoda i preporuči ga drugima. Počnimo:

Neelix: "Dragi Vulkanac, želite li rotirati objekte bez matrica, u bilo kojoj dimenziji?"

Vulkanac: "Gospodine Neelix, nudite mi kvaternione?"

Neelix: "Ne, oni rade samo u 3D, imam nešto puno bolje. Uz to ćete moći srediti i spinore."

Vulkanac: "I spinore? Ma dajte, nećete mi valjda reći da mogu time raditi i kompleksne brojeve?"

Neelix: "Da, cijelu kompleksnu analizu, poopćenu na više dimenzije. A moći ćete se i riješiti tenzora."

Vulkanac: "Molim? Ja sam fizičar, to ipak neće ići …"

Neelix: "Hoće, ne trebaju vam koordinate. A moći ćete raditi specijalnu teoriju relativnosti i kvantnu mehaniku istim alatom. A sve integralne teoreme koje znate, uključujući kompleksno područje, moći ćete objediniti u jedan"

Vulkanac: "Ma dajte … zgodna ideja … ja, inače, puno radim s Lie algebrama i grupama."

Neelix: "I to je u paketu …"

Vulkanac: "Šalite se? U redu, recimo da vam vjerujem, koliko bi me koštao taj vaš proizvod?"

Neelix: "Morate drugačije množiti vektore, g. Vulkanac."

Vulkanac: "To je sve? Sve to mi nudite za tako malu cijenu? U čemu je zamka?"

Neelix: "Nema je. Ali istina, morat ćete potrošiti nešto vremena da naučite koristiti novi alat."

Vulkanac: "Vremena? Toga baš i nemam. A zašto bih se uopće odricao koordinata? Znate, ja sam prilično vješt u žongliranju indeksima, a imam i karijeru …".

Neelix: "Ovise li fizikalni procesi koje proučavate o izboru koordinatnih sustava?"

Vulkanac: "Nadam se da ne."

Neelix: "Eto. Kad napišete matricu rotacije daje li vam ona jasnu geometrijsku sliku?"

Vulkanac: "Ne. Moram se pomučiti da je otkrijem."

Neelix: "Sad nećete morati, bit će vam dostupna na svakom koraku."

Vulkanac: "G. Neelix, znatiželjan sam, otkud vam taj novi alat?"

Neelix: "O, g. Vulkanac, to je stari alat sa Zemlje, iz 19. stoljeća, izmislili su ga Zemljani Grassmann i Clifford."

Vulkanac: "Kako to da mi nije poznat? Nije li to čudno?"

Neelix: “Hm, mislim da je čovjek Gibbs imao prste u tome. Navodno je čovjek Hestenes pokušavao obavijestiti ostale ljude, ali ga nisu baš slušali. Ali, g. Vulkanac, složit ćete se sa mnom da su Zemljani ponekad zaista čudni. ”

Vulkanac: “G. Neelix, ovo je rijetka prilika kad se moram složiti s vama.”

Vulkanac pristaje i živi dugo i uspješno. I, naravno, preporučuje novi alat kapetanici …

Nastojalo se bazirati izloženo na što jednostavnijim primjerima, a čitatelja se upućuje na samostalno rješavanje problema. Tekst treba čitati aktivno, s papirom i olovkom u ruci. Postoji dosta bogata literatura, obično dostupna na web-u, pa se čitatelja upućuje na samostalno istraživanje. Dijelove koje eventualno ne uspijete razumjeti ili za probleme koje ne uspijete riješiti, ostavite za kasnije proučavanje literature. Sigurno imate dobre izglede za uspjeh. Preporuča se također korištenje dostupnih računalnih programa. Tekst nije zamišljen kao udžbenik, više je motivacijski usmjeren, da se vidi „što tu ima“. Namijenjen je uglavnom mladima i općenito onima otvorenog uma. Autor čvrsto vjeruje, nakon temeljitog proučavanja, da je geometrijska algebra matematika budućnosti. Paradoksalno je da je poznata još od sredine 19. stoljeća, ali je nizom (nesretnih) okolnosti zanemarena. Nije za očekivati da će oni koji su već izgradili karijere lako prihvatiti nešto novo, otud vjerovanje da je ovakav tekst uglavnom za mlade. Za neke dijelove teksta je potrebno predznanje fizike i matematike na nivou dodiplomskog studija fizike ili tehnike, ali je moguće pratiti izloženo i informirajući se na web-u o čitatelju manje poznatim pojmovima. Koristan izvor je i knjiga [35], koja svakako može pomoći onima koji tek započinju s algebrom i geometrijom. Knjiga [20] je teška i preporuča se onima koji zaista misle ozbiljno.

Važno je da čitatelj usvoji ideju da je ovdje izloženo množenje vektora prirodno i opravdano. Ostatak su posljedice takvog množenja. Čitatelj može i sam smisliti argumente za opravdanje uvođenja geometrijskog produkta. Cilj je razumjeti da geometrijski produkt nije samo „zgodan trik“, već da prirodno proizlazi iz koncepta vektora. A to mijenja mnogo toga. Jednostavna postavka da paralelni vektori komutiraju dok okomiti antikomutiraju proizvodi nevjerojatnu količinu matematike i povezuje mnogo različitih matematičkih disciplina u jedan jezik: jezik geometrijske algebre.

Komentare ili pitanja možete poslati na adresu:

miroslav.josipovic@gmail.com

Miroslav Josipović

Zagreb, 2017.

Geometrijski produkt (vektora)

Vektore ćemo uglavnom označavati malim slovima u *italic* formatu, gdje god neće biti mogućnosti zabune. Koristit ćemo ponekad i **bold** format ako bude potrebno. Za realne brojeve ćemo koristiti grčki alfabet. Multivektore označavamo velikim slovima u *italic* formatu. Ako definiramo ortonormiranu bazu vektorskog prostora broj jediničnih baznih vektora čiji su kvadrati 1 označavamo s p ,broj onih s kvadratom -1 sa q, a broj onih s kvadratom 0 sa r. Uobičajena oznaka za takav vektorski prostor je $\Re(p,q,r)$ ili $\Re^{p,q,r}$, dok uređenu trojka (p,q,r) nazivamo *signaturom* (u literature je to ponekad suma $p+q$). Za geometrijsku algebru 3D euklidskog vektorskog prostora $\Re^3$ koristimo kraticu *Cl*3, što je motivirano prezimenom Clifford.

Kada koristimo pojam "vektor" ovdje ne mislimo na element apstraktnog vektorskog prostora, oslonit ćemo se na intuitivni koncept "orijentirane dužine". Vektore zbrajamo po pravilu paralelograma. Vektori a i b koji zadovoljavaju relaciju $b=\alpha a,\ \ \alpha\in\Re,\ \ \alpha\neq 0$, su *paralelni*. Za paralelne vektore kažemo da imaju isti smjer, ali mogu imati istu ili suprotnu *orijentaciju*. Možemo rastaviti bilo koji vektor b na komponentu u smjeru vektora a (*projection*) i komponentu bez ijednog dijela paralelnog s a (*rejection*)

$$b=b_{\|}+b_{\perp},\quad b_{\|}=\alpha a,\ \ \alpha\in\Re,\ \ \alpha\neq 0\,.$$

Ovdje možemo odmah preduhitriti primjedbe, kao: „Da, ali ako govorimo o okomitim vektorima trebamo skalar produkt …“. Iako ovdje koristimo znak „$\perp$“**ne** govorimo o ortogonalnosti vektora, za sada. Jednostavno, iz činjenice da vektore možemo zbrajati zaključujemo da bilo koji vektor može biti zapisan kao suma dva vektora, na beskonačno mnogo načina. Jedna od ovih mogućnosti je upravo izražena prethodnom relacijom, pa je možemo promatrati kao pitanje **postojanja**, a ne kako je praktično ostvariti. Naime, za $b_{\perp}=b-b_{\|}=b-\alpha a$, ako pretpostavimo da vektor $b_{\perp}$ sadrži komponentu paralelnu sa a možemo pisati $b'_{\perp}+\beta a=b-\alpha a$, ali onda je $b'_{\perp}$ naš traženi vektor. Ako takav $b'_{\perp}$ ne postoji onda je b paralelan s a. Nakon što, eventualno, uspijemo definirati produkt vektora, možemo se vratiti pitanju kako naći $b_{\perp}$ praktično, a to je svakako nešto što bi nam novi produkt vektora trebao omogućiti.

Postavimo pitanje: **kako množiti vektore**? Trebalo bi " zaboraviti" sve što smo naučili o množenju vektora (tj. skalarni i vektorski produkt). Dobro, prije nego ih "zaboravimo", pogledajmo neka njihova svojstva. Možemo li jedinstveno riješiti jednadžbu $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\alpha$ (ovdje je $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ skalarni produkt)? Odgovor je, jasno, ne, jer svakom rješenju možemo dodati vektor okomit na $\boldsymbol{a}$ (sada smo u svijetu starih produkata, znamo što je okomitost). Što je s jednadžbom $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ (vektorski produkt)? Također nema jedinstvenog rješenja jer svakom rješenju možemo dodati vektor paralelan s $\boldsymbol{a}$. Ali, zanimljivo, ako uzmemo u obzir obje jednadžbe (sustav) možemo naći jedinstveno rješenje. Primijetimo da je skalarni produkt komutativan, dok je vektorski produkt anti-komutativan. Za dva jedinična vektora $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n}$ u 3D vrijedi

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\cos\alpha\,,\qquad \left|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}\right|=\sin\alpha\,,$$

što sugerira da su ovi produkti nekako povezani, zbog

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\,.$$

Ova povezanost može biti naslućena i ako pogledamo tablice množenja u 3D (e_i su ortonormirani bazni vektori):

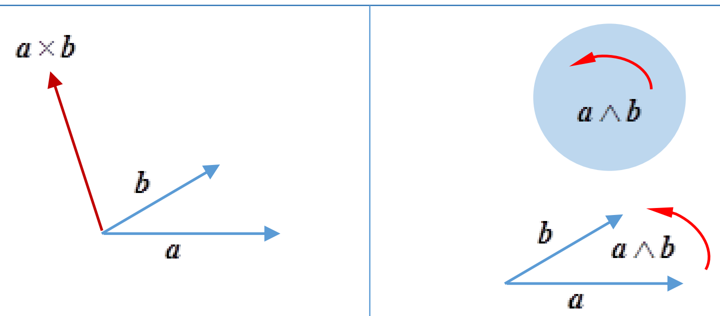
$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	1	0	0
e_2	0	1	0
e_3	0	0	1

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Vidimo da skalarni produkt ima vrijednosti različite od nule na dijagonali, dok vektorski produkt na dijagonali ima nule (zbog anti-komutativnosti). Tablice množenja jednostavno izazivaju da ih objedinimo. Forma oba produkta sugerira sličnost s kompleksnim brojevima izraženim u trigonometrijskom obliku, ali za ovo trebamo veličinu čiji kvadrat je -1, kao za imaginarnu jedinicu. Ali nije jasno kako prirodno povezati vektorski produkt s nekom veličinom sličnom imaginarnoj jedinici. S druge strane, vektorski produkt je anti-komutativan, što sugerira da bi "trebao" imati svojstvo da kvadriran da -1 . Naime, ako zamislimo bilo kakve objekte koji kvadrirani daju pozitivan realan broj i čiji produkt je anti-komutativan i asocijativan imali bismo

$$(AB)^2 = ABAB = -ABBA = -A^2B^2 < 0 .$$

Vektorski produkt nije niti asocijativan. Pogledajmo ortonormiranu bazu u 3D, možemo reći da je e_1 polarni vektor, dok je $e_2 \times e_3 = e_1$ aksijalni vektor. Dakle, kakav vektor je e_1? Naravno, mogli bismo se okrenuti općenitijim definicijama uvodeći tenzore, ali je čudno da već na ovako jednostavnom primjeru imamo problem.



Vektorski produkt živi u 3D i ma puno problema.

Bivektor je orijentirani dio plohe, živi u svim dimenzijama većim od 1 i gotovo je magičan.

Pogledajmo 2D svijet u kojemu plošni fizičari žele definirati moment sile. Ako ne žele tražiti nove dimenzije izvan " njihovog svijeta", neće niti pokušati definirati vektorski produkt, ne postoji vektor okomit na njihov svijet. Ali, možemo lako vidjeti da moment sile ima smisla u njihovom 2D svijetu: proporcionalan je sili i kraku sile te ima dvije moguće orijentacije, stoga, kako pomnožiti vektor sile s vektorom kraka sile da se dobije željeni moment sile? Odgovor na to pitanje pronašao je već polovicom 19. stoljeća veliki matematičar Grassmann, podcijenjen i zanemarivan u svoje vrijeme. On je definirao anti-komutativan vanjski produkt vektora i tako dobio **bivektor**, objekt sadržan u ravnini, s orijentacijom i iznosom, dakle, idealan za naš 2D problem. Kao dodatak, može biti lako poopćen za više dimenzije. Grassmann osobno, a Clifford nešto kasnije su uspjeli ujediniti skalarni i vanjski produkt u jedan: *geometrijski produkt*, točno ono o čemu govorimo ovdje. Skalarni produkt vektora nije promijenjen, ali vektorski produkt je zamijenjen vanjskim produktom i umjetna razlika između “aksijalnih” i “polarnih” vektora je nestala. Svi “aksijalni” vektori su bivektori (vektor magnetskog polja, primjerice, vidjeti dalje u tekstu).

U redu, sada "zaboravimo" skalarni i vektorski produkt te pogledajmo kako možemo definirati **novi**. Razumno je očekivati da novo množenje ima svojstva *asocijativnosti* i *distributivnosti* (kao realni brojevi), tj.

$$a(bc)=(ab)c \text{ i } (\beta b+\gamma c)a=\beta ba+\gamma ca,\quad a(\beta b+\gamma c)=\beta ab+\gamma ac,\quad \beta,\gamma\in\Re .$$

Naravno, ne očekujemo komutativnost množenja vektora, osim za skalare (realni brojevi). Sjetimo se da je upravo vektorski produkt nastao kao potreba za opisivanjem nekomutativnih objekata (kao moment sile, ili Lorentzova sila, …).

1) Pogledajmo prvo izraz a^2 (a je vektor). Pretpostavit ćemo da vrijedi $a^2\in\Re$. Razjasnimo odmah da se **ne** pretpostavlja da je $ab\equiv a\cdot b$, kao obično, gdje smo skalarni produkt označili točkom . Ovo je važno imati na umu, inače može doći do konfuzije. Očekujemo da kvadrat vektora ne ovisi o njegovom smjeru, ali da ovisi o njegovoj duljini (za sada nećemo razmatrati vektore koji nisu nula ali imaju duljinu nula, nul-vektori).

2) Očekujemo da je množenje vektora realnim brojem komutativno, što odmah znači da je množenje paralelnih vektora ($a\,||\,b$) komutativno:

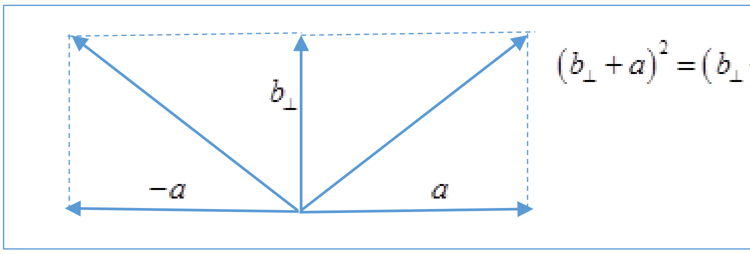
$$\lambda a=a\lambda\Rightarrow ab=a\lambda a=\lambda aa=ba,\quad \lambda\in\Re..$$

Zapravo, ovdje smo se mogli pozvati na simetriju, odmah je jasno da množenje paralelnih vektora mora biti komutativno jer nemamo kriterij po kojemu bismo mogli odlučiti koji vektor je "prvi" a koji "drugi". Ovo je očigledno ako vektori imaju istu orijentaciju, a ako su im orijentacije suprotne možemo se pozvati na princip da su svi smjerovi u prostoru ravnopravni (*izotropnost*). S druge strane, za okomite vektore upravo očekujemo antikomutativnost jer uvijek znamo koji vektor u produktu dolazi prvi, a vektori definiraju isti dio plohe (paralelogram) bez obzira kojim redom ih množili. Stoga ostaje mogućnost da se produkti s različitim redoslijedom vektora razlikuju u predznaku. Naš novi produkt bi trebao uključiti i množenje realnih brojeva.

3) Zbog neovisnosti kvadrata vektora o smjeru (podsjetimo, $b_\perp$ nema komponentu u smjeru vektora a)

$$(b_\perp+a)^2-(b_\perp-a)^2=0=2(b_\perp a+ab_\perp),$$

što znači da vektori $b_\perp$ i a anti-komutiraju. Možete i sami osmisliti nove "argumente", ali treba stalno imati na umu da ovdje ne podrazumijevamo skalarni ili vektorski produkt, jednostavno pokušavamo pronaći svojstva **novog** množenja vektora "od početka". Tako ovaj primjer **nije** dokaz, već više ideja kako možemo misliti o ovoj temi. Na slici p. 1 možemo lako vidjeti što smo zahtijevali : da kvadrat vektora (zapravo njegova duljina) ne ovisi o smjeru.



p. 1

Možemo, naravno, nakon pretpostavke o ne-komutativnom množenju, jednostavno napisati

$$(a+b_\perp)^2=a^2+b_\perp^2+ab_\perp+b_\perp a$$

i odmah zaključiti da mora biti $ab_\perp + b_\perp a = 0$, jer očekujemo da vrijedi Pitagorin poučak. Ali slika p. 1 pokazuje kako ovdje imamo simetriju, naime, vektori a i $-a$ definiraju “pravac”, ovdje “desno” i “lijevo” nije važno te kako smjer vektora $b_\perp$ sugerira simetriju u skladu s našim intuitivnim poimanjem ortogonalnosti. Bez te simetrije ulazimo u “nakošeni svijet”, ali pustimo matematičare neka idu tamo.

4) Pokažimo da, prema 3), a^2 komutira s *b* (bez pretpostavke o tome što je a^2):

$$a^2 b = a^2\left(b_\parallel + b_\perp\right) = b_\parallel a^2 - ab_\perp a = b_\parallel a^2 + b_\perp a^2 = ba^2,$$

što samo potvrđuje našu (raniju) pretpostavku da je $a^2 \in \Re$. Ponovo, važno je razumjeti da ovdje **ne** dajemo dokaze, samo pokušavamo **opravdati** uvođenje novog produkta vektora. Odmah slijedi da $ab_\parallel$ komutira s *b*, jer je $b_\parallel = \alpha a, \quad \alpha \in \Re$. Vrijedi

$$ab + ba = ab_\perp + b_\perp a + 2ab_\parallel = 2ab_\parallel,$$

pa $ab + ba$ komutira s *b*. Jasno je da komutira s a, što znači da komutira s bilo kojim vektorom iz ravnine definira s a i b. Ali očigledno komutira i sa svakim vektorom okomitim na tu ravninu.

Svaki nekomutativni produkt možemo rastaviti na simetrični i anti-simetrični dio:

$$ab = \frac{ab+ba}{2} + \frac{ab-ba}{2} = S + A,$$

gdje vrijedi

$$S = ab_\parallel, \qquad A = ab_\perp.$$

Posljednje dvije relacije su jako korisne, primjerice, odmah vidimo da vrijedi

$$A^2 = ab_\perp ab_\perp = -a^2 b_\perp^2.$$

Komutativnost simetričnog dijela produkta se vidi i iz

$$ab + ba = a^2 + b^2 - (a+b)^2,$$

jer je kvadrat vektora komutativan. Neovisno o tome kako ćemo definirati a^2 za vektore *a* i $b_\perp$ vrijedi

$$\left(a + b_\perp\right)^2 = a^2 + b_\perp^2 + ab_\perp + b_\perp a = a^2 + b_\perp^2 + ab_\perp - ab_\perp = a^2 + b_\perp^2,$$

tj. imamo Pitagorin poučak, ovdje izražen pomoću novog množenja vektora. Ako definiramo pojam "okomitost" kao relaciju između vektora u kojoj je projekcija jednog na drugi jednaka nuli ($b_\perp = a - b_\parallel$), odmah imamo Pitagorin poučak bez obzira na vrijednost od a^2. Znači da ovo vrijedi i u slučaju kada imamo negativne vrijednosti kvadrata vektora, kao u specijalnoj teoriji relativnosti. Relacija

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$$

je zapravo kosinusni poučak.

Već smo pretpostavili da je a^2 realan broj jednak $\pm|a|^2$, gdje je $|a|$ apsolutna duljina vektora a (kažemo da uvodimo *metriku*). Simetrični dio pišemo kao

$$a \cdot b \equiv (ab + ba)/2 = ab_\parallel,$$

i nazivamo ga *unutarnji produkt* (*kontrakcija*). Za vektore je on identičan skalarnom produktu, ali ovdje treba malo opreza: u geometrijskoj algebri općenito razlikujemo nekoliko tipova "skalarnog" množenja, koji se za vektore ne razlikuju. Ovdje ćemo koristiti već spomenuti *unutarnji produkt* i *lijevu kontrakciju* (vidjeti u tekstu).

Za jedinične vektore ortonormirane baze imamo $e_i^2 = \pm 1$ (nul-vektore ovdje ne razmatramo), što znači

$$e_i e_j + e_j e_i = \pm 2\delta_{ij} \ .$$

Oprez: nemojmo zamijeniti $e_i e_j$ s $e_i \cdot e_j$! Ako se pitate što je $e_i e_j$ odgovor je: **potpuno novi tip objekta,** što će biti opisano u tekstu.

Pogledajmo primjere u 2D :

$$\begin{aligned}
&\Re^2: \quad e_1^2 = e_2^2 = 1 \Rightarrow (e_1 + e_2)^2 = 1 + 1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 = 2 = e_1^2 + e_2^2, \\
&\Re^{1,1}: \quad e_1^2 = -e_2^2 = 1 \Rightarrow (e_1 + e_2)^2 = 1 - 1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0 = e_1^2 + e_2^2,
\end{aligned}$$

pa vidimo da u oba slučaja vrijedi Pitagorin poučak, ali izražen preko novog množenja vektora.

Za $\Re^3$ imamo:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, \quad e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij} \, ,$$

ali ovdje imamo nešto magično, postoje poznati matematički objekti koji precizno zadovoljavaju ove relacije: *Paulijeve matrice*, otkrivene u slavnim danima razvoja kvantne mehanike. Kažemo da su Paulijeve matrice 2D matrična reprezentacija jediničnih vektora ortonormirane baze u $\Re^3$, ali za to moramo vektore množiti na novi način, upravo opisan. Drugačije rečeno, Paulijeve matrice imaju istu tablicu množenja kao ortonormirani vektori baze. Uvjerimo se u to. Paulijeve matrice definiramo kao

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pa vrijedi, primjerice

$$\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oznaka $\hat{\sigma}_i$ se često koristi za Paulijeve matrice, pa ovdje koristimo oznake σ_i za jedinične vektore u $\Re^3$. Paulijeve matrice su važne za opis spina u kvantnoj mehanici, pa vidimo da vektore također mogu poslužiti u tu svrhu, ali s novim množenjem. Zaista, kvantna mehanika može biti lijepo formulirana ovom matematikom, **bez matrica i imaginarne jedinice** (vidjeti dalje u tekstu).

Primijetimo da transponiranjem Paulijevih matrica uz kompleksnu konjugaciju dobijemo polaznu matricu (*hermitske matrice*), primjerice

$$\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

ili jednostavno $\hat{\sigma}_2^\dagger = \hat{\sigma}_2$. Također vrijedi, primjerice, $(\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3)^\dagger = \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_2$ (*antiautomorfizam*, pokažite to). Ovo odgovara operaciji *reverz* (vidjeti u tekstu) na produktima vektora, primjerice $e_1e_2e_3 \to e_3e_2e_1$. Stoga znak † ovdje koristimo za operaciju *reverz*.

Ovdje možemo odmah istaknuti važno svojstvo novog množenja vektora. Vektor je geometrijski i intuitivno jasan koncept, a takav je i novi produkt vektora (vidjeti u tekstu). Primjerice, produkt e_1e_2 nije teško interpretirati kao orijentiranu površinu, ima sposobnost da rotira objekte, nedvosmisleno definira ravninu razapetu vektorima e_1 i e_2, itd. Sve to možemo zaključiti već na prvi pogled. Za usporedbu, pogledajmo matričnu reprezentaciju vektora σ_1 i σ_2 te njihov produkt:

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Možemo li zaključiti o geometrijskoj interpretaciji samo gledajući u rezultantnu matricu? Samo gledajući svakako ne, treba nešto napora, ali ćemo često jednostavno previdjeti moguću geometrijsku interpretaciju, ako uopće postoji. Koju ravninu definira rezultantna matrica (ako takva postoji)? **Paulijeve matrice ne mogu uraditi sve što vektori mogu**. U ovom tekstu ćemo, nadati se, rasvijetliti ovakve stvari kako bismo došli do svijesti o važnosti uvođenja novog množenja vektora.

Vrijeme je da novom množenju vektora i "službeno" damo ime (*Clifford*, *Hestenes*, …): *geometrijski produkt*. Simetrični i anti-simetrični dio geometrijskog produkta vektora ima posebne oznake: $a \cdot b$ i $a \wedge b$ ($a \cdot b$ je *unutarnji* a $a \wedge b$ *vanjski produkt*), pa za vektore možemo pisati

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

Važan pojam koji ćemo često koristiti je *stupanj* (*grade*). Realni brojevi ima ju stupanj 0, vektori 1, svi elementi koji su linearna kombinacija umnožaka $e_i \wedge e_j$, $i \neq j$, imaju stupanj 2, itd. Primijetimo da je geometrijski produkt dva vektora kombinacija stupnjeva 0 i 2, kažemo da je *paran*, jer su mu stupnjevi parni. Koje stupnjeve općenito ima geometrijski produkt od tri vektora?

Vektorski prostor nad poljem realnih brojeva uz geometrijski produkt (GP u tekstu) postaje algebra (*geometrijska algebra*, GA u tekstu). Elementi geometrijske algebre očigledno nisu samo vektori. Za jedinične vektore jedinične baze vrijedi, primjerice

$$e_1 \cdot e_1 = \frac{e_1e_1 + e_1e_1}{2} = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = \frac{e_1e_2 + e_2e_1}{2} = 0 \Rightarrow e_1e_2 = e_1 \cdot e_2 + e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2,$$

pa je za okomite vektore vanjski produkt jednak geometrijskom. Za anti-simetrični dio vrijedi

$$e_1 \wedge e_2 = \frac{e_1e_2 - e_2e_1}{2} = \frac{e_1e_2 + e_1e_2}{2} = e_1e_2, \quad e_1 \wedge e_1 = \frac{e_1e_1 - e_1e_1}{2} = 0.$$

Očigledno, e_1e_2 nije skalar, ne komutira sa svim vektorima, primjerice

$$(e_1 \wedge e_2)\mathrm{e}_1 = (e_1e_2)\mathrm{e}_1 = -e_1e_1e_2 = -e_1(e_1 \wedge e_2),$$

ali nije ni vektor u $\Re^3$, ima kvadrat -1:

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1,$$

pa imamo **novu** vrstu matematičkog objekta, ponaša se kao **imaginarna jedinica**, ali ne-komutativna. Ovakve objekte nazivamo *bivektorima*. Općenito, definiramo bivektor kao element algebre oblika $a \wedge b$. Pogledajmo neka svojstva bivektora e_1e_2. Vrijedi

$$(e_1e_2)e_1 = -e_1e_1e_2 = -e_2, \quad (e_1e_2)e_2 = e_1,$$

znači, množenjem s lijeva rotira vektore za $-\pi/2$. Kako će rotirati vektore množenjem s desna?

Podsjetimo da je operacija *reverz* na geometrijskom produktu vektora definirana kao: $x = abc...d \;\; \rightarrow \;\; d...cba = x^{\dagger}$, pa imamo

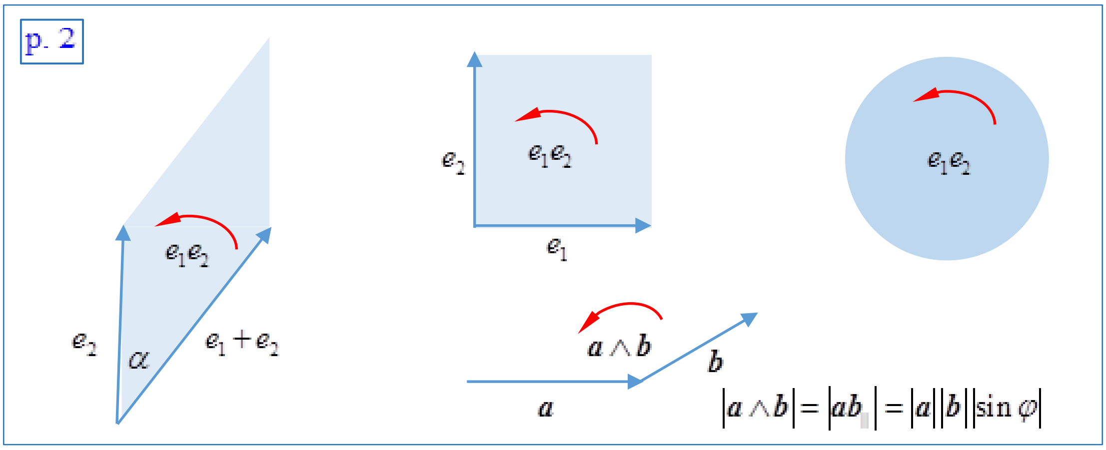
$$(e_1e_2)(e_1e_2)^{\dagger} = (e_1e_2)(e_2e_1) = -(e_1e_2)^2 = 1,$$

što znači da imamo *jedinični bivektor*. Općenito, moguće je definirati modul bivektora, stoga bivektori imaju iznos i orijentaciju. Dalje, jedinični bivektori, kao e_1e_2, osim iznosa, orijentacije ($e_1e_2 \neq e_2e_1 = -e_1e_2$) te sposobnosti rotacije vektora, imaju još jedno važno svojstvo, koje imaginarna jedinica nema, naime, definiraju ravninu razapetu vektorima (ovdje e_1 i e_2). Kasnije ćemo vidjeti kako se sve ovo implementira u praksi.

Kako predstaviti (jedinični) bivektor grafički? Očigledan način je pokušati s usmjerenim paralelogramom (kvadrat za e_1e_2). Međutim, oblik plohe koja predstavlja bivektor je nevažan, treba samo zadržati iznos površine i orijentaciju, stoga je često praktičan izbor krug površine $|e_1e_2|/\sqrt{\pi} = 1/\sqrt{\pi}$. Za potvrdu izrečenog pogledajmo

$$e_1e_2 = e_1 \wedge e_2 \Rightarrow (e_1 + e_2) \wedge e_2 = e_1e_2,$$

ovo može ilustrirati činjenicu da oblik nije važan.



Primijetimo kako dva vektora, osim što definiraju ravninu, definiraju i paralelogram. Vanjski produkt takvih vektora (bivektor) ima iznos točno jednak površini paralelograma (vidjeti dalje u tekstu), dok orijentaciju definiramo kao na p. 2. Nađite površinu paralelograma na p. 2 krajnje lijevo. Primijetite da je bivektor upravo e_1e_2 , ali pokažite da formula

$$1 = |e_1e_2| = |e_1 + e_2||e_2|\sin\alpha$$

daje površinu paralelograma.

Za antisimetrični dio geometrijskog produkta možemo pisati

$$ab - ba = ab_{\perp} - b_{\perp}a = 2ab_{\perp}$$

pa vidimo odmah da anti-komutira s a , $b_{\parallel}$ i $b_{\perp}$, prema tome i s b , kao i sa svim vektorima iz ravnine definirane vektorima a i b . Očigledno, komutira s vektorima okomitim na tu ravninu. Također vrijedi

$$(ab_\perp)^2 = ab_\perp ab_\perp = -aab_\perp b_\perp = -a^2 b_\perp^2,$$

što znači da je ova veličina negativna u euklidskom vektorskom prostoru. Tako, anti-simetrični dio geometrijskog produkta nije vektor, njegov kvadrat može biti negativan realan broj, a nije niti skalar jer anti-komutira s vektorima iz svoje ravnine. Primijetite da iz

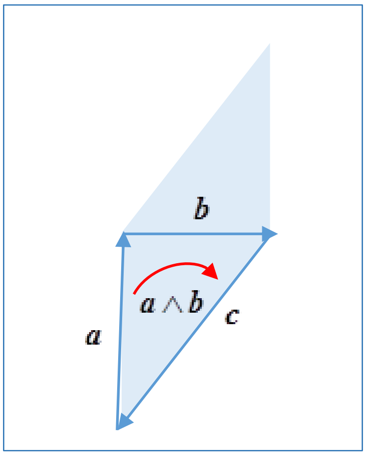
$$ab + ba = 2ab_\parallel,$$
$$ab - ba = 2ab_\perp,$$

možemo izvesti mnogo zanimljivih svojstava dijelova geometrijskog produkta, uključujući njihove iznose, jednostavno koristeći

$$|b_\parallel| = |b||\cos\varphi| \text{ i } |b_\perp| = |b||\sin\varphi|.$$

Pogledajmo tri vektora u $\Re^3$ čija suma je nula (trokut), iz $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ slijedi

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}.$$



Da to provjerimo dovoljno je pogledati izraze $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\wedge\boldsymbol{a}$ i $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\wedge\boldsymbol{b}$ (provjerite), ali to možemo pokazati jednostavno i bez računanja, dovoljno je pogledati sliku lijevo: svaki par vektora definira paralelogram površine dvostruko veće od površine trokuta, i svi parovi daju istu orijentaciju bivektora. Ovo je važno, često možemo izvoditi važne zaključke iz jednostavnih geometrijskih razmatranja, bez računanja. U formuli za površinu paralelograma pojavljuje se funkcija sinus, pa vidimo da su prethodne jednakosti upravo *sinusni teorem*. Ako se prisjetimo da bivektor ne ovisi o obliku zaključujemo da sve tri para vektora daju bivektor s faktorom I (jedinični bivektor). Sada vrijedi

$$Iab\sin\gamma = Ibc\sin\alpha = Iac\sin\beta.$$

Bivektori definiraju ravninu. Promotrimo vanjski produkt u *Cl*3

$$(e_1\wedge e_2)\wedge(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = a_3e_1e_2e_3,$$

pa vidimo da vanjski produkt vektora i bivektora daje mogućnost da se izdvoje komponente vektora koje ne pripadaju ravnini definiranoj bivektorom. Stoga je ravnina bivektora B (2D potprostor) definirana relacijom

$$B\wedge x = 0.$$

Rješenje u našem primjeru su vektori oblika $x = a_1e_1 + a_2e_2$.

Zamislimo bivektor u *Cl*3. On definira ravninu i ima svojstva (ne-komutativne) imaginarne jedinice (u svojoj ravnini). Ovo je moćno: možemo koristiti formalizam teorije kompleksnih brojeva u bilo kojoj ravnini, u prostoru bilo koje dimenzije. Kako? Vratimo se našem bivektoru e_1e_2 i vektoru $xe_1 + ye_2$. Pomnožimo li vektor s e_1 s lijeva dobijemo

$$e_1(xe_1 + ye_2) = x + ye_1e_2 = x + yI,\quad I = e_1e_2,$$

pa imamo kompleksni broj. Što dobijemo množenjem s desna? Više detalja kasnije u tekstu.

Čitatelj može pokazati da bilo koja linearna kombinacija jediničnih bivektora u *Cl*3 može biti izražena kao vanjski produkt dvaju vektora. Ovo nije nužno istina u 4D, uzmimo kao primjer $e_1e_2 + e_3e_4$.

Pokažite da ne postoje dva vektora u 4D sa svojstvom $a \wedge b = e_1e_2 + e_3e_4$. U 3D, za svaku ravninu imamo točno jedan (do na predznak) jedinični vektor okomit na ravninu, što nije istina za više dimenzije. Primjerice, u 4D, ravnina definirana bivektorom e_1e_2 ima okomite jedinične vektore e_3 i e_4 (i njihove linearne kombinacije).

Uzmimo bivektor e_1e_2 u $\Re^3$ i pomnožimo ga s $-e_1e_2e_3 \equiv -j$: $-e_1e_2 j = e_3$, pa vidimo da smo dobili točno vektorski produkt vektora e_1 i e_2, ili, za proizvoljne vektore

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -j\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Ovo vrijedi u 3D, ali izraz $-I\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ je definiran u bilo kojoj dimenziji, gdje je I općenito pseudoskalar. U 2D je $-I\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ realan broj, dok u 4D ili višim dimenzijama imamo potprostor *dualan* našem bivektoru. Vektorski produkt (*Gibbs*) zahtijeva pravilo desne ruke i korištenje okomica na plohe. S bivektorima je to nepotrebno (i nepoželjno), pa, primjerice, možemo potpuno zaobići pojmove kao što su "os rotacije", itd. Nađite geometrijski produkt vektora $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i$ i $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i$ u $\Re^3$ i pokažite da može biti napisan kao

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) e_1e_2e_3 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\, j.$$

Algebra

Pogledajmo ponovo 2D primjer. Svi mogući vanjski produkti vektora izraženi u ortonormalnoj bazi mogu dati linearne kombinacije "brojeva" 1, e_1, e_2 i $e_1 \wedge e_2 = e_1e_2$ (svaku takva linearnu kombinaciju nazivamo *multivektor*). Vanjski produkt je anti-komutativan, stoga svi članovi koji imaju dva ista jedinična vektora nestaju. "Brojevi" 1, e_1, e_2 i e_1e_2 čine bazu 2^2 – dimenzionalnog linearnog prostora. Zapravo, imamo bazu algebre (*Cliffordova algebra*). Kada je geometrijsko značenje u prvom planu govorimo o *geometrijskoj algebri* (prema *Cliffordu*). Element 1 je realni skalar. Imamo dva vektora i jedan bivektor (u terminologiji geometrijske algebre bismo rekli da je *pseudoskalar* u algebri, preciznije, element algebre s maksimalnim stupnjem). Primijetimo da skalari čine potprostor (realni brojevi, *stupanj nula*, vidjeti dalje u tekstu), vektori definiraju 1D potprostor (*stupanj* 1), dok pseudoskalar definira 2D potprostor (cijeli vektorski prostor, stupanj 2).

U $\Re^3$ imamo bazu algebre (*Cl*3):

$$1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_1e_2,\ e_1e_3,\ e_2e_3,\ e_1e_2e_3,$$

gdje je $j \equiv e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_1e_2e_3$ jedinični *pseudoskalar*. Pokažite da *j* komutira sa svim elementima Cliffordove baze u *Cl*3 te da vrijedi $j^2 = -1$. Pseudoskalari u bilo kojoj dimenziji su svi proporcionalni jediničnom pseudoskalaru. Pokažite to, barem za j. Tako, pseudoskalar *j* je savršena (komutativna) imaginarna jedinica u *Cl*3. Takav pseudoskalar će se pojaviti ponovo u *Cl*7, *Cl*11, … Ovo ima dalekosežne posljedice. Ali ovdje trebamo malo opreza, svojstvo komutativnosti pseudoskalara podrazumijeva geometrijski produkt, dok u izrazima s drugim produktima treba biti oprezan. Realni skalari nemaju ovaj "problem", oni mogu "šetati" kroz sve produkte. Za pseudoskalar u *Cl*3 vrijedi, primjerice

$$je_1e_3 = e_1 je_3 = e_1e_3 j = (e_1 j)e_3 = e_1(je_3),$$

tj. geometrijski produkt dozvoljava "šetnju", ali ovo općenito ne vrijedi, recimo, za unutarnji produkt

$$(e_1 \cdot e_3)\, j = 0 \neq e_1 \cdot (je_3) = e_1 \cdot (e_1e_2) = e_2,$$

gdje imamo primjer *mješovitog množenja* (vidjeti dalje u tekstu).

U 3D, za proizvoljna četiri vektora vrijedi $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} = 0$. Vanjski produkt ima svojstva distributivnosti i asocijativnosti (pogledati literaturu ili dokazati). Ako su bilo koja dva vektora u produktu paralelni relacija je točna zbog anti-komutativnosti vanjskog produkta. Inače imamo, primjerice, $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$, pa je naša tvrdnja točna zbog distributivnosti i anti-komutativnosti.

Maksimalni stupanj multivektora ne može biti veći od dimenzije vektorskog prostora (pokažite to). pokažite da je broj elemenata Cliffordove baze stupnja k jednak binomnom koeficijentu

$$\binom{n}{k},$$

gdje je n dimenzija vektorskog prostora. Za realne skalare imamo $k = 0$, pa imamo samo jedan realni skalar u bazi (1). Slično je za $k = n$, imamo samo jedan element baze sa stupnjem n, čime je i motiviran naziv "*pseudoskalar*". Pokažite da je broj elemenata Cliffordove baze n-dimenzionalnog vektorskog prostora jednak 2^n.

Važan pojam je *parnost* multivektora i odnosi se na parnost stupnjeva. Svi elementi s parnim stupnjevima definiraju podalgebru (geometrijski produkt bilo koja parna elementa je također paran, pokažite to!), što ne vrijedi za neparni dio algebre.

Stupnjeve multivektora M obično zapisujemo kao $\langle M \rangle_r$, gdje je *r stupanj*. Za stupanj 0 pišemo jednostavno $\langle M \rangle$, primjerice $a \cdot b = \langle ab \rangle$. Stupanj 0 je realan broj i ne ovisi o redoslijedu množenja, pa vrijedi $\langle AB \rangle = \langle BA \rangle$, što vodi na mogućnost cikličkih zamjena, kao $\langle ABC \rangle = \langle CAB \rangle$. Ovo je korisna relacija, primjerice, razmotrimo unutarnji produkt $a \cdot b$ i zapitajmo se što bi se dogodilo ako primijenimo transformacije $a \to nan$ i $b \to nbn$ (n je jedinični vektor). Primijetimo da je rezultat ovakve transformacije vektor (rastavite vektor a na komponente paralelne i okomite na n). Unutarnji produkt dva vektora je upravo stupanj 0 od njihovog geometrijskog produkta, pa imamo, koristeći cikličke zamjene

$$(nan) \cdot (nbn) = \langle nannbn \rangle = \langle nabn \rangle = \langle abnn \rangle = \langle ab \rangle = a \cdot b.$$

Ovakva transformacija ne mijenja unutarnji produkt, pa imamo primjer ortogonalne transformacije (u našem primjeru imamo *refleksiju*). Transformacija $X \to nXn$ (n je jedinični vektor) općenito ne mijenja stupanj. Primjerice, za $X = ab$ vrijedi

$$nabn = nannbn = (nan)(nbn),$$

pa opet imamo geometrijski produkt dvaju vektora. Ovo je veoma važan zaključak. Da vidimo kako vrijedi općenito trebamo se sjetiti da je svaki multivektor linearna kombinacija elemenata iz Cliffordove baze. Tako imamo, primjerice $e_1(e_1e_3)e_1 = e_3e_1 = -e_1e_3$, pa je stupanj opet 2. Ako se stupanj nekog elementa promijeni transformacijom dobijemo novi tip elementa, što obično ne želimo. Radije, obično želimo transformirati vektore u vektore, bivektore u bivektore, itd.

Pogledajmo sada neke važne primjere formula u kojima se pojavljuju miješani produkti. Primjerice, pogledajmo produkt

$$a(b \wedge c) = a(bc - cb)/2 = (abc - acb)/2.$$

Možemo iskoristiti očiglednu (i korisnu) relaciju $ab = 2a \cdot b - ba$ i pokazati da (ostavljamo čitatelju)

$$a(b \wedge c) - (b \wedge c)a = 2(a \cdot b)c - 2(a \cdot c)b.$$

Ovdje imamo situaciju u kojoj je stupanj (bivektora) smanjen, pa je uobičajeno pisati takve relacije kao unutarnji produkt, odnosno vrstu **kontrakcije**

$$a \cdot B = (aB - Ba)/2,$$

(B je bivektor) ili,

$$a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b = a \cdot bc - a \cdot cb,$$

gdje se podrazumijeva da se unutarnji produkt izvršava prvi. Ovo je važna i korisna formula. Nije teško pokazati da vrijedi

$$a \wedge B = (aB + Ba)/2,$$
$$aB = a \cdot B + a \wedge B.$$

Nađite $e_1 \cdot (e_1 e_2)$ i $e_1 \wedge (e_1 e_2)$.

Dajemo još jednu korisnu formulu (bez dokaza)

$$e_1 \cdot (\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} e_1 \cdot \boldsymbol{a}_k (\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \breve{\boldsymbol{a}}_k \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_n),$$

gdje $\breve{\boldsymbol{a}}_k$ znači da faktor $\boldsymbol{a}_k$ nedostaje u vanjskom produktu. Nađite $e_1 \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$.

Sada je jednostavno naći izraze za komponente vektora u zadanom smjeru i okomito na njega (ovo smo najavili ranije), primjerice, za vektor a, koristeći smjer jediničnog vektora n, imamo

$$a = n^2 a = n(n \cdot a + n \wedge a) = nn \cdot a + nn \wedge a = a_{\|} + a_{\perp},$$

gdje geometrijski produkt izvodimo posljednji. Za općenite formule (za bilo kakve elemente algebre) pogledajte literaturu, ili izvedite sami koristeći pojam inverza vektora.

Važni pojmovi

Prije nego „zaronimo“ u *Cl*3 pogledajmo nekoliko općenitih pojmova.

a) *verzor (versor)* $\rightarrow$ geometrijski produkt bilo kojeg broja vektora
b) *list (blade)* $\rightarrow$ vanjski produkt bilo kojeg broja vektora („list“ je samo prijedlog autora)
c) *involucija* $\rightarrow$ svaka funkcija sa svojstvom f (f(x)) = f(x)
d) *inverz* $\rightarrow$ za element *x* je to element *y* takav da $xy = 1$, $y = x^{-1}$
e) *nilpotent* $\rightarrow$ $x^2 = 0$
f) *idempotent* $\rightarrow$ $x^2 = x$
g) *djelitelji nule* (*zero divisors*) $\rightarrow$ $xy = 0$, $x, y \neq 0$

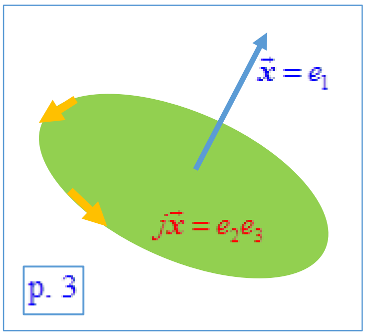
Pogledajmo ove pojmove malo detaljnije.

a) Primjer *verzora* je abc, ako su faktori vektori. Geometrijski produkt dva vektora općenito daje stupnjeve 0 i 2. Za tehnike provjere da je neki multivektor verzor pogledajte Bouma i [19]. Pokažite da je geometrijski produkt verzora i njegovog reverza (za abc je to cba) realan broj.

b) Primjer *lista* je $a \wedge b \wedge c$, ako su faktori vektori. Za tehniku provjere da je neki multivektor list pogledajte Bouma i [19]. List je *elementaran* ako se može reducirati na vanjski produkt vektora baze (do na realni faktor).

Dok verzor ab općenito ima stupnjeve 0 i 2, list $a \wedge b$ ima stupanj 2 i definira 2D potprostor. Pokažite da je svaki *homogeni verzor* (koji ima samo jedan stupanj) list. Pokažite da svaki list može biti transformiran u verzor s ortogonalnim vektorima kao faktorima. Svaki list u *Cl*3 koji je vanjski produkt od tri linearno neovisna vektora je proporcionalan jediničnom pseudoskalaru (pokažite to, ako već niste).

Promotrimo proizvoljni skup indeksa jediničnih vektora neke ortonormalne baze, od kojih se neki mogu ponoviti. Nađite algoritam za sortiranje indeksa, tako da se uvaži anti-simetrija za različite indekse. Cilj je pronaći ukupan predznak. Nakon sortiranja, jedinični vektori istog indeksa se reduciraju na jedan jedinični vektor (do na predznak) ili na realni broj (± 1). Primjer: $e_2 e_3 e_1 e_2 = e_1 e_2 e_3 e_2 = -e_1 e_2 e_2 e_3 = -e_1 e_3$.



Elementi Cliffordove baze su *elementarni* listovi. Vidjeli smo da u *Cl*3 svaka linearna kombinacija jediničnih bivektora definira ravninu (tj. može biti napisana kao vanjski produkt od dva vektora). Pomnožite svaki element Cliffordove baze pseudoskalarom j. Što dobijete? Slika p. 3 može pomoći u razmišljanju. Možete koristiti *GAViewer* i vidjeti kako vaši produkti izgledaju.

c) U geometrijskoj algebri se najčešće koriste tri *involucije*, pri čemu se sve svode na promjenu predznaka elemenata iz Cliffordove baze.

Involucija stupnjeva (*grade involution*) nastaje promjenom predznaka svih vektora baze vektorskog prostora (*inversion*). Na ovaj način svi parni elementi ostaju nepromijenjeni, dok neparni mijenjaju predznak. Promotrimo općeniti multivektor M u *Cl*3:

$$M = t + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + B_1 e_{12} + B_2 e_{13} + B_3 e_{23} + bj ,$$

gdje je $e_{12} \equiv e_1 e_2$, itd. *Involucija stupnjeva* daje

$$\hat{M} = t - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 + B_1 e_{12} + B_2 e_{13} + B_3 e_{23} - bj .$$

Involucija stupnjeva je *automorfizam* (pokažite to), što znači

$$\left(MN\right)^{\wedge} = \hat{M}\hat{N} .$$

Elementi $\left(M + \hat{M}\right)/2 \equiv \langle M \rangle_+$ i $\left(M - \hat{M}\right)/2 \equiv \langle M \rangle_-$ daju parni i neparni dio multivektora M (nađite ih za općeniti M u *Cl*3).

Reverz je anti-*automorfizam* ($\left(MN\right)^{\dagger} = N^{\dagger} M^{\dagger}$, pokažite):

$$M^{\dagger} = t + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 - X_1 e_{12} - X_2 e_{13} - X_3 e_{23} - bj .$$

Elementi $\left(M + \hat{M}\right)/2 \equiv \langle M \rangle_R$ i $\left(M - \hat{M}\right)/2 \equiv \langle M \rangle_I$ daju realni i imaginarni dio multivektora M (vidjeti dalje u tekstu, nađite ih za općeniti M u *Cl*3).

Cliffordova konjugacija (*involucija*) je anti-*automorfizam* ($\overline{MN} = \bar{N}\bar{M}$, pokažite):

$$\bar{M} = t - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 - X_1 e_{12} - X_2 e_{13} - X_3 e_{23} + bj .$$

Elementi $\left(M+\hat{M}\right)/2 \equiv \langle M\rangle_S$ i $\left(M-\hat{M}\right)/2 \equiv \langle M\rangle_V$ daju (kompleksan) skalar i (kompleksan) vektor kao dijelove multivektora M (vidjeti dalje u tekstu, nađite ih za općeniti M u *Cl*3).

Što dobijemo primjenom sve tri involucije na multivektor te što dobijemo primjenom bilo koje dvije od njih? Svaka involucija mijenja predznake nekih stupnjeva. Ako je ukupni predznak nekog stupnja zadan formulom $(-1)^{f(r)}$, *r* je stupanj, nađite funkciju *f* za svaku involuciju. Često moramo provjeriti svojstva nekog produkta, sume, itd. Kakav je multivektor u *Cl*3 ako vrijedi $M = inv\left(M\right)$, gdje inv predstavlja bilo koju od tri definirane involucije? Pokažite da za verzore V vrijedi relacija $V = v_1 v_2 ... v_k \Rightarrow \hat{V} = \left(-v_1\right)\left(-v_2\right)...\left(-v_k\right)$. Pokažite da je multivektor $\hat{V} x V^{\dagger}$ vektor ako je x vektor.

d) Važna posljedica geometrijskog produkta vektora je postojanje inverza vektora (i mnogih drugih elemenata algebre), tj. možemo dijeliti vektorom. Za vektore (nul-vektori nemaju inverz) vrijedi

$$a^{-1} = a / a^2 ,$$

što znači da je jedinični vektor inverz sam sebi. Postojanje inverza ima dalekosežne posljedice i fundamentalno razlikuje geometrijski produkt od običnog skalarnog i vektorskog produkta. Sada možemo riješiti jednadžbu:

$$ab = c \Rightarrow a = bc^{-1} ,$$

itd. Možemo definirati i inverze drugih multivektora, primjerice, lako je naći inverz verzora:

$$\left(e_1 e_2\right)^{-1} = -e_1 e_2 / (e_1 e_2 e_2 e_1) = -e_1 e_2 = e_2 e_1 .$$

Ovdje smo iskoristili činjenicu da je geometrijski produkt verzora i njegovog reverza realan broj. Postoje i multivektori bez inverza, vidjet ćemo to malo kasnije. Definicija inverza nije uvijek jednostavna niti jedinstvena, ali u *Cl*3 je taj zadatak relativno jednostavan. Primijetimo da je postojanje inverza povezano s mogućnošću da definiramo iznos (norma, modul) multivektora, a to nije uvijek jedinstveno. Za općenit pristup pogledajte literaturu.

e) Geometrijski produkt omogućuje postojanje multivektora različitih od nule čiji kvadrat je nula. To su *nilpotenti* u algebri i imaju važnu ulogu, primjerice, formuliran u *Cl*3, elektromagnetski val u vakuumu je upravo nilpotent u algebri. Kao jednostavan primjer imamo

$$\left(e_1 + e_1 e_2\right)^2 = e_1\left(1+e_2\right)e_1\left(1+e_2\right) = e_1 e_1\left(1-e_2\right)\left(1+e_2\right) = 0 .$$

Nilpotenti nemaju inverz. Ako je $N \neq 0$ nilpotent i M je njegov inverz, tada iz $NM = 1$ *dobijemo* $N^2 M = N$, tj. $0 = N$.

f) *Idempotenti* imaju jednostavno svojstvo $p^2 = p$. Pokažite da je multivektor $\left(1+e_1\right)/2$ idempotent. Zapravo, svaki multivektor oblika $\left(1+f\right)/2,\ f^2 = 1$ je idempotent. Kasnije u tekstu ćemo naći opći oblik idempotenta u *Cl*3. Trivijalni idempotent je 1. Pokažite da je trivijalni idempotent jedini idempotent koji ima inverz.

g) Pomnožite $(1 + e_1)(1 - e_1)$. Postoje multivektori različiti od nule koji pomnoženi daju nulu (*djelitelji nule*). Iako se to razlikuje od svojstava realnih brojeva pokazuje se kao vrlo korisno u mnogim primjenama.

Treba spomenutu da zbrajanje veličina kao $\boldsymbol{x}$ i $j\boldsymbol{n}$ (ili drugih izraza različitih stupnjeva) ne predstavlja problem, kako neki prigovaraju, zbrajamo objekte različitih stupnjeva, stoga, kao s kompleksnim brojevima, takve sume čuvaju stupnjeve. Ovdje suma treba biti shvaćena kao **relacija** između različitih potprostora. Razjasnimo to malo koristeći *Cl*3. Realni brojevi imaju stupanj nula i definiraju potprostor "točaka". Vektori definiraju orijentirane linije, bivektori definiraju orijentirane ravnine, a pseudoskalari definiraju orijentirani volumen. Primjerice, bivektor B definira orijentiranu ravninu relacijom $B \wedge \boldsymbol{x} = 0$. U toj ravnini možemo definirati jedinični bivektor $\hat{B}$ koji ima cijeli niz zanimljivih svojstava: kvadriran daje -1, orijentiran je, rotira vektore u ravnini, itd. Uzmimo kao primjer $B = e_1e_2 + e_2e_3 = e_2 \wedge (e_3 - e_1)$, pa vektori e_2 i $e_3 - e_1$ razapinju ravninu. Relacija $B \wedge \boldsymbol{x} = 0$ daje vektore $\boldsymbol{x}$ kao linearnu kombinaciju vektora e_2 i $e_3 - e_1$. Nađite $BB^\dagger$. Uočite, jedinični bivektor $\hat{B} = B/\sqrt{2}$ ima jasnu geometrijsku interpretaciju, ali je također operator koji rotira vektore u ravnini koju definira. Može također biti imaginarna jedinica za kompleksne brojeve definirane u ravnini koju definira. Multivektor oblika $\alpha + B$ je suma različitih stupnjeva, ali ne postoji način da se "pomiješaju" realni skalari i bivektori u sumi: uvijek su razdvojeni. Ali zajedno, kao suma, veoma su moćni, kao, primjerice, *rotori* ili *spinori* (vidjeti dalje u tekstu).

Konačno, svaki multivektor može biti izražen kao lista koeficijenata u Cliffordovoj bazi. Kao primjer pogledajmo multivektor $3 - e_2 + e_1e_2$ u 2D, lista koeficijenata je $(3, 0, -1, 1)$. Jasno je da možemo zbrajati i oduzimati ovakve liste, naći pravilo za njihovo množenje, itd. Zbrajanje elemenata različitih stupnjeva ekvivalentno je kreiranju ovakvih lista, kako smo već navikli za kompleksne brojeve. Kompleksni broj $\alpha + i\beta$ pišemo kao uređeni par brojeva (α, β).

Primjeri rješavanja jednadžbi

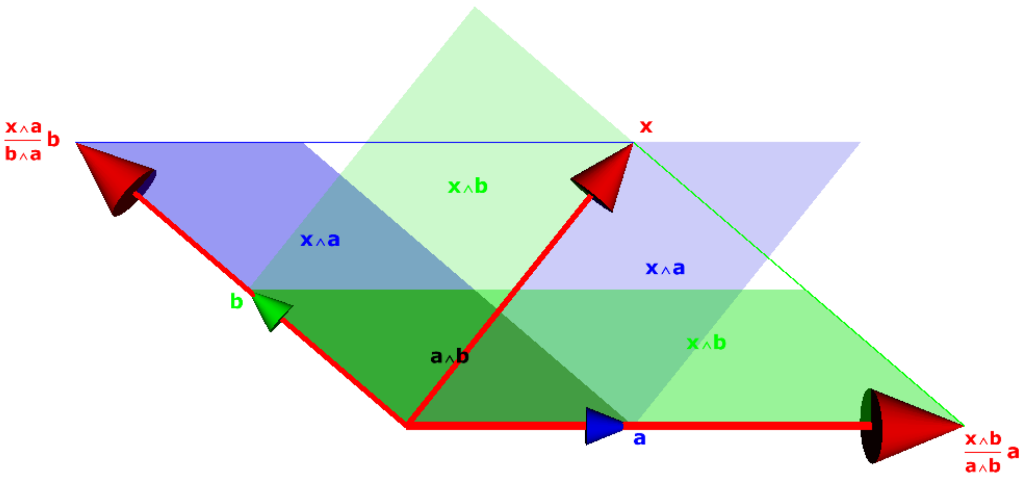
Nađimo realne brojeve α i β takve da $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ u $\Re^3$. Vrijedi

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = \beta\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Primijetite da bivektori $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ definiraju istu ravninu i oba su proporcionalni jediničnom bivektoru u toj ravnini, tj. njihov omjer je realan broj (jedinični bivektor podijeljen sam sa sobom daje 1). Stoga vrijedi

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

Možemo iskoristiti *GAViewer* da to pokažemo grafički:



Pogledajmo sada kvadratnu jednadžbu:

$$x^2 + x + 1 = 0 .$$

Pokažite da je $x = -e^{\pm i\pi/3}$, $i = e_1 e_2$, rješenje. Možete li naći rješenje za proizvoljnu kvadratnu jednadžbu? Obratite pažnju na činjenicu da možemo interpretirati izraz $x^2 + x + 1$, uz prethodno rješenje, kao operator koji djelujući na neki vektor v daje nulu. Ovo znači da imamo sumu vektora (v), rotiranog vektora (xv) i dvaput rotiranog vektora ($x^2 v$), tri vektora koja možemo aranžirati u trokut. O rotacijama u eksponencijalnoj formi vidjeti dalje u tekstu, ovdje možete slobodno tretirati izraze kao kompleksne brojeve s imaginarnom jedinicom $i = e_1 e_2$ (tj. možete koristiti trigonometrijski oblik kompleksnog broja). U sljedećem poglavlju ćete naći objašnjenje za ovakav pristup.

Geometrijski produkt vektora u trigonometrijskom obliku

Pogledajmo kvadrat bivektora u $\Re^n$ (za druge signature pogledajte literaturu, glavne ideje su iste),

$$\begin{aligned}&(a \wedge b)(a \wedge b) = (ab - a \cdot b)(a \cdot b - ba) = \\ &-ab^2 a - (a \cdot b)^2 + a \cdot b (ab + ba) = \\ &(a \cdot b)^2 - a^2 b^2 = -a^2 b^2 \sin^2 \theta ,\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili $(a \cdot b)^2 = a^2 b^2 \cos^2 \theta$. Drugi način da se ovo vidi je da pođemo od oblika $ab_\perp$

$$(ab_\perp)^2 = ab_\perp ab_\perp = -a^2 b_\perp^2 .$$

Vidimo da je u $\Re^n$ kvadrat bivektora negativan realan broj. Sada možemo definirati iznos bivektora kao

$$|a \wedge b| = |a||b||\sin \theta| .$$

Geometrijski produkt dva vektora možemo sada napisati kao

$$ab = |a||b| \hat{a}\hat{b} = |a||b| \left(\hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{a} \wedge \hat{b} \right) = |a||b| \left(\cos \theta + \hat{B} \sin \theta \right), \quad \hat{B} = \frac{\hat{a} \wedge \hat{b}}{|\hat{a} \wedge \hat{b}|}, \quad \hat{B}^2 = -1 ,$$

ili

$$ab = |a||b|e^{\hat{B}\theta}.$$

Primijetite da imamo sličnu formulu za kompleksne brojeve, ali ovdje je situacija bitno drugačija: jedinični bivektor $\hat{B}$ nije samo obična „imaginarna jedinica“, on definira ravninu razapetu vektorima a i b. Ovo je velika prednost u usporedbi s običnim kompleksnim brojevima, daje nam jasnu geometrijsku interpretaciju izraza. Primjerice, formulacija kvantne mehanike u geometrijskoj algebri koristi realne brojeve, nema potrebe za $\sqrt{-1}$, a usput u svakom izrazu možemo vidjeti geometrijsko značenje direktno. Ovo čini novu formulaciju moćnijom, ona omogućuje nove uvide, koji bi inače ostali skriveni ili teško dostupni.

Ovdje imamo priliku naći odgovor o tablicama množenja. Vidjeli smo kako su tablice množenja za skalarni i vektorski produkt gotovo komplementarne. Sada znamo, geometrijski produkt dva vektora može biti rastavljen na simetrični i anti-simetrični dio, znamo njihove iznose, imaju funkcije sinus i kosinus kao faktore i to nam daje "ujedinjenu" tablicu množenja. Napišimo je (primijetite da, primjerice, $e_1e_2 = je_3$)

$$\begin{array}{c|ccc} \bullet & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \oplus \begin{array}{c|ccc} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc} \mathrm{GP} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2 & -e_1e_2 & 1 & e_2e_3 \\ e_3 & -e_1e_3 & -e_2e_3 & 1 \end{array}$$

pa možemo vidjeti da nova tablica množenja ima bivektore kao nedijagonalne elemente ($\oplus$ je samo za zabavu). Zapravo, gledajući ove tablice možemo dosta naučiti o našem 3D prostoru i geometrijskoj algebri općenito.

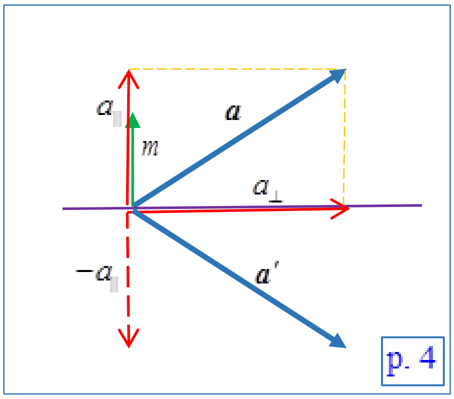
Refleksije, rotacije, spinori, kvaternioni …

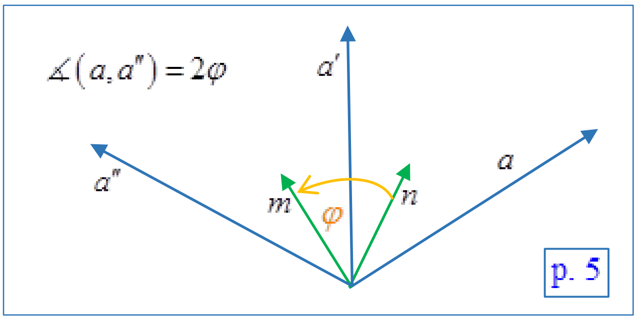
Čitatelj je sada, moguće, uvjeren da je geometrijski produkt zaista prirodan i, zapravo, neizbježan način množenja vektora. U svakom slučaju, magija tek slijedi.

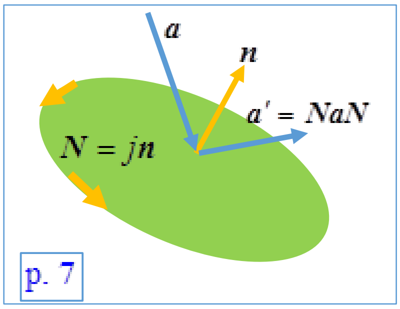
Razmotrimo sada moćan formalizam geometrijske algebre primijenjen na refleksije i rotacije (i dalje smo u $\Re^n$, detalji za druge signature mogu biti pronađeni u literaturi). Za vektor a i jedinični vektor n u $\Re^3$ (samo zbog lakšeg razumijevanja, generalizacija slijedi direktno) možemo naći komponente vektora a paralelno s n i okomito na n, znači, $a = a_{\parallel} + a_{\perp}$. Sada vrijedi

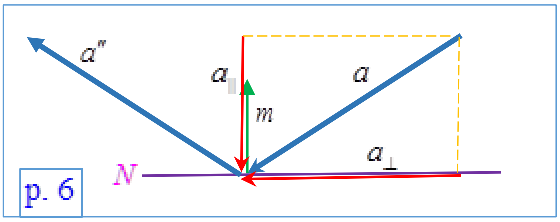
$$a' = -nan = -n\left(a_{\parallel} + a_{\perp}\right)n = -\left(na_{\parallel} + na_{\perp}\right)n = -\left(a_{\parallel} - a_{\perp}\right)nn = a_{\perp} - a_{\parallel},$$

što znači da je vektor a reflektiran na ravnini okomitoj na n **(**općenito hiper-ravnina**,** slika p. 4). Možemo ispustiti predznak minus, tada imamo refleksiju na vektoru n. Podsjetimo, refleksije ne mijenjaju stupanj reflektiranog objekta.









Spomenimo da u fizici često promatramo refleksije na plohama u 3D, pa možemo malo prilagoditi slike (p. 6, p. 7). Koristimo činjenicu da je $j^2 = -1$, odakle imamo

$$\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{nan} = j^2\boldsymbol{nan} = \boldsymbol{jnajn} = \boldsymbol{NaN},$$

gdje jedinični bivektor $\boldsymbol{N}$ definira ravninu refleksije.

Što ako primijenimo dvije uzastopne refleksije, koristeći dva jedinična vektora m i n? Postoji dobro poznati teorem prema kojemu dvije uzastopne refleksije daju rotaciju. Na slici p. 5 vidimo da nakon refleksije na n imamo $a \to a'$, a onda refleksijom na m dobijemo $a' \to a''$. Ako je kut između jediničnih vektora m i n jednak φ tada je kut rotacije vektora a jednak 2φ. Stoga, ako želimo rotirati vektor za kut φ trebaju nam jedinični vektori s kutom $\varphi/2$ između njih. Uočite kako se javlja polovični kut, tako karakterističan u opisu spina u kvantnoj mehanici. Ovdje vidimo da nema ničeg "kvantnog" u polovičnom kutu, on se jednostavno pojavljuje kao dio geometrije našeg 3D prostora (s geometrijskim produktom). O ovome će još biti riječi u tekstu.

Sada izraz za rotaciju možemo napisati kao

$$a'' = m(nan)m = mnanm.$$

Drugi način da se rotira vektor je da se konstruira operator koji rotira djelujući s lijeva. Zahvaljujući postojanju *inverza* vektora ovo je lako postići:

$$a'' = \left(a''a^{-1}\right)a \equiv Oa, \quad O = a''a^{-1}.$$

Ali metoda koji koristi refleksije je vrlo općenit i elegantan (rotira bilo koji element algebre), ima "sendvič" formu, koja je uobičajena i poželjna u geometrijskoj algebri, posebno za generalizaciju na više dimenzije. Pogledajmo član $mnanm$ pobliže. Geometrijski produkt dva jedinična vektora općenito sadrži stupnjeve 0 i 2, prema tome, pripada parnom dijelu algebre koji je podalgebra, što znači da produkt bilo koja dva ovakva elementa daje element iz parnog dijela algebre. Označimo ga kao $R = mn$ (*rotor* u tekstu). Sada imamo

$$a'' = RaR^\dagger, RR^\dagger = mnnm = 1 = R^\dagger R,$$

gdje $R^\dagger = R^{-1}$ znači *reverz* ($mn \to nm$). Za kut rotacije φ trebamo jedinične vektore koji zatvaraju kut $\varphi/2$. Vrijedi

$$m\,n = m\cdot n + m\wedge n\,,$$

gdje je $|m\wedge n| = |\sin(\varphi/2)|$. Koristeći jedinični bivektor $\hat{B} \equiv n\wedge m/|n\wedge m|$ (uočite poredak vektora), imamo

$$mn = m\cdot n + m\wedge n = \cos(\varphi/2) - \hat{B}\sin(\varphi/2) = \exp\left(-\hat{B}\varphi/2\right),$$

gdje je predznak minus uzet zbog konvencije (pozitivna rotacija je suprotna gibanju kazaljke sata). U *Cl*3 možemo pisati jedinični bivektor $\hat{B}$ kao $\boldsymbol{jw}$, gdje je $\boldsymbol{w}$ jedinični vektor koji definira os rotacije. Inverz rotora je

$$R^\dagger = nm = \exp\left(\hat{B}\varphi/2\right),$$

pa je rotacija konačno dana s

$$a'' = RaR^\dagger = e^{-\frac{\varphi}{2}\hat{B}}ae^{\frac{\varphi}{2}\hat{B}}\,.$$

Ovo je sasvim općenita formula. Ako a komutira s $\hat{B}$ rotacija nema efekta na a. Ako a anti-komutira s $\hat{B}$ imamo operator formu

$$a'' = e^{-\varphi\hat{B}}a\,.$$

Primjerice, za $\hat{B} = e_1e_2$ vektor e_3 komutira s $\hat{B}$, dok vektor e_1 anti-komutira.

Bivektor $\hat{B}$ definira ravninu rotacije i jasno je da vektori okomiti na tu ravninu neće biti promijenjeni rotorom. Primijetite, ne trebamo matrice rotacije, Eulerove kutove, ili bilo koji drugi poznati mehanizam. Jednom kada definiramo jedinični bivektor on će odraditi sav potreban posao. Možemo ga zamisliti kao mali zvrk koji radi točno ono što trebamo. Primijetite da dvije uzastopne rotacije opet daju rotaciju (pokažite to). Ovo daje *strukturu grupe*, ali ovdje nećemo govoriti o tome.

Primjer. Rotirajte vektor $e_1+e_2+e_3$ u ravnini e_1e_2 za kut φ. Imamo

$$e^{-\frac{\varphi}{2}e_1e_2}\left(e_1+e_2+e_3\right)e^{\frac{\varphi}{2}e_1e_2}\,,$$

pa iskoristimo činjenicu da vektor e_3 komutira s bivektorom e_1e_2, dok e_1 i e_2 anti-komutiraju:

$$e^{-\frac{\varphi}{2}e_1e_2}\left(e_1+e_2+e_3\right)e^{\frac{\varphi}{2}e_1e_2} = e_3e^{-\frac{\varphi}{2}e_1e_2}e^{\frac{\varphi}{2}e_1e_2} + e^{-\frac{\varphi}{2}e_1e_2}e^{-\frac{\varphi}{2}e_1e_2}\left(e_1+e_2\right) =$$

$$e_3 + \left(\cos\varphi - e_1e_2\sin\varphi\right)\left(e_1+e_2\right) = e_3 + \left(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi\right) + \left(-e_1\sin\varphi + e_2\cos\varphi\right),$$

pa za vektore u ravnini e_1e_2 prepoznajemo matricu rotacije

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},$$

gdje stupci predstavljaju slike jediničnih vektora. Rotacija za kut $-\varphi$ se dobije koristeći bivektor $e_2e_1 = -e_1e_2$.

Promotrimo rotaciju

$$e^{-\frac{0.7\pi}{2}e_1e_2}ae^{\frac{0.7\pi}{2}e_1e_2}$$

i odgovarajuću matricu rotacije

$$\begin{pmatrix} -0.588 & -0.809 \\ 0.809 & -0.588 \end{pmatrix}.$$

Što možete reći o geometrijskoj interpretaciji, odnosno, što možete zaključiti samo gledajući matricu rotacije? Pokušajte napraviti matricu rotacije za proizvoljnu ravninu. Pokušajte sve ponoviti u 4D. Lakoća kojom se izvode rotacije u geometrijskoj algebri je dosad neviđena. Nema specijalnih slučajeva, nejasnih matrica, samo slijedimo jednostavnu primjenu rotora na bilo kakav multivektor. Mnogi preferiraju kvaternione, ali oni nemaju geometrijsku jasnoću. I limitirani su na 3D! Ako bi samo elegancija i snaga rotacija bila rezultat korištenja geometrijske algebre bilo bi vrijedno truda. Ali dobije se mnogo, mnogo više.

Primijetite da svaki rotor može biti faktoriziran na male rotacije

$$R = e^{I\varphi/2} = \underbrace{e^{I\varphi/2n}...e^{I\varphi/2n}}_{n} ,$$

koje možemo iskoristiti u praksi, primjerice, kod interpolacija.

Pogledajmo rotaciju vektora e_2 za mali kut u ravnini e_1e_2 (p. 8, p.9). Podsjetimo se definicije

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n ,$$

i konstruirajmo operator $1+\varepsilon e_1e_2$, ε je mali realan broj. Djelovanjem s lijeva dobijemo

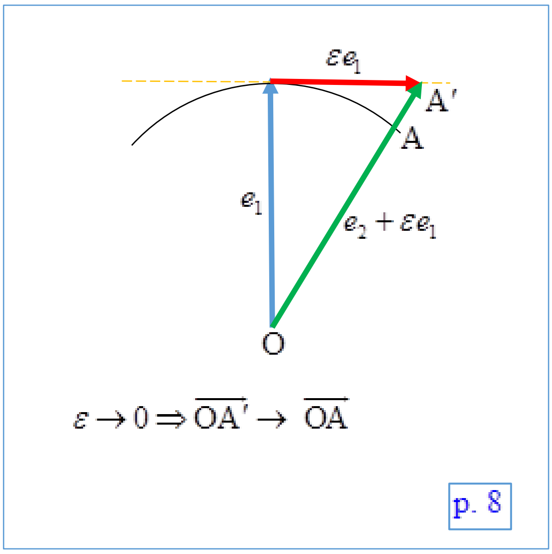
$$(1+\varepsilon e_1e_2)e_2 = e_2 + \varepsilon e_1 ,$$

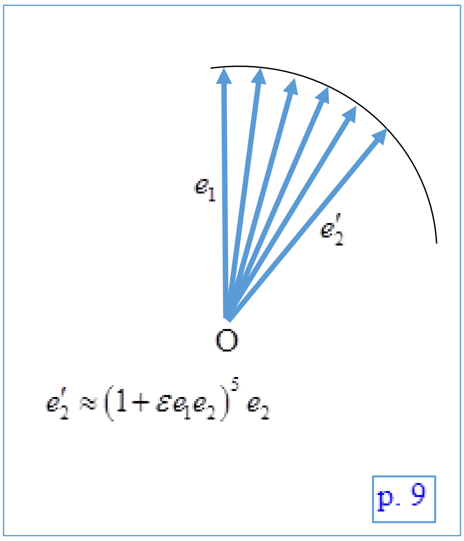
odnosno imamo malu rotaciju vektora e_2. Primijetite predznak od ε, za $\varepsilon < 0$ bismo imali pozitivnu rotaciju. Operator $1+\varepsilon e_1e_2$ rotira sve vektore u ravnini za isti kut, pa tako, uzastopnim djelovanjem na e_2 prvo dobijemo rotirani e_2, zatim rotirani novonastali vektor, itd (možemo zanemariti male promjene duljine vektora). Ovo opravdava definiciju eksponencijalne forme rotora: svaka rotacija je kompozicija velikog broja malih uzastopnih rotacija. Naravno, sve ovo je dobro definirano za beskonačno male rotacije, pa za bivektor B imamo

$$e^B = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{B}{n}\right)^n .$$

Primijetite (ili pokažite) da ovaj rotor neće promijeniti, primjerice, jedinični bivektor $\hat{B}$, pa je on invarijanta rotacije. Činjenica da bivektor može biti invarijanta direktno vodi na koncept *vlastitog lista* s realnim vlastitim vrijednostima, što je poopćavanje uobičajenog koncepta vlastitih vektora i vlastitih vrijednosti (pogledajte pod *linearne transformacije*).

Rotirajte bivektor e_1e_2 u ravnini razapetoj vektorima e_1 i e_2. Što primjećujete?



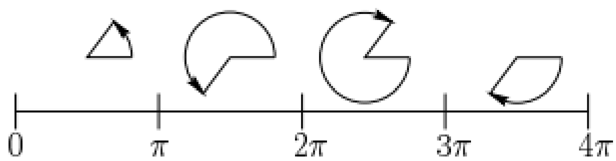


Rotacije su linearne, ortogonalne transformacije obično opisane matricama u linearnoj algebri. Da nađemo invarijante ovih transformacija proučavamo djelovanje matrica **samo** na vektore. Za matricu A (koja predstavlja linearnu transformaciju) tražimo vektore x takve da vrijedi $Ax = \lambda x$, što daje rješenja za svojstvene vrijednosti $\lambda \in \mathbb{C}$. Vidimo da u geometrijskoj algebri možemo naći invarijante kao bivektore (ili bilo koji *list*).Umjesto koncepta vlastitog vektora možemo uvesti koncept *vlastitog lista* (koji uključuje vlastite vektore). Ovo omogućuje reduciranje skupa vlastitih vrijednosti transformacije na skup realnih brojeva, dajući geometrijsko značenje konceptu vlastitih vrijednosti. Linearne transformacije će biti diskutirane kasnije u tekstu.

Rotor $-R$ ima isti efekt kao rotor R, ali smjer rotacije nije isti, primjerice, vektor e_1 može biti rotiran u $-e_2$ u smjeru kazaljke sata za $\pi/2$ u suprotnom smjeru za $3\pi/2$, pa vidimo da rotor jasno pokazuje smjer rotacije (pokušajte to s matricama!). Primjerice

$$-e^{I\varphi/2} = e^{-I\pi} e^{I\varphi/2} = e^{-I(2\pi-\varphi)/2},$$

predznak minus nestaje zbog "sendvič" forme. Za svaku rotaciju imamo dva moguća rotora (nađite što je *dvostruki pokrivač* grupe).



Primijetite da, zbog polovičnog kuta, rotor

$$e^{-\frac{\varphi}{2}\hat{B}} = \cos(\varphi/2) - \hat{B}\sin(\varphi/2)$$

ima periodičnost 4π umjesto 2π. Često za ovakve objekte koristimo naziv *jedinični spinor*. Geometrijska algebra je idealan okvir za proučavanje svih neobičnih svojstava rotacija, ali to bi ovdje uzelo previše prostora.

Primjer: Rotirajmo (pogledajte [18]) neki objekt u 3D oko e_1 za $\pi/2$, zatim oko e_2 za $\pi/2$, što dobijemo? Uradite to također koristeći matrice .

$$e^{je_1\pi/4}e^{je_2\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+je_1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+je_2\right)=\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}j\frac{e_1+e_2-e_3}{\sqrt{3}}=e^{j\boldsymbol{v}\pi/3},\quad \boldsymbol{v}=\frac{e_1+e_2-e_3}{\sqrt{3}},$$

pa imamo rotaciju za $2\pi/3$ oko vektora $\boldsymbol{v}$.

Pitanje: Kakvo je značenje relacije $e^{i\pi}=-1$? U 2D za $i=e_1e_2$ imamo ($\boldsymbol{v}$ je vektor u ravnini e_1e_2, možete uzeti $\boldsymbol{v}=e_1$ ako želite)

$$e^{i\pi/2}\boldsymbol{v}e^{-i\pi/2}=-\boldsymbol{v},$$

pa iskoristivši anti-komutativnost

$$e^{i\pi/2}\boldsymbol{v}e^{-i\pi/2}=e^{i\pi}\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v},$$

zatim množeći s $\boldsymbol{v}^{-1}$ s desna dobijemo jasno značenje. Rotor $e^{i\pi/2}$ prevodi vektor $\boldsymbol{v}$ u vektor $-\boldsymbol{v}$, tj. rotira ga za $-\pi$ (predznak ovdje nije važan). Naravno, prepoznajemo rotacijska svojstva imaginarne jedinice u kompleksnoj ravnini (unaprijed izabranoj), ali bivektor **definira** rotacijsku ravninu, pa bismo mogli napisati identičnu relaciju, bez promjena, u bilo kojoj dimenziji, u bilo kojoj ravnini. Zapravo, bivektor u eksponentu rotora bi mogao ovisiti o vremenu, formule i dalje vrijede, iako se rotacijska ravnina mijenja s bivektorom. Pokušajte to s “korijenom iz -1”.

Recimo da želimo naći rotor u 3D koji će transformirati ortonormalnu koordinatnu bazu e_i u ortonormalnu koordinatnu bazu f_i (pogledajte [18]). trebamo rotor sa svojstvom $f_i=Re_iR^\dagger$. Definirajmo $R=\alpha-\beta\hat{B}$, gdje je $\hat{B}$ jedinični bivektor, tada je $R^\dagger=\alpha+\beta\hat{B}$. Uočimo dvije jednostavne i korisne relacije u 3D

$$\sum_i e_i^2=3 \quad \text{i} \quad \sum_i e_i\hat{B}e_i=-\hat{B}$$

(dokažite ih). Sada slijedi

$$\sum_i e_iR^\dagger e_i=3\alpha-\beta\hat{B}=4\alpha-R^\dagger$$

i

$$\sum_i f_ie_i=\sum_i Re_iR^\dagger e_i=R\left(4\alpha-R^\dagger\right)=4\alpha R-1,$$

stoga je

$$R=\frac{1+\sum_i f_ie_i}{\left|1+\sum_i f_ie_i\right|}=\frac{A}{\sqrt{A\bar{A}}},\quad A=1+\sum_i f_ie_i.$$

Rotacija za π može biti razmatrana kao specijalan slučaj. Pokažite da rotor može biti izražen koristeći Eulerove kutove kao

$$e^{-e_{12}\phi/2}e^{-e_{23}\theta/2}e^{-e_{12}\psi/2}.$$

Komentirajmo povijesnu ulogu Hamiltona, koji je u 19. stoljeću našao sličan mehanizam za rotacije: *kvaternione*. Postoji veza između kvaterniona i formalizma opisanog ovdje, naime, kvaternioni mogu lako biti povezani s jediničnim bivektorima u *Cl*3. Međutim, kvaternioni su kao prošireni kompleksni brojevi, nemaju jasnu geometrijsku interpretaciju. Štoviše, postoje samo u 3D. (Hamilton je želio dati jediničnim kvaternionima geometrijsko značenje, pa ih je pokušavao tretirati kao jedinične vektore, što nije dalo očekivani rezultat, ali jedinični vektori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ nasljeđuju svoje oznake iz tih pokušaja.) Formalizam geometrijske algebre vrijedi u bilo kojoj dimenziji. Svaki račun koji izvodimo koristeći kvaternione može lako biti preveden na jezik geometrijske algebre, dok obrnuto ne vrijedi.

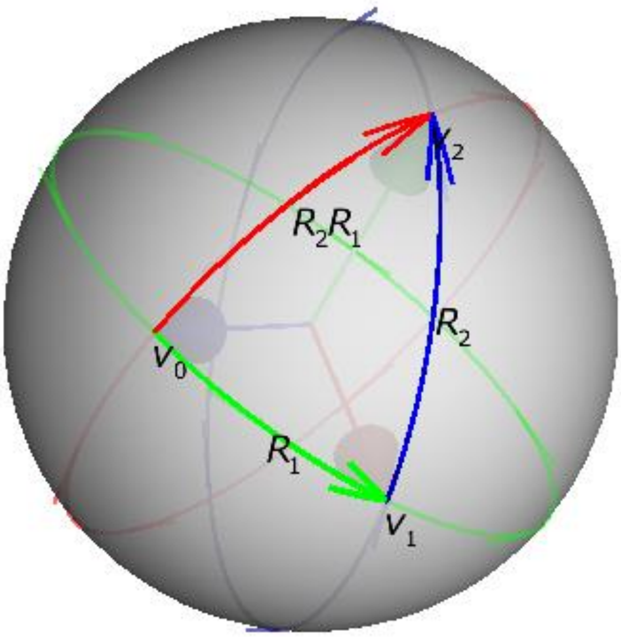
Međutim, kvaternioni se još uvijek uspješno koriste za izračun rotacija, primjerice, u računalima vojnih i svemirskih letjelica, kao i u robotici. Ako implementirate geometrijsku algebru na računalu kvaternioni nisu potrebni.

Jedinični kvaternioni imaju svojstvo $\boldsymbol{ijk} = -1$, dok njihovi kvadrati daju -1. Bilo je dovoljno uvesti objekte koji imaju kvadrate -1 i anti-komutiraju da se uspješno opišu rotacije u 3D. Čitatelj može provjeriti da zamjene $\boldsymbol{i} \to -e_{23}$, $\boldsymbol{j} \to e_{13}$, $\boldsymbol{k} \to -e_{12}$ generiraju tablicu množenja za kvaternione.

Svakako je dobro razumjeti da bivektor $-e_{12} = e_2 e_1$ ima jasnu geometrijsku interpretaciju, dok jedinični kvaternion $\boldsymbol{k}$ (slično kao imaginarna jedinica ili matrica) nema. Nažalost, koncept geometrijskih objekata kao što su bivektori je često neprihvaćen od tradicionalno orijentiranih ljudi.

Jednom kada znamo kako rotirati vektore možemo rotirati bilo koji element geometrijske algebre. Primijetite posebno lijepo svojstvo geometrijske algebre: objekti koji izvode transformacije ("operatori") su također elementi algebre. Pogledajmo rotaciju verzora

$$RabcR^\dagger = RaR^\dagger RbR^\dagger RcR^\dagger = \left(RaR^\dagger\right)\left(RbR^\dagger\right)\left(RcR^\dagger\right),$$

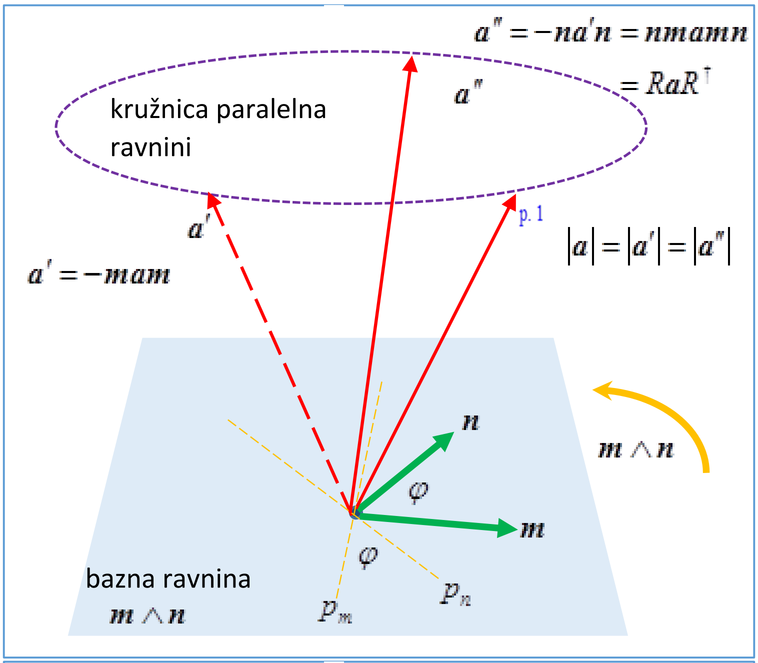


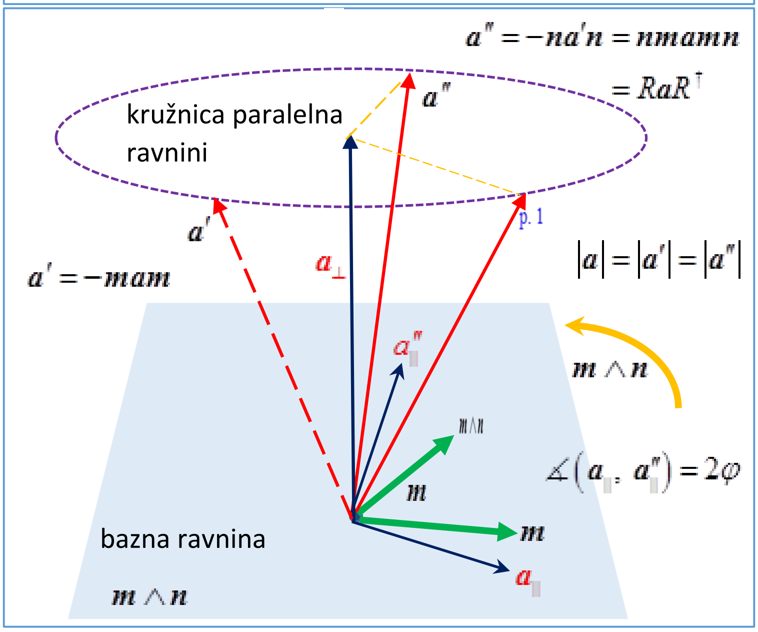
koja jasno pokazuje kako rotacija verzora može biti reducirana na rotacije individualnih vektora i obrnuto. Svaki multivektor je linearna kombinacija elemenata Cliffordove baze čiji elementi su jednostavni listovi, prema tome, oni su verzori. Vidimo da je naša posljednja tvrdnja uvijek istinita, zbog linearnosti transformacija. Čitatelju se preporuča da izvede rotacije različitih objekata u *Cl*3. Nađite na Internetu pojam *„gimbal lock"* (zabavan je, zaista).

Zanimljivo je promotriti jediničnu sferu u 3D i jedinične vektore s početkom u središtu sfere. Svaka rotacija jediničnog vektora definira luk nekoj glavnoj kružnici. Ovakvi lukovi, ako uzmemo u obzir njihovu orijentaciju, mogu postati vrsta vektora na sferi, a kompozicija dvije rotacije može biti svedena na zbrajanje (nekomutativno) ovakvih vektora. Pogledajte [4].

Uzmemo li proizvoljni element parnog dijela algebre (primjerice u 3D), ne samo rotore, uz rotacije dobijemo dodatni efekt: dilataciju, što je točno svojstvo *spinora*. Spinori su usko povezani s parnim dijelom algebre. Geometrijska algebra krije u sebi neobičnu količinu matematike koja je razgranata u različite discipline. Čudesno je kako redefinicija množenja vektora integrira mnoge različite grane matematike u jedinstven formalizam. Spinori, tenzori, Lie grupe i algebre, različiti teoremi integralnog i diferencijalnog računa su ujedinjeni, …, teorija relativnosti (specijalna i opća), kvantna mehanika, teorija kvantne informacije, … gotovo je teško za povjerovati. Mnogi kompleksni rezultati fizikalnih teorija ovdje postaju jednostavniji i dobivaju novo značenje. Maxwellove jednadžbe su svedene na tri slova, s mogućnošću invertiranja operatora deriviranja preko Greenovih funkcija, teški problemi u elektromagnetizmu postaju rješivi (pogledajte [2]), Keplerov problem se elegantno svede na problem harmonijskog oscilatora, Diracova teorija u *Cl*3 ili minimalni standardni model u *Cl*7 su lijepo formulirani ([34]), da ne nabrajamo dalje. Geometrijska algebra ima dobre šanse postati matematika budućnosti. Nažalost, teško se probija u tradicionalne sveučilišne (i posebno u srednjoškolske) programe.

Možete proučiti sljedeće slike kako bi bolje razumjeli rotacije.





- $\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}$ definira ravninu, smjer rotacije i kut rotacije
- $\boldsymbol{a}_{\perp}$ je invarijantan na rotaciju, samo je $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ rotiran za 2φ
- Ista slika vrijedi u bilo kojoj dimenziji (u dimenzijama većim od 3 postoji potprostor invarijantan na rotaciju).
- Nije teško dobiti bilo kakvu kompoziciju rotacija na isti način.
- Geometrijski produkt vektora nam daje mogućnost da izvodimo rotacije s lakoćom.

Kontrakcije

Definirali smo unutarnji produkt koji je za vektore jednak skalarnom množenju vektora. općenito, u geometrijskoj algebri definiramo različite pomoćne produkte koji snižavaju stupnjeve elemenata (vanjski produkt ih povećava). Pokazuje se da je najbolji izbor *lijeva kontrakcija*. Za vektore je to upravo unutarnji produkt, ali općenito omogućuje izbjegavanje različitih specijalnih slučajeva, kao, primjerice, unutarnji produkt vektora s realnim brojem. Ovdje ćemo spomenuti samo nekoliko svojstava lijeve kontrakcije, pogledajte [19] za više detalja. Ideja je da za bilo koja dva lista (uključujući realne brojeve) definiramo „skalarno“ množenje koje će općenito reducirati stupanj lista koji je s desne strane u produktu:

$$grade\left(A\rfloor B\right)=grade(B)-grade(A),$$

odakle odmah proizlazi da je lijeva kontrakcija nula za $grade(B)<grade(A)$. Za vektore imamo

$$a\rfloor b\equiv a\cdot b,$$

a općenito za listove vrijedi

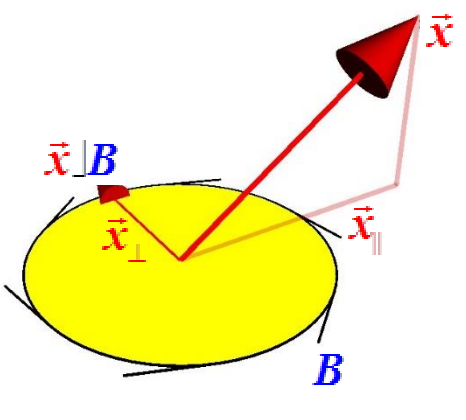
$$(A\wedge B)\rfloor C=A\rfloor\left(B\rfloor C\right).$$

Korisna relacija za vektore je

$$x\rfloor(a\wedge b)=(x\cdot a)b-(x\cdot b)a,$$

dok općenito možemo pisati za bilo koji multivektor

$$A\rfloor B=\sum_{k,l}\left\langle\langle A\rangle_k\langle B\rangle_l\right\rangle_{l-k},$$



The left contraction is zero for $\vec{x}\perp \boldsymbol{B}$.

gdje imamo geometrijske produkte između homogenih (istog stupnja) dijelova multivektora. Lijeva kontrakcija listova A i B ($A\rfloor B$) je potprostor u B ortogonalan na A. Ako je vektor x ortogonalan svim vektorima iz potprostora definiranog listom A tada je $x\rfloor A=0$. Lijeva kontrakcija nam može pomoći da definiramo kut između potprostora. Zbog općenitosti, jasne geometrijske interpretacije i prilagođenosti za rad na računalima (nema izuzetaka, pa *if* nisu potrebne) lijeva kontrakcija bi trebala korištena umjesto "običnog" unutarnjeg produkta. Možemo također definirati i desnu kontrakciju, međutim, zbog svojstava dualnosti, to nije neophodno potrebno.

Komutatori i ortogonalne transformacije

Definirajmo *komutator* kao novu vrstu produkta multivektora (ovdje koristimo znak $\otimes$ kako bismo izbjegli moguću zamjenu s vektorskim produktom)

$$A\otimes B\equiv(AB-BA)/2.$$

Ovaj produkt nije asocijativan, tj. $(A\otimes B)\otimes C\neq A\otimes(B\otimes C)$, ali vrijedi Jacobijev identitet

$$(A\otimes B)\otimes C+(C\otimes A)\otimes B+(B\otimes C)\otimes A=0.$$

Imamo (dokažite) općenite formule (A je bivektor, ne nužno list, X je multivektor, α je realni skalar, x je vektor)

$$\alpha X=\alpha\wedge X$$

$$xX=x\rfloor X+x\wedge X$$

$$AX = A\rfloor X + A\wedge X + A\otimes X\,.$$

Ovdje smo posebno zainteresirani za komutatore s bivektorom kao jednim od faktora. Naime, komutatori s bivektorom čuvaju stupanj multivektora (ako ne komutiraju s njim):

$$grade(B)=2 \Rightarrow grade(X\otimes B)=grade(X), \quad X\otimes B\neq 0\,.$$

Umjesto dokaza pogledajmo primjere. Za bivektor $B=e_1e_2$ vektor e_3 komutira s B, ali za vektor e_1 (stupanj 1) imamo

$$B\otimes e_1=(e_1e_2e_1-e_1e_1e_2)/2=-e_2\,,$$

opet stupanj 1. Pogledajmo razvoj u red

$$e^{-B/2}Xe^{B/2}=X+X\otimes B+(X\otimes B)\otimes B/2+((X\otimes B)\otimes B)\times B/3!\ +\ \dots\,,$$

pa ako uzmemo mali bivektor oblika $\varepsilon\hat{B},\quad \hat{B}^2=-1$, vidimo da je dovoljno zadržati samo dva člana

$$e^{-\varepsilon\hat{B}/2}Xe^{\varepsilon\hat{B}/2}\approx X+\varepsilon X\otimes\hat{B}\,.$$

Očuvanje stupnjeva je ovdje važno, zato što želimo, nakon transformacije, imati geometrijski objekt istog tipa. Posljednju transformaciju vidimo kao ortogonalnu transformaciju koja jedva mijenja početni multivektor. Ovdje treba spomenuti da tražimo ortogonalnu transformaciju povezanu s jediničnom transformacijom, što znači da ih možemo implementirati u malim koracima. Refleksije ne zadovoljavaju ovaj uvjet, ne možemo izvesti "malo refleksije“. Ovakve male transformacije nazivamo *perturbacijama*. Stoga, možemo zaključiti da male perturbacije elemenata geometrijske algebre trebamo izvoditi rotorima.

Primijetite da ortogonalne transformacije ne dozvoljavaju da jednostavno dodamo mali vektor δx na vektor x, ortogonalne transformacije moraju čuvati duljinu vektora. Stoga moramo imati uvjet $x\cdot\delta x=0$. Općenito, takav element (δx) geometrijske algebre ima oblik $\delta x=x\rfloor\delta B$, gdje je δB mali bivektor. Možemo to pokazati

$$x\cdot(x\rfloor\delta B)=x\rfloor(x\rfloor\delta B)=(x\wedge x)\rfloor\delta B=0\,.$$

Sada slijedi da je

$$\delta x=x\rfloor\delta B=(x\delta B-\delta Bx)/2=x\otimes\delta B\,,$$

pa imamo željeni oblik forme komutatora. Može izgledati da je ograničenje na rotacije previše strogo, izgleda kao da ne možemo uraditi jednostavnu translaciju vektora. Međutim, ovdje to samo znači da moramo naći način da opišemo translacije pomoću rotacija. To je moguće u geometrijskoj algebri, ali ovdje to nećemo pokazivati (pogledajte [19]).

Ovdje ćemo se zaustaviti, ali napomenimo da mali dio formalizma opisanog ovdje vodi na Lieve grupe i algebre. Može se pokazati da svaka konačna Lieva grupa ili algebra može direktno biti opisana u kontekstu geometrijske algebre. Beskonačan slučaj nije još apsolutno jasan, ali bi bilo neobično da rezultat bude drugačiji. Kako bilo, još jedan dio matematike se lijepo uklapa u geometrijsku algebru. Svatko tko ozbiljno proučava geometrijsku algebru je na početku vjerojatno iznenađen činjenicom da se različite grane matematike pokazuju u drugačijem svjetlu na jeziku geometrijskog množenja vektora, ali s vremenom se navikne i ne očekuje izuzetke. Teško se oteti pitanju kako bi naša znanost izgledala da je snaga ovog magičnog jezika matematike prepoznata i prihvaćena prije jednog stoljeća. A sve nam je bilo pod prstima.

Kompleksni brojevi

Pogledajmo vektor $\boldsymbol{r} = xe_1 + ye_2$ u 2D. Zbog postojanja inverza vrijedi

$$\boldsymbol{r} = e_1\left(x + ye_1e_2\right) = e_1\left(x + yi\right), \quad i = e_1e_2,$$

pa vidimo da smo dobili kompleksan broj $x + yi$, ali s ne-komutativnom "imaginarnom jedinicom". Prva stvar koju bi netko mogao prigovoriti je: *„Da, ali vaša imaginarna jedinica nije komutativna, a kvantna mehanika ne može biti formulirana bez imaginarne jedinice* …“. Odmah se vidi da "kritičar" komentira nešto o čemu malo zna, jer, prvo, kvantna mehanika „radi“ lijepo (čak bolje) s realnim brojevima, bez imaginarne jedinice, ali treba naučiti geometrijsku algebru, zatim formulaciju kvantne mehanike na jeziku geometrijske algebre … Ne samo da možemo bez imaginarne jedinice, već mnoge relacije poprimaju jasno geometrijsko značenje i tako omogućuju nove uvide u teoriju na jeziku geometrijske algebre. I drugo, ne-komutativnost našeg bivektora $i = e_1e_2$ zapravo postaje prednost, obogaćuje teoriju kompleksnih brojeva i, kao što ponavljamo dok ne postane dosadno, daje teoriji jasno geometrijsko značenje. Za naš kompleksni broj $z = e_1\boldsymbol{r}$ imamo (zbog anti-komutativnosti) $z^* = \boldsymbol{r}e_1$, pa vrijedi

$$zz^* = e_1\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}e_1 = r^2e_1e_1 = r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{ili}$$
$$z + z^* = e_1\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}e_1 = 2e_1 \cdot \boldsymbol{r} = 2x,$$
$$z - z^* = e_1\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}e_1 = 2e_1 \wedge \boldsymbol{r} = 2yi,$$

itd. Vidimo da se operacije na kompleksnim brojevima prenose na operacije u geometrijskoj algebri. Definirajmo operator deriviranja u 2D

$$\nabla f \equiv e_1\frac{\partial f}{\partial x} + e_2\frac{\partial f}{\partial y}$$

te uvedimo kompleksno polje $\psi\left(x, y\right) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$, $i = e_1e_2$. Jednostavan račun daje (uradite to) derivaciju polja

$$\nabla\psi = \nabla u + \nabla\left(iv\right) = \nabla u - i\nabla v,$$
$$\nabla\psi = e_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + e_2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Stoga, ako želimo da derivacija bude identički jednaka nuli (*analitičnost*), odmah slijede *Cauchy-Riemannove* jednadžbe (uvjeti). Primijetite kako anti-komutativnost jediničnih vektora daje točne predznake. Uvjet analitičnosti u geometrijskoj algebri ima jednostavan oblik $\nabla\psi = 0$ i odmah ga možemo poopćiti na više dimenzije. I da, ovo je baš pravi trenutak za zastati i razmisliti. Neka zagovornici tradicionalnog urade sve ovo koristeći samo komutativnu imaginarnu jedinicu. Zapravo je čudesno kako je ova stara, dobra imaginarna jedinica uradila toliko posla, obzirom na skromne mogućnosti! Ali, vrijeme joj je da malo odmori, neka bivektori, pseudoskalari ... odrade posao. Treba spomenuti, da ne bude zabune, izbor ravnine e_1e_2 je ovdje nevažan. Možemo uzeti bivektor kao $\left(e_1 + e_2\right)\left(e_1 - e_3\right)$, normalizirati ga i dobiti novu „imaginarnu jedinicu“, samo u novoj ravnini. Možemo to također uraditi u 4D i uzeti, primjerice, $i = e_3e_4$, sve formule će vrijediti. Ravnina e_1e_2 je samo jedna od beskonačno njih, ali geometrijski odnosi u svakoj od njih su isti. Možemo riješiti problem u ravnini

e_1e_2, a onda ga rotirati u ravninu koju želimo, imamo moćne rotore u geometrijskoj algebri. A kad kažemo „moćne“ tada to doslovce znači da ne moramo biti eksperti u matričnom računu, ovdje i malo napredniji učenik srednje škole može obaviti posao. Možemo rotirati bilo koji objekt, ne samo vektore. Linearna algebra je matematika vektora i operatora, geometrijska algebra je matematika potprostora i operacija na njima. Svatko tko se bavi matematikom bi trebao razumjeti koliko je ovo važno.

Pokazat ćemo kako možemo naći rješenja jednadžbe $\nabla\psi = 0$ koristeći razvoj u red po z. Primijetimo prvo jednostavnu relaciju

$$abc + bac = (ab + ba)c = 2a \cdot bc,$$

gdje unutarnji produkt ima prvenstvo. Operator ∇ se ponaša kao vektor (izrazi kao $\boldsymbol{r}\nabla$ su mogući, ali onda obično pišemo $\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\nabla}$, što ne označava vremensku derivaciju, već pokazuje element na koji se derivacija odnosi i daje željeni poredak u umnošcima jediničnih vektora), pa koristeći gornju relaciju dobijemo (veoma koristan račun)

$$\nabla z = \nabla(e_1\boldsymbol{r}) = 2e_1 \cdot \nabla\boldsymbol{r} - e_1\nabla\boldsymbol{r} = 2e_1 - 2e_1 = 0.$$

Sada vrijedi

$$\nabla(z - z_0)^n = n\nabla(e_1\boldsymbol{r} - z_0)(z - z_0)^{n-1} = 0,$$

što znači da Taylorov razvoj oko z_0 automatski daje analitičku funkciju. Još jednom, u bilo kojoj ravnini, u bilo kojoj dimenziji. Ne samo da geometrijska algebra sadrži cijelu teoriju funkcija kompleksne varijable (uključujući integralne teoreme, kao specijalan slučaj fundamentalnog teorema integralnog računa u GA), već je proširuje i poopćava na sve dimenzije. Nije li ovo čudo? A samo smo se pitali kako pomnožiti vektore. Ako još postoji potreba za rečenicom *„Da, ali ...“*, molim, možda se treba vratiti na početak teksta i vidjeti kako je sve počelo. Vrijeme geometrijske algebre će tek doći, nadati se. Era matrica i koordinata će završiti i biti zamijenjena erom sinergije algebre i intuitivno jasne geometrije. Studenti će učiti pino brže i biti superiorni današnjim "ekspertima". A kad naučimo računala da "misle" na ovom magičnom jeziku (zamislite računalo koje zna kako izvoditi operacije nad potprostorima) djeca će se moći igrati geometrijskim oblicima kao što sada igraju automobilske utrke ili druge računalne igre. Svojstva trokuta, kružnica, sfera i drugih oblike će se moću učiti kroz interaktivnu igru na računalima ili u virtualnoj stvarnosti. Jezik geometrijske algebre je dovoljno moćan da može "automatizirati" i sam proces dokazivanja teorema (tu ima još puno posla, ali mogućnosti su tu). Imamo razloga misliti da geometrijska algebra nije samo "još jedan formalizam", već da nudi mogućnost dubokog preispitivanja samog pojma broja.

Spinori

Pogledajmo elemente algebre koji u "sendvič" formi ne mijenjaju stupanj vektora (tj. vektor transformiraju u vektor). Među njima su transformacije koje rotiraju i skaliraju vektore, obično ih nazivamo *spinori*. Istražimo multivektore ψ sa svojstvom ($\boldsymbol{v}$ je vektor)

$$\psi\boldsymbol{v}\psi^\dagger = \rho R\boldsymbol{v}R^\dagger, \quad \rho \in \Re, \quad RR^\dagger = 1,$$

što je upravo rotacija vektora s dilatacijom. Ako definiramo $U \equiv R^\dagger\psi$, prethodna relacija postaje

$$U\boldsymbol{v}U^\dagger = \rho\boldsymbol{v},$$

pa treba naći element U. Pokažite da pseudoskalari iz neparne dimenzije komutiraju, a oni iz parne dimenzije anti-komutiraju s vektorima. Ostali stupnjevi ne posjeduju takvo opće svojstvo (realni brojevi uvijek komutiraju). Vidimo da element U inducira čistu dilataciju vektora $\boldsymbol{v}$, što je moguće ako komutira ili anti-komutira s $\boldsymbol{v}$, pa proizlazi da je element U općenito realni broj, ili pseudoskalar, ili njihov zbroj: $U = \lambda_1 + \lambda_2 I$. Sad, koristeći definiciju za U, dobijemo

$$U = \lambda_1^2 \boldsymbol{v} + \lambda_1 \lambda_2 \left(I\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}I^\dagger \right) + \lambda_2^2 I\boldsymbol{v}I^\dagger = \rho \boldsymbol{v} .$$

U *Cl*3 ($p = 3, \quad q = 0$), pseudoskalar $I = j$ komutira sa svim elementima algebre i reverz mu je $I^\dagger = -j$, srednji član nestaje i imamo

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \rho \Rightarrow \psi = R\left(\lambda_1 + j\lambda_2\right),$$

pa je lako provjeriti

$$\psi \boldsymbol{v} \psi^\dagger = R\left(\lambda_1 + j\lambda_2\right)\boldsymbol{v}\left(\lambda_1 - j\lambda_2\right)R^\dagger = \left(\lambda_1 + j\lambda_2\right)\left(\lambda_1 - j\lambda_2\right)R\boldsymbol{v}R^\dagger = \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)R\boldsymbol{v}R^\dagger = \rho R\boldsymbol{v}R^\dagger .$$

Općenito, primijetite da vrijedi

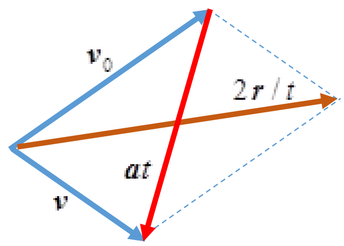
$$\boldsymbol{v}I^\dagger = \left(-1\right)^{n-1} I^\dagger \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}I^\dagger = \left(-1\right)^{(n-1)(n-2)/2} I\boldsymbol{v}, \quad II^\dagger = \left(-1\right)^q ,$$

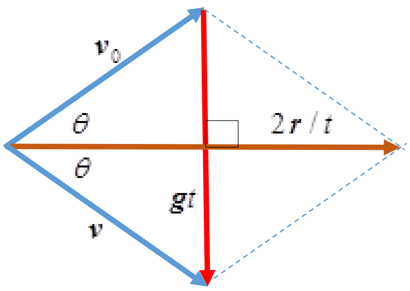
(dokažite to, barem za signature (3, 0) i (1, 3)) pa možemo naći rješenja (nađite ih) ovisna o parnosti broja $(n-1)(n-2)/2$.

Spinori u geometrijskoj algebri, kao i drugdje, mogu biti definirani kao (lijevi) ideali algebre, ali ovdje to nećemo pokazivati ([7]).

Malo "obične" fizike

Pogledajmo kako možemo riješiti kinematički problem sasvim općenito, koristeći jednostavan račun i intuitivno jasno. Razmotrimo problem jednoliko ubrzanog gibanja.





Problem se lako svodi na relacije

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t, \qquad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0 = 2\boldsymbol{r}/t,$$

gdje druga relacija definira vektor prosječne brzine $\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r}/t$, pa vrijedi

$$\left(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0\right)\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0\right) = 2\boldsymbol{r}\boldsymbol{a} \Rightarrow$$

$$v^2 - v_0^2 + \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_0 = v^2 - v_0^2 + 2\boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{v} = 2\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{a}\right),$$

gdje usporedbom skalarnog i bivektorskog dijela dobijemo

$$v^2 - v_0^2 = 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{a},$$

tj. zakon očuvanja energije i teorem o površini paralelograma. Za problem gibanja projektila ($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}$) vrijedi (slika desno)

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{g}=0\Rightarrow v^2=v_0^2\Rightarrow\left|\boldsymbol{v}_0\wedge\boldsymbol{v}\right|=v_0^2\sin(2\theta)=\left|\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{g}\right|=rg\Rightarrow$$

$$r=\frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

što je poznata formula za domet. Primijetite kako svojstva geometrijskog produkta vode na jednostavne manipulacije. Kao drugi primjer možemo uzeti Keplerov problem (vidjeti kasnije u tekstu). Odmah nakon postavljanja problema, nakon nekoliko linija, dobijemo netrivijalne zaključke koje u udžbenicima obično ostavljaju za kraj kao teži dio. Ideja je da probleme rješavamo bez koordinata. Nažalost, istraživanja pokazuju ([21]) da mnogi studenti fizike vide vektore uglavnom kao nizove brojeva (koordinata), što je pomalo tužna slika obrazovnih sustava, bez obzira na mjesto na planetu. Veza linearne algebre i geometrije je obično sasvim zanemarena. S geometrijskim produktom algebra i geometrija idu ruku pod ruku. Umjesto tretiranja samo vektora kao ključnih elemenata algebre imamo cijelu paletu objekata koji nisu vektori, ali imaju jasnu ulogu i geometrijsko značenje. ovdje računamo s potprostorima! U bilo kojoj dimenziji. To je nemoguće postići samo manipuliranjem koordinatama. Naglasimo, nemoguće! Ruski fizičar Landau, slavan po matematičkim vještinama, nekako završi u Staljinovom zatvoru, a nakon putanja na slobodu reče da mu je zatvor bio dobrodošao, naučio je izvoditi tenzorski račun "napamet". Fizičari budućnosti će biti vještiji nego Landau, koristit će linearne transformacije u geometrijskoj algebri umjesto tenzorskog računa. Računat će brže, neovisno o dimenziji prostora, bez koordinata i s jasnom geometrijskom slikom na svakom koraku. Landau je također bio poznat po načinu kako je primao studente. Rekao bi mladom kandidatu: "Evo, riješi integral." Mnogi nisu uspjeli. U geometrijskoj algebri postoji teorem (fundamentalni teorem integralnog računa) o integriranju koji objedinjuje sve poznate integralne teoreme korištene u fizici, uključujuću kompleksno područje. Zamislimo, Landau bi bio jako iznenađen! On je bio tipični predstavnik matematike 20. stoljeća, iako je u njegovo vrijeme već postojala nova matematika. Postojala je, ali gotovo potpuno zanemarena i zaboravljena. Dio cijene koju smo zbog toga plaćali (i još plaćamo) je ponovno otkrivanje onog što je zanemareno i zaboravljeno. Pauli je otkrio svoje matrice – nastavili smo koristiti matrice. Često se kaže da je geometrijska algebra ne-komutativna i da to obeshrabruje ljude. A što je s matricama? ne samo da se ne-komutativne, potpuno su neintuitivne. Onda je Dirac otkrio svoje matrice, idealne za geometrijsku algebru. Naravno, nastavilo se s matricama. A mnogi autori su, u različitim prilikama, ponovo otkrivali spinore, čak im dajući različita imena. Cijela zbrka. Izradom brzih letjelica opremljenih računalima otkrili smo kako postoje problemi u radu s matricama. Počeli smo koristiti kvaternione, što je donekle popravilo stvari. Možemo naći mnogo drugih indikacija, a na kraju postaje očigledno da mnogi problemi jednostavno nestaju kada uvedemo geometrijsko množenje vektora, umjesto Gibbsovog. Unatoč svemu, jedan od značajnih autora u području geometrijske algebre, Garret Sobczyk, je napisao u e-mail poruci:

„Iznenađen sam da, nakon 45 godina rada u ovom području, ono još uvijek nije šire poznato i prihvaćeno u znanstvenoj zajednici. A ja mislim da zaslužuje opće prepoznavanje ... Zaista je šteta da je Clifford umro tako mlad, možda bi stvari danas izgledale drugačije."

Riječi i rečenice

Pogledajmo, samo kao ilustraciju, kako „riječi" u geometrijskoj algebri mogu imati geometrijski sadržaj. Primjerice, „riječ" ***abba*** (uz $ab=S+A$, simetrični i anti-simetrični dio produkta):

$$\boldsymbol{abba}=a^2b^2=(S+A)(S-A)=S^2-A^2=S^2+|A|^2=$$
$$a^2b^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)$$

i imamo dobro poznati trigonometrijski identitet. Ovo je, naravno, samo igra, ali u geometrijskoj algebri je važno razviti intuiciju o geometrijskom sadržaju izraza. Zbog svojstava geometrijskog produkta se struktura izraza brzo pronalazi, kao za veze među potprostorima, pripadnost potprostoru, ortogonalnost, paralelnost, itd.

Usporedimo izloženo s matričnim pristupom. Vidjeli smo da u 3D možemo vektore predstaviti Paulijevim matricama. Pokušajte zamisliti da toga nismo svjesni, ali da poznajemo Paulijeve matrice (iz kvantne mehanike). Mogli bismo napisati riječ ***abba*** na jeziku matrica, mogli bismo rastaviti matrice na simetrični i anti-simetrični dio (to je uobičajeni), ali pokušajte izvući sinus i kosinus i njihovu povezanost. Ako uspijete (moguće je), kako ćete interpretirati kut? I još važnije, kako uopće doći na ideju da se traži kut, samo gledajući u matrice? To je općenito teško, ali s vektorima postaje prirodno i direktno. To je glavna ideja: **jezik matrica skriva važan geometrijski sadržaj**. Istina, fizičari znaju da Paulijeve matrice imaju veze s orijentacijom spina, ali općenito, problem geometrijske interpretacije i dalje ostaje. Uzmimo još jedan primjer. Uzmimo jedinične vektore $m=\left(e_1+e_2\right)/\sqrt{2}$ i $n=\left(e_2+e_3\right)/\sqrt{2}$ u 3D. Nije teško zamisliti ih ili nacrtati, postoji ravnina koju razapinju i bivektor $m\wedge n$ u njoj (bivektor definira tu ravninu). Zamislimo sada da koristimo Paulijeve matrice, ali, kao ranije, bez svijesti da one predstavljaju vektore u 3D (to zapravo ne možemo ni znati ako ne prihvatimo geometrijsko množenje vektora). Netko bi mogao proučavati linearne kombinacije Paulijevih matrica, čak doći na ideju da pogleda anti-simetrični dio produkta matrica, kao $\left(\hat{\sigma}_m\hat{\sigma}_n-\hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_m\right)/2$, gdje je $\hat{\sigma}_m=\left(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2\right)/\sqrt{2}$ i $\hat{\sigma}_n=\left(\hat{\sigma}_2+\hat{\sigma}_3\right)/\sqrt{2}$. Možemo ovo izračunati, pa onda usporediti račun s matricama i jednostavan račun vanjskog produkta (u stvari, nema potrebe računati vanjski produkt, imamo geometrijsku sliku bez napora). Svejedno, bivektor je proporcionalan sa

$$m\wedge n\sim\left(e_1+e_2\right)\wedge\left(e_2+e_3\right)=e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3\,.$$

Na sreću, računalo može pomoći s matricama (vidite problem?), anti-simetrični dio matričnog produkta je proporcionalan sa

$$\begin{pmatrix} i & -1+i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}.$$

Kako sada, bez povezanosti s vektorima u 3D, interpretirati ovu matricu kao ravninu? Ili naći kut između - čega? Lako je prevesti formule iz *Cl*3 na jezik Paulijevih matrica, ali iz matrica u vektore – to može biti zahtjevno, naročito za elemente viših stupnjeva, ili općenitih multivektora. **Jezik matrica zamagljuje geometrijski sadržaj**! U kvantnoj mehanici s Paulijevim matricama trebamo imaginarnu jedinicu, pa ljudi govore kako je imaginarna jedinica neophodna za formulaciju teorija subatomskog svijeta. Ovo često vodi na filozofske rasprave i pitanja o „stvarnoj prirodi“ svijeta u kojem živimo. Na jeziku geometrijske algebre **imaginarna jedinica apsolutno nije nužna**, kvantna mehanika može biti lijepo i elegantno formulirana koristeći samo realne brojeve, uz pomoć geometrijske intuicije koja nam je svojstvena. Osim realnih brojeva, kompleksni brojevi i kvaternioni su od interesa u QM, ali sada je jasno, svi oni su prirodno sadržani u *Cl*3, što je objašnjeno u ovom tekstu. U članku [1], autor komentira: “… *umjesto da budu različite alternative, realna, kompleksna i kvaternionska kvantna mehanika su tri aspekta jedinstvene objedinjene strukture*.” U članku su i korisne napomene o *Frobenius–Schur indikatoru*. Istina, nema geometrijske algebre u citiranom članku, iako stoji pojam “*division algebra*” u naslovu. Umjesto komentara, navedimo riječi iz [28]

“*Geometrijska algebra je, zapravo, najveća moguća asocijativna djeliteljska (division) algebra koja objedinjuje sve algebarske sustave (algebru kompleksnih brojeva, vektorsku algebru, matričnu algebru, kvaternionsku algebru, itd.) u koherentan matematički jezik koji uvećava moćnu geometrijsku intuiciju ljudskog uma uz preciznost algebarskog sustava*.” Iskreno, djeliteljska algebra ili ne – gotovo je nevažno. **Geometrijska algebra objedinjuje i efektna je!**

Linearne transformacije

Često nas zanimaju transformacije elemenata algebre (primjerice, vektora, bivektora, ...) u druge elemente u istom prostoru. Među njima su sigurna najvažnije linearne transformacije. Pogledajmo linearnu transformaciju F koja prevodi vektore u vektore, sa svojstvom

$$\mathrm{F}(\alpha a+\beta b)=\alpha\mathrm{F}(a)+\beta\mathrm{F}(b),\quad \alpha,\ \beta\in\Re .$$

Možemo zamisliti da je rezultat takve transformacije, primjerice, rotacija vektora s dilatacijom. Za tako jednostavnu sliku ne trebamo komponente vektora. Drugi primjer mogu biti čiste rotacije:

$$\mathrm{F}(a)=\mathrm{R}(a)\equiv RaR^{\dagger}.$$

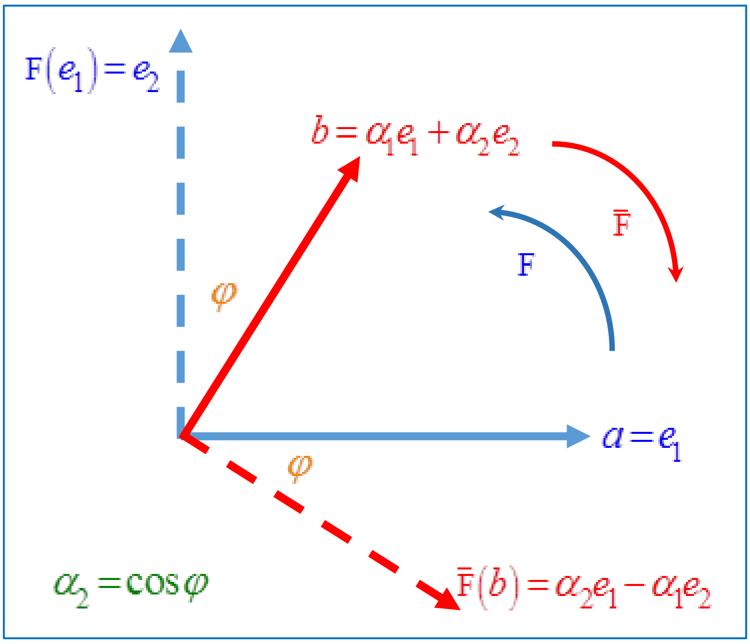
Vidjeli smo da je efekt rotacije lista isti kao rotacija svakog vektora u listu, pa zahtijevamo da sve naše linearne transformacije imaju takvo svojstvo, što znači

$$\mathrm{F}(a\wedge b)=\mathrm{F}(a)\wedge\mathrm{F}(b).$$

Linearna transformacija djelujući na vektor daje vektor, pa vidimo da je forma vanjskog produkta sačuvana. Takve transformacije imaju specijalno ime: *outermorfizmi*. Djelovanje dvije uzastopne transformacije može biti napisano kao $\mathrm{F}(\mathrm{G}(a))\equiv\mathrm{FG}a$, što je zgodno za manipulaciju izrazima.

Ako za linearnu transformaciju $\mathrm{F}:V\to\mathrm{W}$ postoji odgovarajuća linearna transformacija $\overline{\mathrm{F}}:W\to V$, nazivat ćemo je *transponiranom transformacijom* (*adjoint*). Ovdje ćemo se ograničiti na transformacije $\mathrm{F}:V\to V$. Kažemo da su transformacije transponirane jer uvijek možemo naći matričnu reprezentaciju transformacija u nekoj zgodnoj bazi i vidjeti da je matrica za $\overline{\mathrm{F}}$ upravo transponirana matrica za F (pogledajte [22]). Implicitna definicija transponirane transformacije može biti (ima i drugih)

$$\mathrm{a}\cdot\overline{\mathrm{F}}(b)=\mathrm{F}(a)\cdot b,$$



za bilo koja dva vektora a i b. Ilustrirat ćemo ovo jednostavnim primjerom. Neka je $a=e_1$, $b=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$ i zamislimo da F rotira vektore za $\pi/2$ u ravnini e_1e_2. Tada vrijedi $\mathrm{F}(a)=ae_1e_2$, primjerice, $\mathrm{F}(e_1)=e_1e_1e_2=e_2$. Ovo daje

$$\begin{gathered}\mathrm{F}(e_1)\cdot(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2)=\\ e_2\cdot(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2)=\alpha_2\end{gathered}.$$

Prema slici vidimo da naša linearna transformacija prevodi vektor $a=e_1$ u $\mathrm{F}(e_1)=e_2$ i unutarnji produkt daje $\alpha_2=\cos\varphi$. Ali jasno je da možemo uzeti vektor b, rotirati ga pa će unutarnji produkt s vektorom

$a = e_1$ dati isti rezultat. Prema tome, transponirana linearna transformacija je jednostavno rotacija za $-\pi/2$ u ravnini e_1e_2 (za općenitiji rezultat o rotacijama vidjeti ispod). Sada imamo

$$\overline{\mathrm{F}}(b) = e_1e_2b,$$
$$\overline{\mathrm{F}}(b) = e_1e_2(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2) = \alpha_2e_1 - \alpha_1e_2.$$

Definirajmo sada recipročne bazne vektore e^i sa svojstvom

$$e^i \cdot e_j = \delta_{ij}.$$

Ovdje koristimo ortonormalne baze pozitivne signature, pa vrijedi

$$e^i = e_j \Rightarrow e^i \cdot e_j = e^ie_j = \delta_{ij},$$

a definicija je motivirana dvjema činjenicama: prvo, želimo koristiti Einsteinovo pravilo sumiranja

$$e^ie_i \equiv \sum_{i=1}^{n} e^ie_i,$$

a drugo, želimo mogućnost jednostavnog poopćavanja. Eksplicitnu formu transformacije možemo naći koristeći ortonormalnu bazu

$$e_i \cdot \overline{\mathrm{F}}(a) = \mathrm{F}(e_i) \cdot a,$$

pa imamo

$$\overline{\mathrm{F}}(a) = e^ia \cdot \mathrm{F}(e_i),$$

gdje se sumiranje podrazumijeva i unutarnji produkt ima prioritet. Oznaka $\overline{\mathrm{F}}$ nije uobičajena, koristi se F^{T} ili $\mathrm{F}^{\dagger}$, ali ponekad koristimo oznaku $\underline{\mathrm{F}}$ za linearnu transformaciju, pa se pojavljuju lijepe simetrije u izrazima ako koristimo oznaku $\overline{\mathrm{F}}$. Nadalje, $\overline{\mathrm{F}}(a)$ nije matrica ili tenzor, pa ova oznaka naglašava razliku. ne može biti zabune s Cliffordovom konjugacijom u tekstu, mi dosljedno koristimo format *italic* za multivektore. Za transponiranu transformaciju od "produkta" transformacija vrijedi

$$\overline{\mathrm{FG}}(a) = \overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{F}}(a),$$

(vidjeti literaturu). Transformacije sa svojstvom $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}$ su *simetrične*. Važne simetrične transformacije su $\overline{\mathrm{F}}\mathrm{F}$ i $\mathrm{F}\overline{\mathrm{F}}$ (pokažite to).

Neka je I jedinični pseudoskalar. Determinanta linearne transformacije je definirana kao

$$\mathrm{F}(I) \equiv I \det \mathrm{F}, \quad \det \mathrm{F} \in \Re.$$

Ova definicija potpuno u skladu s uobičajenom definicijom. Primijetite da ova relacija izgleda kao relacija za svojstvenu vrijednost operatora. To je, u stvari, točno, pseudoskalar je invarijantni svojstveni list (*eigenblade*), a determinanta je realna svojstvena vrijednost (*eigenvalue*). Primjer je 3D rotacija

$$\mathrm{R}(j) = RjR^{\dagger} = jRR^{\dagger} \Rightarrow \det \mathrm{R} = RR^{\dagger} = 1, \quad j = e_{123},$$

što smo očekivali za rotore (kao i za matrice rotacije, ortogonalna transformacija). Još jednom, primijetite snagu formalizma: bez komponenata, bez matrica, jednostavnim manipulacijama, dobili smo važan rezultat. Pseudoskalar predstavlja orijentirani volumen, pa je linearna transformacija pseudoskalara jednostavno svedena na množenje realnim brojem. Determinanta transponirane transformacije je

$$\mathrm{F}(I) = I\det\mathrm{F} \Rightarrow$$
$$\det\mathrm{F} = \mathrm{F}(I)I^{-1} = \left\langle \mathrm{F}(I)I^{-1} \right\rangle = \left\langle I\overline{\mathrm{F}}\left(I^{-1}\right) \right\rangle = \det\overline{\mathrm{F}},$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je determinanta realan broj, pa ima stupanj nula. Za kompoziciju transformacija vrijedi

$$(\mathrm{FG})(I) = \mathrm{FG}(I) = \mathrm{F}(I\det\mathrm{G}) = (\det\mathrm{G})\mathrm{F}(I) = I\det\mathrm{F}\det\mathrm{G}\,,$$

što je poznato pravilo za determinante, ali sjetimo se koliko napora treba da se to dokaže u teoriji matrica. Ovdje je dokaz gotovo trivijalan. Početniku treba dosta vremena da postane vješt s matricama, a na kraju dobije alat s kojim ne može efektno izaći na kraj čak ni s rotacijama. To vrijeme je bolje upotrijebiti da se nauče osnove geometrijske algebre i tako dobije moćan alat za mnoge grane matematike. A geometrijska algebra je danas, zahvaljujući Grassmannu, Cliffordu, Artinu, Hestenesu, Sobczyku, Baylisu i mnogim drugim pametnim i vrijednim ljudima (pogledajte detaljniju listu na kraju teksta) postala dobro razvijena teorija, s primjenama u mnogim područjima matematike, fizike, tehnike, biologije, proučavanja moždanih funkcija, računalne grafike, robotike, itd.

Pokazat ćemo bez dokaza (čitatelj se može potruditi) nekoliko korisnih relacija. Za bivektore vrijedi

$$B_1 \cdot \overline{\mathrm{F}}(B_2) = \mathrm{F}(B_1) \cdot B_2 \,.$$

Ovo može biti prošireno na proizvoljne multivektore kao

$$\left\langle A\overline{\mathrm{F}}(B) \right\rangle = \left\langle \mathrm{F}(A)B \right\rangle.$$

Definirajmo inverz linearne transformacije. Za multivektor M vrijedi

$$IM\det\mathrm{F}{=}\mathrm{F}(I)M = \mathrm{F}\left(I\overline{\mathrm{F}}(M)\right),$$

gdje smo iskoristili činjenicu da unutarnji produkt sa pseudoskalarom možemo zamijeniti geometrijskim produktom, naime, nema dodatnih stupnjeva u geometrijskom produktu (pokažite to). Uzmemo li multivektor $A = IM$ dobit ćemo

$$A\det\mathrm{F}{=}\mathrm{F}\left(I\overline{\mathrm{F}}\left(I^{-1}A\right)\right),$$

a slična relacija može biti napisana za $\overline{\mathrm{F}}$. Slijedi

$$\mathrm{F}^{-1}(A){=}I\overline{\mathrm{F}}\left(I^{-1}A\right)(\det\mathrm{F})^{-1},$$
$$\overline{\mathrm{F}}^{-1}(A){=}I\mathrm{F}\left(I^{-1}A\right)(\det\mathrm{F})^{-1}.$$

Za rotore u *Cl*3 vrijedi $\mathrm{R}(a) = RaR^\dagger$, pa primijenjeno na proizvoljni multivektor daje $\mathrm{R}(M) = RMR^\dagger$ i $\overline{\mathrm{R}}(M) = R^\dagger MR$ te koristeći $\det\mathrm{R}{=}1$

$$\mathrm{R}^{-1}(M) = jR^\dagger j^{-1}MR = R^\dagger MR = \overline{\mathrm{R}}(M),$$

tj. inverz rotacije je jednak transponiranoj rotaciji. Ovo je u biti definicija svake ortogonalne transformacije (transformacije s determinantom ± 1). Za lijepe primjere pogledajte [18].

Svojstveni vektori i svojstveni listovi

Koncept svojstvenih vrijednosti bi trebao biti poznat čitatelju. Ukratko, za operator (matricu) m definiramo svojstvene vrijednosti λ_i i svojstvene vektore v_i kao

$$mv_i = \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

U geometrijskoj algebri kažemo da linearna transformacija (funkcija) ima svojstveni vektor e i svojstvenu vrijednost $\lambda \in \Re$ ako vrijedi

$$\mathrm{F}(e) = \lambda e,$$

što povlači

$$\det(\mathrm{F} - \lambda I) = 0,$$

pa imamo polinomsku jednadžbu (*sekularna jednadžba*). Općenito, sekularna jednadžba ima korijene u kompleksnom polju, ali mi imamo algebru nad poljem realnih brojeva i nije poželjno širiti se u kompleksno područje. Primjerice, kako interpretirati produkt $\sqrt{-1}e_1$, koji nije element algebre. Srećom, to nije potrebno u geometrijskoj algebri, jer možemo pridati potpuno novo značenje kompleksnim rješenjima. U tu svrhu uvodimo pojam *svojstvenog lista (eigenblade)*. Naime, vektori su elementi algebre stupnja 1, ali imamo stupnjeve 2, 3, … u geometrijskoj algebri, koji nisu definirani u običnoj teoriji vektorskih prostora. Zato je prirodno proširiti definiciju svojstvenih vrijednosti druge elemente algebre. Za list B_r sa stupnjem r definiramo

$$\mathrm{F}(B_r) = \lambda B_r, \quad \lambda \in \Re.$$

Zapravo, već smo vidjeli takve relacije, primjerice, za $B_r = I$ imamo svojstvenu vrijednost $\det \mathrm{F}$, zbog $\mathrm{F}(I) = I \det \mathrm{F}$. Prema tome, pseudoskalari su svojstveni listovi linearnih transformacija. Kako bismo bolje razumjeli pojam svojstvenog lista pogledajmo sljedeći primjer (pogledajte [18]). Definirajmo linearnu funkciju sa svojstvima

$$\mathrm{F}(e_1) = e_2, \quad \mathrm{F}(e_2) = -e_1,$$

(prepoznajete rotaciju?) pa nije teško naći rješenje koristeći matrice. Matrica transformacije je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sa svojstvenim vrijednostima $\pm i$, $i = \sqrt{-1}$ i svojstvenim vektorima $e_1 \pm ie_2$ (iskoristite sekularnu jednadžbu i pokažite ovo). U geometrijskoj algebri, za list $e_1 \wedge e_2$ imamo (primijetite eleganciju)

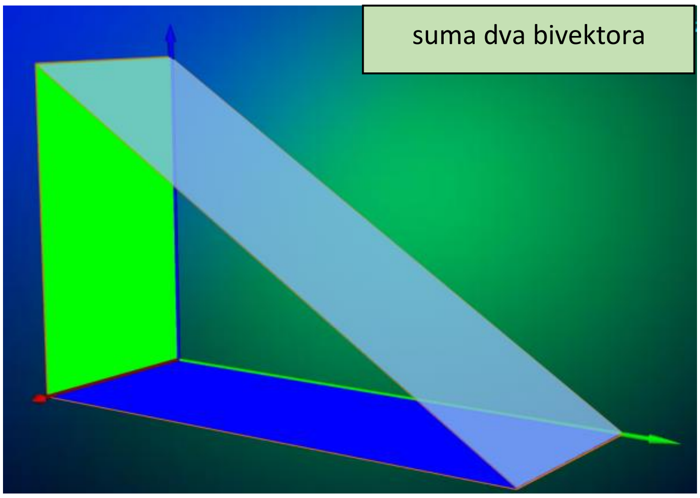
$$\mathrm{F}(e_1 \wedge e_2) = \mathrm{F}(e_1) \wedge \mathrm{F}(e_2) = e_2 \wedge (-e_1) = e_1 \wedge e_2,$$

pa je list $e_1 \wedge e_2$ svojstveni list s (realnom) svojstvenom vrijednošću 1. Naš list je invarijanta transformacije, ali to već znamo iz formalizma rotora! Nema potrebe za imaginarnom jedinicom, imamo naš list. Primijetite da se vektori u ravnini definiranoj s $e_1 \wedge e_2$ mijenjaju transformacijom, jedinični bivektor se ne mijenja. Vidimo jednostavnu matematiku i važan rezultat. Standardnom metodom, koristeći matrice, uopće nema listova. Zašto? Jednostavno, ne postoji geometrijski produkt. Stoga, pokušajte naći ovakve rezultate koristeći matrice. Svi oni koji vole komentirati geometrijsku algebru rečenicama kao *„Da, ali imaginarna jedinca u kvantnoj mehanici…“* bi trebali razmisliti dvaput o ovom jednostavnom primjeru, pa ako dođu opet do zaključka kako *„to nema smisla…“*, dakle, što reći? Razmislite opet. Ovo je pitanje našeg razumijevanja samog pojma broja. Vjerojatno su nas

Grassmann i Clifford usmjerili dobro i njihovo vrijeme tek dolazi. Ako su vektori ortonormirane baze e_i i e_j svojstveni vektori linearne transformacije F, vrijedi $e_i \cdot \mathrm{F}(e_j) = e_i \cdot (\lambda_j e_j) = \lambda_j e_i \cdot e_j$.

Primijenite prethodne relacije na simetrične linearne transformacije i pokažite da njihovi svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima moraju biti ortogonalni.

Euklidska 3D geometrijska algebra ($Cl3$)



Općenito, multivektor u $Cl3$ može biti zapisan kao

$$M = t + \boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n} + bj, \quad t, b \in \Re, \quad j = e_1e_2e_3,$$

gdje za trodimenzionalne vektore ovdje koristimo **bold** format. Već smo vidjeli da jedinični pseudoskalar j komutira sa svim elementima algebre i ima kvadrat -1,to ga čini idealnom zamjenom za imaginarnu jedinicu (postoji beskonačno "imaginarnih jedinica" u GA). Pseudoskalar s takvim svojstvima se ponovo pojavljuje u $Cl7$, $Cl11$, … Ovdje ćemo često koristiti veoma koristan oblik multivektora:

$$M = Z + \boldsymbol{F}, \quad Z = t + bj, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n}.$$

Element Z očigledno komutira sa svim elementima algebre (kažemo da pripada *centru algebre*). Ovo svojstvo ga čini *kompleksnim skalarom*. Kompleksni skalar se zaista ponaša kao kompleksni broj, što ćemo vidjeti dalje u tekstu. To je razlog da pišemo $Z \in \mathbb{C}$, premda, očigledno, moramo promijeniti značenje simbola $\mathbb{C}$, tj. zamjenjujemo običnu imaginarnu jedinicu pseudoskalarom. Element $\boldsymbol{F}$ je *kompleksni vektor*, s *realnim vektorima* kao komponentama. Izbor oznake ($\boldsymbol{F}$), kao i za kompleksne skalare, nije slučajan, naime, izabran je zbog kompleksne prirode spoja električnog i magnetskog polja u $Cl3$. Ovdje, kada kažemo "realan", mislimo na realni skalar, ili 3D vektor, ili njihovu linearnu kombinaciju. Kada realni element pomnožimo pseudoskalarom j dobijemo imaginarni element, stoga, suma realnog i imaginarnog elementa daje kompleksni element. Primjerice, $\boldsymbol{x}$ (*vektor*) je realan, $t + \boldsymbol{x}$ (*paravektor*) je realan, $t + j\boldsymbol{n}$ (*spinor*) je kompleksan, $j\boldsymbol{n}$ (*bivektor*) je imaginaran, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n}$ (*kompleksni vektor*) je kompleksan, itd. Primijetite da multivektor može biti zapisan kao

$$M = t + \boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n} + bj = t + \boldsymbol{x} + j(b + \boldsymbol{n}),$$

stoga je kompleksan broj, s realnim komponentama (*paravektori*). Iskoristite involuciju (koju?) da izdvojite realni (imaginarni) dio multivektora. Što je sa Z i $\boldsymbol{F}$? Ili $t + j\boldsymbol{n}$?

Čitatelju preporučamo da napiše sve tri opisane involucije u ovom novom obliku . Možete koristiti i kompleksnu konjugaciju. Kao primjer pogledajmo Cliffordovu involuciju (tj. *Cliffordovu konjugaciju, glavnu involuciju*) $\bar{M} = Z - \boldsymbol{F}$

$$\left(M + \bar{M}\right)/2 = Z \equiv \langle M \rangle_S, \quad \text{(skalarni dio)}$$

$$\left(M - \bar{M}\right)/2 = \boldsymbol{F} \equiv \langle M \rangle_V \quad \text{(vektorski dio).}$$

Zbog komutativnosti kompleksnog skalara Z vrijedi

$$M\bar{M} = (Z+\boldsymbol{F})(Z-\boldsymbol{F}) = Z^2 - \boldsymbol{F}^2 = (Z-\boldsymbol{F})(Z+\boldsymbol{F}) = \bar{M}M ,$$

gdje je

$$Z^2 = t^2 - b^2 + 2tbj , \quad \boldsymbol{F}^2 = x^2 - n^2 + j(\boldsymbol{xn} + \boldsymbol{nx}) = x^2 - n^2 + 2j\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n} .$$

Ovdje imamo rezultat za zapamtiti: kvadrat kompleksnog vektora je kompleksni skalar. Ovo znači da je element $M\bar{M}$ kompleksni skalar. Može se pokazati da je $M\bar{M}$ **jedini** element oblika $M\breve{M}$ (ovdje $\breve{M}$ predstavlja **bilo koju** involuciju od M, $M\breve{M}$ obično navodimo kao kvadrat *amplitude*) koji zadovoljava relaciju $M\breve{M} = \breve{M}M \in \mathbb{C}$. Imamo

$$(Z+\boldsymbol{F})(\breve{Z}+\breve{\boldsymbol{F}}) = Z\breve{Z} + Z\breve{\boldsymbol{F}} + \breve{Z}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}\breve{\boldsymbol{F}} ,$$

pa slijede dvije mogućnosti

$$\breve{Z} = Z, \quad \breve{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{F} \quad \text{ili} \quad \breve{Z} = -Z, \quad \breve{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} ,$$

koje se razlikuju samo u ukupnom predznaku. Svaka involucija koja mijenja kompleksni vektor na drugi način, mijenja (do na ukupan predznak) bivektorski ili vektorski dio, stoga vrijedi

$$\boldsymbol{F}\breve{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n})(\boldsymbol{x} - j\boldsymbol{n}) = x^2 + n^2 + j(\boldsymbol{nx} - \boldsymbol{xn}) = x^2 + n^2 - 2j\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{n} ,$$

gdje smo dobili vanjski produkt realnih vektora koji ne može biti poništen, nema ga u izrazu $Z\breve{Z} + Z\breve{\boldsymbol{F}} + \breve{Z}\boldsymbol{F}$. Stoga mora biti $\breve{M} = \bar{M}$. Već smo pokazali da vrijedi $M\bar{M} = \bar{M}M$, ali možemo pokazati da iz zahtjeva da amplituda (bilo koja) pripada centru algebre slijedi komutativnost, vrijedi

$$M\breve{M} \in \mathbb{C} \Rightarrow M(M\breve{M}) = (M\breve{M})M = M(\breve{M}M) \Rightarrow M(M\breve{M} - \breve{M}M) = 0 ,$$

zbog asocijativnosti i distributivnosti. U nekom specijalnom slučaju izraz u zagradi ne mora biti nula jer postoje djelitelji nule u algebri, ali mi tražimo općenitu komutativnost, prema tome mora biti nula. Skalar $M\bar{M}$ često nazivamo *amplitudom multivektora*, iako je to zapravo kvadrat amplitude, ali to ne bi trebalo stvarati konfuziju).

Koristeći MA možemo definirati inverz multivektora, ako je $M\bar{M} \neq 0$:

$$M^{-1} \equiv \bar{M} / M\bar{M} .$$

Kako bi našli $1/M\bar{M}$ koristimo tehnike kompleksnih brojeva

$$\frac{1}{M\bar{M}} = \frac{(M\bar{M})^*}{M\bar{M}(M\bar{M})^*} ,$$

gdje * znači kompleksnu konjugaciju, odnosno $j \to -j$. Tehnika je ista, ali je interpretacija drugačija, naime, pseudoskalar j je orijentirani jedinični volumen, ima intuitivnu geometrijsku interpretaciju.

Primjer: $1/(1+j)$? Vrijedi $1/(1+i) = (1-i)/2 \;\Rightarrow\; 1/(1+j) = (1-j)/2$.

Naravno, ovaj „trik“ je opravdan

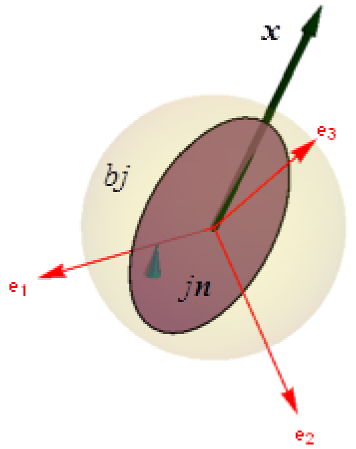
$$\frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-j}{2} ,$$

Vidjet ćemo da ovaj postupak nije dovoljan da nađemo sva moguća rješenja u geometrijskoj algebri, primjerice, rješenja za korijen od kompleksnog broja mogu biti proširena na kompleksne vektore. Jednostavan primjer je $\sqrt{1} = e_1$.

Važan pojam je *dual* od multivektora M definiran kao $M^* \equiv -jM$

(nemojmo pomiješati s kompleksnom konjugacijom *). Primijetite da operacija *dual* prevodi realni skalar u pseudoskalar, vektor u bivector (i obrnuto). Već smo spomenuli da je element $j\boldsymbol{n}$ bivektor. Sugeriramo čitatelju da raspiše $j\boldsymbol{n}$ u ortonormiranoj bazi i interpretira dobiveno. Također, uzmite dva vektora u ortonormiranoj bazi i napravite njihov vanjski produkt. Zatim nađite dual od rezultantnog bivektora da ste dobili vektorski produkt vaših vektora. Proizlazi za vektorski produkt

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -j\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y},$$



multivektor u 3D:

- **disk** predstavlja orijentirani bivektor
- transparentna **sfera** predstavlja pseudoskalar, orijentacija je dana bojom

p. 10

ali ovu relaciju možemo koristit samo u 3D, iako je element na desnoj strani definiran u svakoj dimenziji.

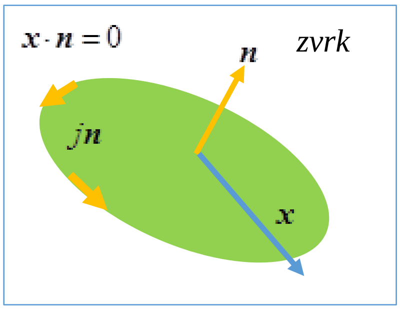
Iz općenitog oblika multivektora u *Cl*3

$$M = t + \boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n} + bj = Z + \boldsymbol{F}$$

da je u bitnom određen s dva realna broja (t, b) dva vektora ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{n}$). Bivektori su obično predstavljeni orijentiranim diskovima, dok pseudoskalar može biti predstavljen sferom s dvije moguće boje koje daju orijentaciju, pa možemo zamisliti jednostavnu sliku koja predstavlja multivektor (p. 10). To može puno pomoći. Slika p. 10 je napravljena u programu *Mathematica*. Čitatelju, osim mašte, svakako preporučamo program *GAViewer*.

Pogledajmo svojstva kompleksnog skalara $\boldsymbol{F}^2 = x^2 - n^2 + 2j\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n}$. Posebice, za okomite vektore ($\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = 0$) imamo $\boldsymbol{F}^2 \in \Re$, a vrijednosti -1, 0 i 1 su od posebnog interesa.

Prisjetimo se da je $j\boldsymbol{n}$ bivektor koji definira ravninu okomitu na vektor $\boldsymbol{n}$, stoga, za $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ vektor $\boldsymbol{x}$ pripada toj ravnini. Ovo je često korištena situacija (primjerice, kompleksni vektor elektromagnetskog polja u vakuumu), pa je važno moći zamisliti jasnu sliku. Primijetite da je u ovom slučaju realna vrijednost $\boldsymbol{F}^2 = x^2 - n^2$ određena duljinama vektora $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{n}$. Na sljedećoj slici možete vidjeti opisanu situaciju. Ne postoji poseban naziv za ovu vrstu kompleksnog vektora u literaturi (vjerojatno?), pa predlažemo naziv *zvrk* (*whirl*, skraćeno od whirligig).



Nilpotenti i dualni brojevi

1) $\boldsymbol{F}^2 = 0$

Ovo znači da je takav kompleksni vektor *nilpotent*. Nađimo opći oblik nilpotenta u *Cl*3 (podsjetimo, $\boldsymbol{F}^2 \in \mathbb{C}$):

$$\left(Z+\boldsymbol{F}\right)^2 = Z^2 + 2Z\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$Z = 0 \Rightarrow \boldsymbol{F}^2 = 0 \Rightarrow x = n, \quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n} = 0,$$

(isključili smo trivijalni slučaj $\boldsymbol{F} = 0$). Primijetite da često koristimo oblik $Z + \boldsymbol{F}$ za izvlačenje zaključaka , što nije slučajno. Dobra je praksa izbjegavati navike nekih autora da učestalo izražavaju multivektore pomoću komponenata, što čini formule nepreglednim. Ovdje je fokus na strukturi multivektora, a ta struktura reflektira geometrijska svojstva.

Jednostavan primjer nilpotenta je $e_1 + je_2$ (provjerite). Funkcije s nilpotentom kao argumentom je lako naći koristeći razvoj u red, gotovo svi članovi jednostavno nestaju. Primjerice, iz $\boldsymbol{N}^2 = 0$ slijedi $e^{\boldsymbol{N}} = 1 + \boldsymbol{N}$ (vidjeti dalje u tekstu).

Nilpotenti su dobrodošli u fizici, primjerice, elektromagnetski val u vakuumu je nilpotent u *Cl*3 formulaciji, polje je kompleksni vektor $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + j\boldsymbol{B}, \; E = B, \; c = 1$, gdje su $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ vektori električnog i magnetskog polja. Možemo definirati smjer *nilpotenta* $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n}$ kao $\hat{\boldsymbol{k}} = -j\hat{\boldsymbol{x}} \wedge \hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{n}}, \quad \hat{\boldsymbol{x}}^2 = \hat{\boldsymbol{n}}^2 = 1$, pa imamo

$$\hat{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{N}, \; \left(1+\hat{\boldsymbol{k}}\right)\boldsymbol{N} = 2\boldsymbol{N} .$$

Sve ovo nije teško dokazati ukoliko se prisjetimo da vrijedi $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{n} \Rightarrow \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{n}$, $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/x, \quad x = n$. Postoje mnoge druge zanimljive relacije (pogledajte literaturu). Ove relacije imaju direktne primjene, primjerice u elektromagnetizmu .

Komentirajmo sada mogućnost definiranja dualnih brojeva. Za nilpotent $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{x} + j\boldsymbol{n}$ imamo $x = n, \quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, pa definirajmo „jedinični nilpotent“ (nilpotenti imaju MA nula)

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{N}/x = \hat{\boldsymbol{x}} + j\hat{\boldsymbol{n}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = 0 .$$

Sada definirajmo dualne brojeve kao $\alpha + \beta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \alpha, \beta \in \Re$. Zbrajanje ovih je slično onom za kompleksne brojeve, dok za množenje vrijedi

$$\left(\alpha_1 + \beta_1\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\alpha_2 + \beta_2\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \alpha_1\alpha_2 + \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right)\boldsymbol{\varepsilon} ,$$

pa za $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 0$ dobijemo realan broj. Za $\alpha_1 = 0, \; \alpha_2 = 0$ je produkt nula, što razlikuje dualne i kompleksne brojeve. Za dualni broj $z = \alpha + \beta\boldsymbol{\varepsilon}$ definiramo konjugaciju $\bar{z} = \alpha - \beta\boldsymbol{\varepsilon}$ (primijetite, ovo je opet Cliffordova involucija), slijedi

$$z\bar{z} = \left(\alpha + \beta\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\alpha - \beta\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \alpha^2 ,$$

pa je modul dualnog broja $|z| = \alpha$ (može biti negativan). Primijetite da nema ovisnosti o β . Za $\alpha \neq 0$ imamo polarnu formu

$$z = \alpha + \beta\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha\left(1 + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}\right), \quad \varphi = \beta/\alpha ,$$

gdje je φ *argument* dualnog broja. Provjerite relacije

$$(1+\varphi\varepsilon)(1-\varphi\varepsilon)=1 \quad \text{i} \quad (1+\varphi\varepsilon)^n=(1+n\varphi\varepsilon),\ \ n\in\mathbb{N}.$$

za polinome vrijedi (provjerite)

$$P(\alpha+\beta\varepsilon)=p_0+p_1(\alpha+\beta\varepsilon)+...+p_n(\alpha+\beta\varepsilon)^n=$$
$$P(\alpha)+\beta P'(\alpha)\varepsilon,$$

gdje je P' prva derivacija polinoma. Ovo može biti prošireno na analitičke funkcije (vidjeti dalje u tekstu), ili za izvođenje *automatskog deriviranja*. Dijeljenje dualnim brojem je definirano kao

$$\frac{\alpha+\beta\varepsilon}{\gamma+\delta\varepsilon}=\frac{(\alpha+\beta\varepsilon)(\gamma-\delta\varepsilon)}{(\gamma+\delta\varepsilon)(\gamma-\delta\varepsilon)}=\frac{(\alpha+\beta\varepsilon)(\gamma-\delta\varepsilon)}{\gamma^2},\quad \gamma\neq 0.$$

Posebice,

$$\frac{1}{1+\varphi\varepsilon}=\frac{1-\varphi\varepsilon}{(1+\varphi\varepsilon)(1-\varphi\varepsilon)}=1-\varphi\varepsilon\Rightarrow$$
$$\left(\frac{1}{1+\varphi\varepsilon}\right)^n=(1-\varphi\varepsilon)^n=1-n\varphi\varepsilon,$$

pa vidimo da vrijedi Moivreova formula

$$z^n=\alpha^n(1+\varphi\varepsilon)^n=\alpha^n(1+n\varphi\varepsilon),\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Dualni brojevi mogu biti korišteni u fizici, primjerice, definirajmo specijalni dualni broj (*„događaj“*) $t+x\varepsilon$, gdje su uvedene koordinate vremena i položaja te *vlastitu brzinu* (*„boost“*) kao $u\equiv 1+v\varepsilon,\ u\bar{u}=1$. Iznos brzine v je argument dualnog broja, $v=x/t=\varphi$. Slijedi

$$(t+x\varepsilon)u=(t+x\varepsilon)(1+v\varepsilon)=t+(x+vt)\varepsilon=t'+x'\varepsilon,$$

što znači $t'=t$, $x'=x+vt$, pa smo dobili Galileijeve transformacije. Pravilo zbrajanja brzina slijedi odmah

$$u=1+v\varepsilon=u_1u_2=(1+v_1\varepsilon)(1+v_2\varepsilon)=1+(v_1+v_2)\varepsilon\Rightarrow$$
$$v=v_1+v_2.$$

Ovdje imamo problem, naime, vektor brzine nije dobro definiran, nemamo orijentaciju, ali uz smjer nilpotenta možemo definirati vektor brzine kao $\mathbf{v}=-jv\varepsilon$. Sada vlastita brzina postaje $u\equiv 1-jv\varepsilon$, $u\bar{u}=1$. Za „događaj“ sada koristimo $t-jx\varepsilon$. Iz ovog slijedi

$$(t-jx\varepsilon)(1-jv\varepsilon)=t-j(x+vt)\varepsilon=t'-jx'\varepsilon,$$

pa smo opet dobili Galileijeve transformacije.

Tako, uz Lorentzove transformacije (hiperbolni brojevi, vektori i kompleksni vektori, vidjeti dalje u tekstu) i rotore (kompleksni brojevi, bivektori), i Galileijeve transformacije (dualni brojevi, nilpotenti) također imaju mjesto u geometriji prostora $\Re^3$. Budući da je sve ovo dio veće strukture (*Cl*3), može se doći na ideju da Galileijeve transformacije nisu samo aproksimacija Lorentzovih transformacija za male brzine, već da imaju neki dublji fizikalni smisao, neovisan o brzini. Ali takva ideja je potaknuta specijalnim izborom komponenata dualnog broja (*x*, *t*). Dualni brojevi kao $t+x\varepsilon$ bi mogli biti korisni ne-relativističkoj fizici, ali svakako nisu u suglasnosti sa specijalnom teorijom relativnosti. U poglavlju o specijalnoj relativnosti je pokazano da Galileijeve transformacije (uz rotacije i Lorentzove transformacije) proizlaze iz jednostavne pretpostavke o simetriji našeg svijeta (homogenost i izotropnost). Ako postoji dublja fizika iza ovog formalizma onda to sigurno ne uključuje eksplicitno prostorno-vremenske događaje. Ali što ako izaberemo drugačije? Primjerice, tipičan nilpotent je elektromagnetski val u vakuumu. Ako definiramo $\phi = E = B$ i $\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\boldsymbol{E} + j\boldsymbol{B}\right)/\phi$ mogli bismo proučavati dualne brojeve kao $\psi + \phi\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \psi \in \Re$, ali se pojavljuje pitanje: kako interpretirati ψ ? Prema strukturi izraza to bi mogla biti neka vrsta skalarnog polja, ali onda dolazi drugo pitanje: što je argument ovakvog dualnog broja, omjer vektora polja (kompleksni vektor) i skalarnog polja bi trebala biti "brzina"? U redu, ovdje se zaustavljamo.

Idempotenti i hiperbolna struktura

2) $\boldsymbol{F}^2 = 1$

Za $\boldsymbol{F}^2 = x^2 - n^2 = 1$ možemo naći opći oblik koristeći relaciju $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$, pa općenito imamo $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}\cosh\varphi + j\boldsymbol{m}\sinh\varphi, \quad \boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{m}^2 = 1, \quad \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{m}$, gdje je $\boldsymbol{f}$ jedinični kompleksni vektor. **Primjer**: $\boldsymbol{f} = e_1\cosh\varphi + je_2\sinh\varphi$. Takav kompleksni vektor možemo dobiti koristeći $\sqrt{\boldsymbol{F}^2}$, provjerite da multivektor $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{F}/\sqrt{\boldsymbol{F}^2}$ ima tražena svojstva. Provjerite da $p = \left(1 + \boldsymbol{f}\right)/2 \Rightarrow$ $p^2 = p$, pa imamo *idempotent*.

Teorem 1. Svi idempotenti u *Cl*3 imaju oblik $p = \left(1 + \boldsymbol{f}\right)/2$.

Dokaz:

$$\left(Z + \boldsymbol{F}\right)^2 = Z^2 + 2Z\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^2 = Z + \boldsymbol{F} \Rightarrow Z = 1/2 \Rightarrow \boldsymbol{F}^2 = 1/4 \Rightarrow \boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}/2.$$

Primijetite opet "$Z,\ \boldsymbol{F}$" formu. Opći oblik idempotenta je sada

$$p = \left(1 + \boldsymbol{n}\cosh\varphi + j\boldsymbol{m}\sinh\varphi\right)/2, \quad \boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{m}^2 = 1, \quad \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{m}.$$

Idempotente kao $\left(1 + \boldsymbol{n}\right)/2, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1$ ($\boldsymbol{n}$ je jedinični vektor) nazivamo *prostim*.

Teorem 2: Svaki idempotent u *Cl*3 može biti izražen kao suma prostog idempotenta i nilpotenta.

Dokaz:

Za prosti idempotent $p = \left(1 + \boldsymbol{n}\right)/2$ i nilpotent $\boldsymbol{N}$ vrijedi

$$\left(p + \boldsymbol{N}\right)^2 = p + p\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}p = p + \boldsymbol{N} + \left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{n}\right)/2,$$

pa vidimo da je tvrdnja točna za $\boldsymbol{n}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{n} = 0$, što znači da vektor $\boldsymbol{n}$ mora anti-komutirati s vektorima koji definiraju $\boldsymbol{N}$, tj. mora biti okomit na njih, odnosno paralelan vektoru smjera nilpotenta: $\hat{\boldsymbol{n}} = \pm\hat{\boldsymbol{k}}$. Teorem je dokazan i imamo uvjete za nilpotent.

Primjer: $p = \left(1 + e_1\right)/2, \quad \boldsymbol{N} = \left(e_2 + je_3\right)/2,\ \hat{\boldsymbol{k}} = e_2 \times e_3 = e_1$.

Spektralna dekompozicija i funkcije multivektora

Definirajmo $u_{\pm} = (1 \pm \boldsymbol{f})/2$, $\boldsymbol{f}^2 = 1$, sa svojstvima

$$u_+ + u_- = 1, \quad u_+ - u_- = \boldsymbol{f}, \; u_+ u_- = u_- u_+ = 0, \; u_{\pm}^2 = u_{\pm}, \; \bar{u}_+ = u_- .$$

Primijetite da idempotenti $u_{\pm}$ ne čine bazu u *Cl*3 (o *spektralnim bazama* pogledajte [33]) te da bismo trebali pisati $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(M)$ i $u_{\pm} = u_{\pm}(M)$, ali nećemo to raditi. Možemo općenito multivektor sa svojstvom $\boldsymbol{F}^2 \neq 0$ izraziti kao

$$M = Z + \boldsymbol{F} = Z + \sqrt{\boldsymbol{F}^2}\,\boldsymbol{f} \equiv Z + Z_f \boldsymbol{f}, \; \boldsymbol{f}^2 = 1,$$

pa ako definiramo kompleksne skalare $M_{\pm} = Z \pm Z_f$ dobijemo oblik

$$M = M_+ u_+ + M_- u_- .$$

Kažemo da imamo *spektralnu dekompoziciju* multivektora. Spektralna dekompozicija nam daje magičnu mogućnost

$$M^2 = (M_+ u_+ + M_- u_-)^2 = M_+^2 u_+ + M_-^2 u_- ,$$

što odmah možemo poopćiti na sve prirodne brojeve u eksponentu, ali i na negativne cijele brojeve ako postoji inverz multivektora. Dokažite da u spektralnoj bazi vrijedi $M\bar{M} = M_+ M_-$.

Za analitičke funkcije možemo iskoristiti razvoj u red da dobijemo

$$f(M) = f(M_+)u_+ + f(M_-)u_- .$$

Podsjetimo, da nađemo $f(M_{\pm})$ koristimo teoriju kompleksnih brojeva, zamijenimo $j \to i = \sqrt{-1}$, nađemo željenu funkciju i vratimo $i \to j$. Za multivektore $M = \boldsymbol{F} = \sqrt{\boldsymbol{F}^2}\,\boldsymbol{f}$ vrijedi

$$M_{\pm} = \pm\sqrt{\boldsymbol{F}^2} \Rightarrow f(M) = f\left(\sqrt{\boldsymbol{F}^2}\right)u_+ + f\left(-\sqrt{\boldsymbol{F}^2}\right)u_- .$$

Za parne funkcije vrijedi

$$f(\boldsymbol{F}) = f\left(\sqrt{\boldsymbol{F}^2}\right)(u_+ + u_-) = f\left(\sqrt{\boldsymbol{F}^2}\right) \in \mathbb{C},$$

a za neparne

$$f(\boldsymbol{F}) = f\left(\sqrt{\boldsymbol{F}^2}\right)(u_+ - u_-) = f\left(\sqrt{\boldsymbol{F}^2}\right)\boldsymbol{f} .$$

Multivektori oblika $M = z + \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}^2 = \boldsymbol{N}^2 = 0$ nemaju spektralnu dekompoziciju, ali koristeći

$$M^n = (z + \boldsymbol{N})^n = z^n + n z^{n-1}\boldsymbol{N},$$

dobijemo

$$f(z + \boldsymbol{N}) = f(z) + \frac{df(z)}{dz}\boldsymbol{N} .$$

Pogledajmo neke specijalne slučajeve

$$f(u_{\pm}) = f(\pm 1)u_{\pm},$$

$$f(\boldsymbol{f}) = f(u_+ - u_-) = f(1)u_+ + f(-1)u_-,$$

$$f(-j\boldsymbol{f}) = f(-ju_+ + ju_-) = f(-j)u_+ + f(j)u_- .$$

Za inverznu funkciju vrijedi

$$f^{-1}(y)=x \Rightarrow f(x)=y \Rightarrow f(x_\pm)=y_\pm \Rightarrow x_\pm = f^{-1}(y_\pm).$$

Za $M\bar{M}=0$ (*light-like* multivektor) vrijedi

$$M = z+\sqrt{\boldsymbol{F}}\,\boldsymbol{f} = z+z_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{f}, \ z^2-\boldsymbol{F}^2=0=(z-z_{\boldsymbol{F}})(z+z_{\boldsymbol{F}}),$$

pa imamo dvije mogućnosti:

1) $z=z_{\boldsymbol{F}} \Rightarrow M_+=2z_{\boldsymbol{F}}, \ M_-=0 \Rightarrow f(M)=f(2z_{\boldsymbol{F}})u_+,$
2) $z=-z_{\boldsymbol{F}} \Rightarrow M_+=0, \ M_-=-2z_{\boldsymbol{F}} \Rightarrow f(M)=f(-2z_{\boldsymbol{F}})u_-.$

Pogledajmo neke primjere elementarnih funkcija.

Inverz multivektora ($M\bar{M}\neq 0$) nije teško naći

$$M^{-1}=\frac{1}{M_+u_+ + M_-u_-}=\frac{M_+u_- + M_-u_+}{(M_+u_+ + M_-u_-)(M_+u_- + M_-u_+)}=\frac{M_+u_- + M_-u_+}{M_+M_-}=\frac{u_+}{M_+}+\frac{u_-}{M_-},$$

odnosno

$$M^{-n}=\frac{1}{(M_+u_+ + M_-u_-)^n}=\frac{u_+}{(M_+)^n}+\frac{u_-}{(M_-)^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Za kvadratni korijen dobijemo (pogledajte [13] za drugačiji oblik)

$$\sqrt{M}=S=S_+u_+ + S_-u_- \Rightarrow M=M_+u_+ + M_-u_- = (S_+)^2u_+ + (S_-)^2u_- \Rightarrow S_\pm=\pm\sqrt{M_\pm},$$

ili

$$M^{\pm 1/n}=S \Rightarrow S_\pm=(M_\pm)^{\pm 1/n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Primjer:

$$\sqrt{\boldsymbol{e}_i}=\pm(j+\boldsymbol{e}_i)/\sqrt{2j}.$$

Eksponencijalna funkcija ima oblik

$$e^M=e^{M_+}u_+ + e^{M_-}u_-,$$

pa logaritamsku funkciju dobijemo kao

$$\log M = X \Rightarrow e^X = M = M_+u_+ + M_-u_- = \exp(X_+)u_+ + \exp(X_-)u_- \Rightarrow X_\pm=\log M_\pm.$$

Uz definiciju $\boldsymbol{I}\equiv \boldsymbol{F}/|\boldsymbol{F}|=-j\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{I}^2=-1$, logaritamska funkcija ima oblik (*Chappell*)

$$\log M = \log|M|+\varphi \boldsymbol{I}, \quad \varphi=\arctan(|\boldsymbol{F}|/Z),$$

ali možemo pokazati da su ova dva oblika ekvivalentna:

$$\log(M_+)u_+ + \log(M_-)u_- = \frac{\log(M_+)+\log(M_-)}{2}+\frac{\log(M_+)-\log(M_-)}{2}\boldsymbol{f} =$$

$$\log|M| - j\boldsymbol{I}\log\left(\sqrt{\left[1-j\left(|\boldsymbol{F}|/z\right)\right]/\left[1+j\left(|\boldsymbol{F}|/z\right)\right]}\right) = \log|M| + \boldsymbol{I}\arctan\left(|\boldsymbol{F}|/z\right) = \log|M| + \varphi\boldsymbol{I}.$$

Primjeri:

$$\boldsymbol{e_1}^{\boldsymbol{e_1}} = X \Rightarrow \boldsymbol{e_1}\log\boldsymbol{e_1} = \log X\,,\ \ (u_\pm = (1\pm\boldsymbol{e_1})/2\,),\ \ e_1 u_\pm = \pm u_\pm\,,$$

$$\boldsymbol{e_1} = u_+ - u_- \Rightarrow \log\boldsymbol{e_1} = u_+\log 1 + u_-\log(-1) = j\pi u_- \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{e_1}\log\boldsymbol{e_1} = -j\pi u_- \Rightarrow X = \exp(-j\pi u_-) = \exp(-j\pi)u_- = -u_-\,.$$

Ostavljamo čitatelju da istražuje mogućnosti te da nađe izraze za trigonometrijske funkcije.

Pogledajmo primjer polinomske jednadžbe

$$M^2 + 1 = 0\,,$$

gdje su rješenja svi multivektori čiji kvadrat je -1. Možemo pokušati

$$(Z+\boldsymbol{F})^2 + 1 = 0 \Rightarrow Z^2 + 2Z\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^2 + 1 = 0 \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow \boldsymbol{F}^2 = -1\,,$$

pa znamo opće rješenje (pogledajte sljedeće poglavlje). Koristeći spektralnu dekompoziciju imamo

$$M^2 + 1 = (M_+u_+ + M_-u_-)^2 + u_+ + u_- = (M_+^2+1)u_+ + (M_-^2+1)u_- = 0 \Rightarrow$$

$$M_+^2 + 1 = 0,\ \ M_-^2 + 1 = 0\,,$$

pa smo dobili dvije jednadžbe s kompleksnim brojevima. Ovo je bila samo mala demonstracija mogućnosti, ali čitatelj može provesti kompletan račun.

Već smo naglasili da *Cl*3 ima kompleksnu i hiperbolnu strukturu, kompleksnu zbog j i drugih elemenata koji kvadrirani daju -1, a hiperbolnu zbog elemenata koji kvadrirani daju 1, primjerice, jedinični vektori su hiperbolni. Imamo također dualne brojeve (koristeći nilpotente). Moguće je efikasno formulirati specijalnu teoriju relativnosti koristeći hiperbolne (*double*, *split-complex*) brojeve, pa ne bi trebalo biti iznenađenje ako se pokaže da je specijalnu teoriju relativnosti moguće formulirati u *Cl*3 (vidjeti dalje u tekstu). Jedinični kompleksni vektor $\boldsymbol{f}$ najopćenitiji element algebre sa svojstvima hiperbolne jedinice. Za dva multivektora koji imaju isti jedinični kompleksni vektor $\boldsymbol{f}$ (isti „smjer“)

$$M_1 = z_1 + z_{1\boldsymbol{F}}\boldsymbol{f} \quad \text{i} \quad M_2 = z_2 + z_{2\boldsymbol{F}}\boldsymbol{f}\,,$$

definiramo kvadratičnu *udaljenost multivektora* kao

$$\bar{M}_1 M_2 \equiv (z_1 - z_{1\boldsymbol{F}}\boldsymbol{f})(z_2 + z_{2\boldsymbol{F}}\boldsymbol{f}) = z_1z_2 - z_{1\boldsymbol{F}}z_{2\boldsymbol{F}} + (z_1z_{2\boldsymbol{F}} - z_2z_{1\boldsymbol{F}})\boldsymbol{f} \equiv h_i + h_o\boldsymbol{f}\,,$$

gdje su h_i i h_o *hiperbolni unutarnji* i *hiperbolni vanjski* produkt. Za $M_1 = M_2 = M$ imamo kvadratičnu *amplitudu multivektora*. Za $h_o = 0$ kažemo da su multivektori *h*-paralelni, dok su za $h_i = 0$ *h*-okomiti.

Lema: *Neka je* $\bar{M}_1 M_2 = 0$ *za* $M_1 \neq 0$ *i* $M_2 \neq 0$. Tada je $M_1 M_2 \neq 0$ i obrnuto.

$$M_1M_2 = (M_{1+}u_+ + M_{1-}u_-)(M_{2+}u_+ + M_{2-}u_-) = M_{1+}M_{2+}u_+ + M_{1-}M_{2-}u_-\,,$$

$$\bar{M}_1M_2 = (M_{1+}u_- + M_{1-}u_+)(M_{2+}u_+ + M_{2-}u_-) = M_{1-}M_{2+}u_+ + M_{1+}M_{2-}u_-\,,$$

pa je $M_{1-}M_{2+} = 0$ ili $M_{1+}M_{2-} = 0$, što znači da je $M_{1-} = 0$ && $M_{2-} = 0$ ili $M_{1+} = 0$ && $M_{2+} = 0$, ali oba slučaja daju $M_1M_2 \neq 0$. Obrnuta tvrdnja se slično dokazuje.

Što je $\sqrt{-1}$?

3) $\boldsymbol{F}^2=-1$

Općenito, ovu vrstu kompleksnog vektora možemo dobiti pomoću $\sqrt{-\boldsymbol{F}^2}=\sqrt{\boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{F}}}\equiv|\boldsymbol{F}|$, gdje imamo $\boldsymbol{I}\equiv\boldsymbol{F}/|\boldsymbol{F}|=-j\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{I}^2=-1$. Opći oblik je

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{n}\sinh\varphi+j\boldsymbol{m}\cosh\varphi,\quad \boldsymbol{n}^2=\boldsymbol{m}^2=1,\quad \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}.$$

Primijetite da imamo netrivijalno rješenje za $\sqrt{-1}$. Potražimo sva moguća rješenja za $\sqrt{z}=\sqrt{c+jd}$, pa moramo riješiti jednadžbu $M^2=z$. Jedno rješenje je obični korijen kompleksnog broja (za $\boldsymbol{F}=0$), ali općenitije

$$\left(Z+\boldsymbol{F}\right)^2=z\Rightarrow Z^2+2Z\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^2=z\Rightarrow Z=0\Rightarrow \boldsymbol{F}=\sqrt{z}=\boldsymbol{v}+j\boldsymbol{w},$$

pa je

$$\sqrt{c+jd}=\boldsymbol{v}+j\boldsymbol{w}\Rightarrow c+jd=v^2-w^2+2j\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w},$$

i $c=v^2-w^2$, $d=2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$. Zanimljivo, kvadratni korijen kompleksnog broja je kompleksni vektor (a to smo očekivali jer je kvadrat kompleksnog vektora kompleksni skalar). Čitatelju preporučamo da istraži različite mogućnosti.

Trigonometrijski oblik multivektora

Podsjetimo da smo za $\boldsymbol{F}^2=0$ definirali dualne brojeve $z=\alpha+\beta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2=0$, $\alpha,\beta\in\Re$ te da smo za $\alpha\neq 0$ našli polarnu formu

$$z=\alpha+\beta\boldsymbol{\varepsilon}=\alpha\left(1+\varphi\boldsymbol{\varepsilon}\right),\quad \varphi=\beta/\alpha,$$

gdje je φ *argument* dualnog broja.

Elemente $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{I}$ možemo iskoristiti da definiramo trigonometrijske oblike općenitih multivektora. Kako bismo iskoristili prednosti teorije kompleksnih brojeva poslužit ćemo se elementom $\boldsymbol{I}$. Definirajmo *argument multivektora* kao

$$\varphi=\arg M\equiv\arctan\left(\frac{|\boldsymbol{F}|}{Z}\right).$$

Sada vrijedi (uz uvjete postojanja), $|M|\equiv\sqrt{M\bar{M}}$,

$$\cos\varphi=\frac{Z}{|M|},\ \sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{F}|}{|M|},$$

što daje

$$M=Z+\boldsymbol{F}=|M|\left(\cos\varphi+\boldsymbol{I}\sin\varphi\right).$$

Zbog $\boldsymbol{I}^2=-1$ vrijedi poopćena Moivreova formula

$$M^n=|M|^n\left[\cos\left(n\varphi\right)+\boldsymbol{I}\sin\left(n\varphi\right)\right].$$

Primijetite da imamo oblik kao za kompleksne brojeve, ali postoji bitna razlika: element $\boldsymbol{I}$ ima jasno geometrijsko značenje, sadrži svojstva koja su određena vektorima koji definiraju vektorski dio multivektora. Koristeći $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\left|\boldsymbol{F}\right|$ te razvoj u red dobijemo

$$e^M = e^{Z+\boldsymbol{F}} = e^Z e^{\boldsymbol{F}} = e^Z\left(\cos\left|\boldsymbol{F}\right| + \boldsymbol{I}\sin\left|\boldsymbol{F}\right|\right),$$

što je moguće zbog komutativnosti kompleksnog skalara Z. Slučaj $\boldsymbol{F}^2 = 0$ smo diskutirali ranije. Postoji zanimljiv članak gdje su funkcije multivektora definirane polazeći od svojstva kompleksnog vektora $\boldsymbol{I}$ ([13]).

Kako bi iskoristili prednosti teorije hiperbolnih brojeva iskoristit ćemo $\boldsymbol{f}$:

$$M = Z + \boldsymbol{F} = Z + Z_f\,\boldsymbol{f} = \rho\left(\frac{Z}{\rho} + \frac{Z_f}{\rho}\,\boldsymbol{f}\right) = \rho\left(\cosh\varphi + \boldsymbol{f}\sinh\varphi\right), \quad \rho = \sqrt{M\bar{M}} = \sqrt{Z^2 - Z_f^2}\,.$$

Za $M\bar{M} = 0$ ne postoji polarna forma (*light-like* multivektori), ali onda vrijedi $M = Z\left(1 \pm \boldsymbol{f}\right)$. Definirajmo „brzinu“ $\vartheta \equiv \tanh\varphi$, odmah slijedi

$$M = \rho\left(\cosh\varphi + \boldsymbol{f}\sinh\varphi\right) = \rho\gamma\left(1 + \vartheta\boldsymbol{f}\right), \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \vartheta^2}\,.$$

Definiramo li *vlastitu brzinu* $u = \gamma\left(1 + \vartheta\boldsymbol{f}\right)$, $u\bar{u} = 1$, slijedi *„pravilo zbrajanja brzina“* kao

$$\gamma_1\gamma_2\left(1 + \vartheta_1\boldsymbol{f}\right)\left(1 + \vartheta_2\boldsymbol{f}\right) = \gamma_1\gamma_2\left(1 + \vartheta_1\vartheta_2 + \left(\vartheta_1 + \vartheta_2\right)\boldsymbol{f}\right) =$$
$$\gamma_1\gamma_2\left(1 + \vartheta_1\vartheta_2\right)\left(1 + \boldsymbol{f}\left(\vartheta_1 + \vartheta_2\right)/\left(1 + \vartheta_1\vartheta_2\right)\right) \Rightarrow$$
$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\left(1 + \vartheta_1\vartheta_2\right), \quad \vartheta = \left(\vartheta_1 + \vartheta_2\right)/\left(1 + \vartheta_1\vartheta_2\right),$$

što su formule specijalne teorije relativnosti. Vlastita brzina u „sustavu mirovanja“ $\vartheta = 0$ je $u_0 = 1$, pa možemo transformirati u novi „sustav referencije“ $u_0 u = u$, ili, kao u ranijem primjeru $u_0 u_1 u_2 = u_1 u_2$. Ove formule predstavljaju geometrijske odnose i općenitije su od onih u specijalnoj teoriji relativnosti, naime, za STR obično trebamo samo realni dio multivektora (*paravektori*, pogledajte sljedeće poglavlje), ovdje imamo i bivektore.

Koristeći spektralnu dekompoziciju dobijemo

$$M = \rho\gamma\left(1 + \vartheta\boldsymbol{f}\right) = k_+ u_+ + k_- u_- \Rightarrow k_\pm = \rho\gamma\left(1 \pm \vartheta\right) = \rho K^{\pm 1},$$

gdje je (ovdje koristimo $\ln x \equiv \log_e x$)

$$K = \sqrt{\left(1 + \vartheta\right)/\left(1 - \vartheta\right)}, \quad \varphi = \ln K\,,$$

poopćeni *Bondijev faktor*. Odavde slijedi

$$\left(K_1 u_+ + u_- / K_1\right)\left(K_2 u_+ + u_- / K_2\right) = K_1 K_2 u_+ + u_- / \left(K_1 K_2\right) \Rightarrow K = K_1 K_2\,,$$

točno kao u specijalnoj teoriji relativnosti, analog pravilu zbrajanja brzina.

Jasno je vidljivo kako nam je geometrijski produkt dao mogućnost da "relativističke" formule dobijemo **bez korištenja prostora Minkowskog**. Da je Einstein samo znao…

Specijalna teorija relativnosti

Čitatelj bi mogao iskoristiti prethodno poglavlje i multivektore oblika $t+\mathbf{x}$ (*paravektori*) te tako odmah dobiti sve potrebne formule. Ipak, imamo ponešto za komentirati.

Specijalna teorija relativnosti (STR), u svojoj klasičnoj formi, je teorija transformacija koordinata, a posebno važan je pojam brzine. Geometrijska algebra ne ovisi bitno o koordinatama, što daje mogućnost razmatranja općih geometrijskih odnosa, a ne prvenstveno odnosa među koordinatama, što je svakako poželjno jer fizikalni procesi ne ovise o izabranim koordinatnim sustavima u kojima mogu biti formulirani. Nažalost, mnogi autori koji koriste geometrijsku algebru ne mogu odoljeti korištenju koordinata, a to čini formule netransparentnim i zamagljuje geometrijski sadržaj. Teško se riješiti starih navika. Postoje mnogi tekstovi i komentari o STR-u, postoje i mnogi oponenti, koji često samo pokazuju nedostatak razumijevanja teorije. Tako, primjerice, često govore da je Einstein "pisao besmislice" jer je u formulama koristio “brzinu fotona” kao c i kao $c\pm v$, ne razumijevajući jednostavnu činjenicu da je iznos brzine fotona jednak c u svakom inercijalnom sustavu, ali ako želimo naći vrijeme potrebno fotonu da dostigne zid vagona koji bježi od njega (gledano iz sustava tračnica, *collision time*) moramo koristiti $c+v$. Zašto? Jer je to relativna brzina fotona i zida vagona u sustavu tračnica. Brzina fotona i brzina zida su obje mjerene u istom referentnom sustavu, pa se zbrajaju jednostavno, bez relativističkog pravila zbrajanja brzina. Brzina fotona je i u ovom sustavu c, dok $c+v$ nije niti brzina fotona niti brzina zida. Sasvim je drugačije ako se u vagonu giba čovjek brzinom u, relativno u odnosu na vlak. Brzina čovjeka mjerena u sustavu tračnica je tada $(v+u)/(1+uv/\mathrm{c}^2)$, gdje je v brzina vlaka u odnosu na tračnice. Prema tome, relativističko pravilo zbrajanja brzina koristimo kada su brzine mjerene u različitim inercijalnim sustavima. Veličine mjerene u jednom te istom sustavu ne možemo transformirati, pa nema niti formula koje proizlaze iz takvih transformacija (ovdje su to Lorentzove transformacije).

Prije nego nastavimo, moglo bi biti korisno raščistiti nekoliko pojmova. Kada kažemo da zakoni fizike moraju biti *kovarijantni*, mislimo da u različitim referentnim sustavima imaju istu formu, primjerice, formula $A=B$ prelazi transformacijom u $A'=B'$ (svi inercijalni sustavi su ravnopravni). Fizička veličina je *konstanta* ako uopće ne ovisi o koordinatama, primjerice, broj 3, ili naboj elektrona. Iznos brzine svjetlosti **nije** konstanta u tom smislu, ona je *invarijanta*, što znači da općenito **ovisi o koordinatama** ($c=|d\mathbf{r}/dt|$), ali ima istu vrijednost u svakom inercijalnom referentnom sustavu. Iznos brzine svjetlosti je konstanta prirode u smislu da je granična brzina, ali u odnosu na Lorentzove transformacije je invarijanta.

Postoji još jedna raširena predrasuda o postulatima specijalne teorije relativnosti. Neka je postulat o kovarijantnosti prvi a postulat o invarijantnosti iznosa brzine svjetlosti drugi. Iz prvog postulata imamo, primjerice, $v=dx/dt$ i $v'=dx'/dt'$. Drugi postulat je uglavnom motiviran Maxwellovom elektromagnetskom teorijom, koja predviđa invarijantnost iznosa brzine svjetlosti u inercijalnim referentnim sustavima. Međutim, trebamo samo **prvi postulat** da izvedemo Lorentzove transformacije (LT) (nije teško pronaći reference, pa preporučamo da se to učini, pogledajte [26]). Jednom kada dobijemo LT odmah slijedi postojanje maksimalne brzine (v_{g}), koja je invarijantna. Ovo znači da ne trebamo drugi postulat kako bismo imali maksimalnu brzinu u teoriji. Prema tome, u relativističkim formulama bismo mogli koristiti v_{g} umjesto c. Einstein je jednostavno pretpostavio da vrijedi $v_{\mathrm{g}}=c$, oslanjajući se uglavnom na Maxwellovu teoriju. Štoviše, postojanje granične ne znači da mora postojati i objekt koji se giba tom brzinom . Mi mislimo da je svjetlost takav objekt. Ali bismo mogli i zamisliti da je granična brzina za 1 *mm/s* veća od c. Koji eksperiment bi mogao pokazati razliku? Međutim, ako bi bilo tako, foton bi imao masu, iako nezamislivo malu. Mogli bismo tada zamisliti inercijalni sustav koji se giba zajedno s fotonom, pa bi foton u tom sustavu mirovao. Kako je svjetlost također val, vidjeli bismo val koji se ne giba. Faza vala bi bila konstantna za nas (primjerice, maksimum vala), pa ne bismo vidjeli niti oscilacije, a bez promjena električnog polja u vremenu nema niti magnetskog polja. Preostalo bi samo elektrostatsko polje, ali ne postoji raspodjela naboja koja bi ga stvorila (*Einstein*). I tako, umjesto mogućeg v_{g} koristimo c, ali to i dalje ne znači da je postulat o brzini svjetlosti neophodan. Već smo vidjeli da formule specijalne teorije relativnosti proizlaze iz geometrije 3D euklidskog prostora. Prvi postulat je svakako prirodan i tipičan za Einsteina, koji je među prvima naglašavao važnost simetrija u fizici, a ovo je svakako pitanje simetrije. Istina, nešto je lakše napraviti uvod u STR koristeći i drugi postulat, kako je urađeno u većini udžbenika, ali studenti onda dobiju osjećaj da je teoriju nemoguće formulirati bez drugog postulata. Spomenimo da postoje zaista brojni testovi koji potvrđuju STR, a niti jedan (koliko je autoru poznato) koji bi je opovrgao, iako se mnogi trude prikazati stvari drugačije, čak smišljaju priče o "relativističkoj uroti". Naglasimo dvije važne činjenice. Prvo, kvantna elektrodinamika (QED) je duboko bazirana na STR, a poznato je da se predviđanja QED neobično dobro slažu s pokusima. Drugo, imamo mogućnost gotovo svaki promatrati što se događa na brzinama usporedivim s brzinom svjetlosti, naime, imamo ubrzavače čestica. Oni su građeni pomoću formula STR-a , pa je zaista teško zamisliti da bi bili upotrebljivi ako STR ne bi bila valjana.

Prodiskutirajmo pitanje izvođenja Lorentzovih transformacija. Obično je u tekstovima inercijalni sustav definiran kao “ne-ubrzani sustav”, ali ovo podrazumijeva samo homogenost, u skladu s prvim Newtonovim zakonom, **ne svim Newtonovim zakonima**, kako to autori tvrde. Kako bismo uključili treći Newtonov zakon moramo uvesti pojam izotropnosti (inercije). Zato? Promotrimo dva protona u mirovanju i dozvolimo im da se slobodno gibaju. Očekujemo da će se protoni gibati u suprotnim smjerovima zbog odbojne sile, ali očekujemo i da će oba protona imati točno ista kinematička svojstva. Svi smjerovi u prostoru su jednaki. Bez toga ne bismo imali treći Newtonov zakon. Izotropnost je direktno povezana s mogućnošću da sinkroniziramo satove. Također je prirodno očekivati da svjetlost ima istu brzinu u svim smjerovima (iako to ovdje nije važno za izvod, satove možemo sinkronizirati i pomoću naših protona). Sada imamo inercijalni koordinatni sustav (IKS) s uključenom homogenošću i izotropnošću (inercije). Klasu svih inercijalnih koordinatnih sustava (rotiranih, translatiranih) koji se ne gibaju u odnosu na neki IKS nazivamo inercijski sustav referencije (ISR). Sad, uz uključenu homogenost i izotropnost ne trebamo postulat o brzini svjetlosti, simetrije su dovoljne da dobijemo Lorentzove transformacije. Time svjetlost gubi centralnu ulogu u teoriji.

Pokažimo kako to možemo izvesti. Zbog linearnosti transformacija očekujemo ih u obliku (v je relativna brzina između sustava, mjerena u jednom od sustava)

$$x' = Ax + Bt \qquad\qquad t' = Cx + Dt .$$

Za $x' = const$ imamo $dx' = 0$, što znači $B = -vA$. Inverzne transformacije su

$$x = \frac{Dx' - Bt'}{AD - BC} \qquad\qquad t = \frac{-Cx' + At'}{AD - BC} ,$$

pa iz $x = const$ dobijemo $B = -vD$,odnosno $D = A$. Uvedemo li veličine

$$\delta = \sqrt{AD - BC} , \qquad \lambda = A/\kappa , \qquad \kappa = \frac{\lambda^2 - 1}{v^2 \lambda^2}$$

slijede transformacije u obliku

$$x' = \delta\lambda\left(x - vt\right) \qquad\qquad t' = \delta\lambda\left(t - \kappa vx\right) ,$$

$$x = \frac{\lambda}{\delta}\left(x' + vt'\right) \qquad\qquad t = \frac{\lambda}{\delta}\left(t' + \kappa vx'\right).$$

Zamjenom v s $-v$ transformacije bi trebale biti zamijenjene (zbog izotropnosti) otkud slijedi $\delta = 1$ (primijetite da to znači da su transformacije ortogonalne). Sada imamo

$$x' = \lambda(x - vt) \qquad t' = \lambda(t - \kappa vx),$$

$$x = \lambda(x' + vt') \qquad t = \lambda(t' + \kappa vx').$$

Iz

$$\lambda = 1/\sqrt{1-\kappa v^2},$$

dobijemo općenite transformacije u obliku

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\kappa v^2}} \qquad t' = \frac{t - \kappa vx}{\sqrt{1-\kappa v^2}}.$$

Čitatelja upućujemo da pokaže (koristeći tri IKS) da je $\kappa(v) = const$. Koristeći odgovarajuće fizičke jedinice dobijemo tri mogućnosti za κ: -1, 0, 1. Izgleda poznato?

Za $\kappa = -1$ imamo čiste rotacije u (x,t) ravnini, za kut $\operatorname{arctg}(v)$. Za $\kappa = 0$ imamo Galileijeve transformacije. Za $\kappa = 1$ imamo Lorentzove transformacije. Pokusi u fizici nas uče da trebamo odabrati $\kappa = 1$, ali uočite da je Galileijeva relativnost sasvim valjana teorija relativnosti, sve ovo je posljedica naše definicije za ICS. Direktna posljedica Lorentzovih transformacija je postojanje maksimalne brzine, ali o tome smo već govorili.

Podsjetimo da smo već vidjeli brojeve -1, 0, 1 ovdje u tekstu, diskutirali smo kompleksne brojeve (rotacije), dualne brojeve i hiperbolne brojeve, dobivene iz multivektora u *Cl*3.

P*aravektori* u *Cl*3, kao $t + \boldsymbol{x}$ (multivektor sa stupnjevima 0 i 1), nakon kvadriranja opet daju paravektor (provjerite), stoga modul paravektora treba definirati drugačije. Za kompleksne i hiperbolne brojeve (kao i kvaternione) smo imali sličnu poteškoću, pa koristimo konjugacije. Za paravektore ne trebamo nikakvu *ad hoc konjugaciju* jer već imamo Cliffordovu konjugaciju, pa tako definiramo

$$p\bar{p} = (t + \boldsymbol{x})(t - \boldsymbol{x}) = t^2 - x^2 \in \Re,$$

što je točno forma invarijantnog intervala potrebnog u specijalnoj teoriji relativnosti. Podsjetimo da je Cliffordova konjugacija kombinacije involucije *stupnjeva* i *reverz* involucije, pa to možemo pokušati interpretirati geometrijski u $\Re^3$, naime, involucija stupnjeva podrazumijeva inverziju prostora, dok smo za reverz involuciju vidjeli da je povezana s činjenicom da su Paulijeve matrice hermitske matrice.

Da bude potpuno jasno, za paravektor $p = \alpha + \beta e_1$, s $e_1^2 = 1$ imamo prirodnu „hiperbolnu jedinicu“. Slijedi

$$p^2 = (\alpha + \beta e_1)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta e_1,$$

pa smo dobili opet paravektor, s istim smjerom vektorskog dijela, ali

$$p\bar{p} = (\alpha + \beta e_1)(\alpha - \beta e_1) = \alpha^2 - \beta^2 \in \Re.$$

Primijetite da uz Cliffordovu involuciju nema potrebe za negativnom signaturom (Minkowski). Prema formulaciji STR-a koju je dao Minkowski možemo definirati jedinični vektor „u smjeru vremena“ e_0, $e_0^2 = 1$ i tri prostorna vektora e_i, $e_i^2 = -1$, što znači da imamo negativnu signaturu (1, -1, -1, -1). Takav pristup je moguć i u geometrijskoj algebri, imamo STA (space-time algebra, *Hestenes*). Ali, sve što možemo napraviti u STA možemo također i u *Cl*3, bez negativne signature (*Sobczyk, Baylis*). Oni koji tvrde da je negativna signatura nužna u STR su možda u krivu. Neki autori pišu rečenice kao: „*Princip relativnosti nas **prisiljava** da razmotrimo skalarni produkt s negativnim kvadratom vektora*“, zaboravljajući da njihova definicija norme elemenata prejudicira takav rezultat (*Witte*: *Classical Physics with geometric algebra*). Ipak, moguće je opisivati geometriju u nekom prostoru koristeći formalizam prostora više dimenzije, pa bi se moglo reći da je Minkowski učinio upravo to, geometriju 3D prostora je opisao u 4D. Stoga u *Cl*3 trebamo samo tri ortonormalna vektora i jednu involuciju. Vrijeme više nije četvrta dimenzija, samo je realni parametar (kao i u kvantnoj mehanici). Možemo se pitati, ako postoji četvrta dimenzija kako to da se ne možemo gibati slobodno kroz vrijeme kao to to činimo kroz prostor? Postoje i drugi zanimljivi argumenti u korist 3D prostora, primjerice, gravitacijska i elektrostatska interakcija ovise o kvadratu udaljenosti. problematična je i definicija brzine (koju koristimo i u STR): dx/dt? Ako je vrijeme vektor, onda je brzina prirodno bivektor, kao magnetsko polje, a ne vektor. Nije važno što se koristi vlastito vrijeme za definiciju 4-vektora brzine, prostorna brzina je svejedno definirana prethodnom formulom, do na faktor. Minkowski nam je dao lijepu matematičku teoriju, ali njegovi zaključci o četvrtoj dimenziji su puka matematička apstrakcija, široko prihvaćena među fizičarima. U njegovo su vrijeme geometrijske ideje Grassmanna, Hamiltona i Clifforda bile prilično potisnute. Ovo navodi na pitanje što bi Einstein izabrao da je sve to znao? Početkom 20. stoljeća se razvijala još jedna važna teorija, kvantna mehanika, pa Pauli uvodi svoje matrice kako bi formulirao polovični spin, već smo to komentirali. Diracove matrice su također reprezentacija jedne od Cliffordovih algebri, ali opet, Diracova teorija ima lijepu formulaciju u *Cl*3 (*Baylis*), kao što ima i minimalni standardni model u *Cl*7 (*Baylis*) ... Nije bez utemeljenosti pitanje o smislu uvođenja vremena kao četvrte dimenzije. Uobičajeni argument koji je dao i Minkowski zapravo i nije argument, samo je zapažanje da u STR invarijantni interval nije dt^2+dx^2 već je dt^2-dx^2. Ali vidimo da je takav invarijantni interval lako dobiti u *Cl*3, uz potpuno prirodne zahtjeve za množenje vektora. Minkowski je uveo četvrtu dimenziju *ad hoc*. Kada bi njegov formalizam bio nedvojbeno **jedini moguć** za formulaciju STR-a imali bismo čvrsto uporište u vjerovanju da zaista mora postojati četvrta vremenska dimenzija. Bez tog uvjeta, uz saznanje da postoji prirodan način da se formulira teorija bez četvrte dimenzije, teško se oduprijeti utisku da široko rasprostranjena mantra o četvrtoj dimenziji nema čvrsto uporište. Prema nekim autorima, jedna od poteškoća u formuliranju kvantne gravitacije je vjerojatno postojanje četvrte vremenske dimenzije u formalizmu. Ovdje ćemo pokazati formalizam STR-a koristeći paravektore koji definiraju 4D linearni prostor, ali je vrijeme identificirano kao realni skalar, kažemo da je vrijeme realni parametar. Bilo bi zanimljivo istražiti postoji li bilo kakav pokus koji bi nedvojbeno pokazao postojanje vremenske dimenzije. Vjerojatno, ne postoji takav pokus. Stoga je teško oteti se dojmu kako fizičari vežu ritualnu mačku tijekom meditacije. Ali budućnost će pokazati, možda vremenska dimenzija postoji, možda i nekoliko njih (ako vrijeme uopće postoji). U svakom slučaju, nije istina da je prostor Minkowskog jedini ispravan okvir za formulaciju STR-a. Posebno, **nije istina** da u STR **moramo** uvoditi vektore čiji kvadrat je negativan.

Izabrat ćemo sustav jedinica u kojemu je $c=1$. U geometrijskoj algebri kombiniramo različite geometrijske objekte koji mogu imati različite fizičke jedinice. Stoga uvijek biramo sustav jedinica koji sve svodi na jednu jedinicu (obično jedinicu duljine). Tako se koncentriramo na geometrijske odnose, što je ovdje cilj. U primjenama na posebnu situaciju (pokus) jednostavno konvertiramo fizičke jedinice (analiza fizičkih jedinica), pa s tim nema poteškoća.

Polazeći od invarijantnog intervala u STR-u $t^2-x^2=\tau^2$, gdje je τ invarijantno *vlastito vrijeme* u sustavu čestice, slijedi

$$t^2-x^2=t^2\left(1-v^2\right)=\tau^2 \Rightarrow t^2/\tau^2=1/\left(1-v^2\right)=\gamma^2,$$

gdje je γ poznati relativistički faktor. Sada, umjesto 4-vektora brzine, definiramo *vlastitu brzinu* (paravektor) $u\equiv\gamma\left(1+\mathbf{v}\right)$, koja je u sustavu mirovanja jednostavno $u_0=1$. Primijetite da vlastita brzina nije lista koordinata, kao što je 4-vektor brzine, ali ima istu ulogu. Očigledno je $u\bar{u}=1$. Zamislimo da mirno tijelo želimo promatrati u ISR-u u kojemu ima brzinu $\mathbf{v}$ (boost). Recept je jednostavan: napravite geometrijski produkt od dvije vlastite brzine $u_0 \to u_0 u = u$. Za niz „boost"-ova imamo niz transformacija

$$u_0 \to u_0 u_1 \to u_0 u_1 u_2 = u_1 u_2 .$$

Uočite kako je ovo zaista lako za računanje te da iz oblika paravektora vlastite brzine odmah vidimo relativistički faktor γ i 3D vektor brzine $\boldsymbol{v}$. Primjerice, neka su vektori brzine paralelni s e_1, imamo

$$\gamma_1(1+v_1e_1)\gamma_2(1+v_2e_1)=\gamma_1\gamma_2(1+v_1v_2+(v_1+v_2)e_1)=\gamma_1\gamma_2(1+v_1v_2)\left(1+\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}e_1\right),$$

pa iz oblika paravektora (dijelovi su obojeni) odmah čitamo

$$\gamma=\gamma_1\gamma_2(1+v_1v_2),\quad \boldsymbol{v}=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}e_1,$$

što su poznati rezultati u STR-u (relativističko zbrajanje brzina). Primijetite kako geometrijski produkt omogućuje brzo izvođenje formula i, kako je već objašnjeno, dobivene formule su tek specijalni slučajevi općih formula u *Cl*3. Tako, iz polarne forme multivektora

$$M=\rho(\cosh\varphi+\boldsymbol{f}\sinh\varphi)=\rho\gamma(1+\vartheta\boldsymbol{f}),\quad \gamma^{-1}=\sqrt{1-\vartheta^2},$$

svodeći na realni dio multivektora (paravektori) imamo

$$\gamma=\cosh\varphi\ ,\ \gamma v=\sinh\varphi,\quad u=\cosh\varphi+\hat{\boldsymbol{v}}\sinh\varphi=\cosh\varphi(1+\hat{\boldsymbol{v}}\tanh\varphi)=\exp(\varphi\hat{\boldsymbol{v}}).$$

Koristeći spektralnu dekompoziciju dobijemo

$$\gamma(1+v\hat{\boldsymbol{v}})=k_+u_++k_-u_-\Rightarrow k_\pm=\gamma(1\pm v)=\cosh\varphi\pm\sinh\varphi,$$

pa ako definiramo implicitno faktor k (*Bondi faktor*) $\varphi\equiv\ln k$ iz definicija hiperbolnih sinusa i kosinusa imamo

$$k^{\pm1}=\cosh\varphi\pm\sinh\varphi,\quad k=\sqrt{(1+v)/(1-v)},\quad u=ku_++k^{-1}u_-.$$

Naš raniji primjer s dva "boost"-a paralelna s e_1 sada imaju oblik

$$u_1u_2=(k_1u_++u_-/k_1)(k_2u_++u_-/k_2)=k_1k_2u_++u_-/(k_1k_2),$$

tj. relativističko zbrajanje brzina je ekvivalentno množenju Bondi faktora: $k=k_1k_2$.

Primjer: U sustavu S_1 se giba brod brzinom v, u sustavu broda se giba drugi brod brzinom v itd, sve u istom smjeru. Nađite brzinu v_n *n*-tog broda u S_1. Diskutirajte rješenje za $n\to\infty$?

Rješenje:

Neka je $k_1=\sqrt{(1+v)/(1-v)}$, tada je $k_n=\sqrt{(1+v_n)/(1-v_n)}=k_1^n=\left(\sqrt{(1+v)/(1-v)}\right)^n$, odakle nalazimo traženu brzinu v_n.

Ako vektori brzine ne leže u istom smjeru u izrazima se može pojaviti verzor $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$, što može izgledati kao komplikacija, ali zapravo omogućuje nove mogućnosti za istraživanje, primjerice, lako se dobije Thomasova precesija (pogledajte [14]), skrivena neko vrijeme, ali okvir teksta traži da se zaustavimo ovdje.

Lorentzove transformacije

Sada smo spremni komentirati Lorentzove transformacije (LT, restricted). Općenito, LT se sastoje od „boost“-ova B i rotora R. Možemo pisati (pogledajte [22]) sasvim općenito $L=BR$,

$L\bar{L} = 1$ (uvjet *unimodularnosti*). Ovaj uvjet možemo tretirati kao *definiciju* Lorentzovih transformacija, što je dobro istraženo i opravdano. Definiramo li (pogledajte iznad)

$$B = \cosh(\varphi/2) + \hat{\boldsymbol{v}}\sinh(\varphi/2) = e^{\varphi\hat{\boldsymbol{v}}/2}, \quad R = \cos(\theta/2) - j\hat{\boldsymbol{w}}\sin(\theta/2) = e^{-j\hat{\boldsymbol{w}}\theta/2},$$

(jedinični vektor $\hat{\boldsymbol{w}}$ definira rotacijsku os) možemo pisati LT nekog elementa, recimo vektora, kao

$$p' = LpL^{\dagger} = BRpR^{\dagger}B^{\dagger}.$$

Postoji mogućnost da L napišemo kao

$$L = e^{\varphi\hat{\boldsymbol{v}}/2 - j\hat{\boldsymbol{w}}\theta/2} \neq e^{\varphi\hat{\boldsymbol{v}}/2}e^{-j\hat{\boldsymbol{w}}\theta/2},$$

ali moramo biti oprezni zbog opće ne-komutativnosti vektora u eksponentu (pogledajte [19]). Međutim, uvijek je moguće naći (koristeći logaritme) vektore $\hat{\boldsymbol{v}}'$ i $\hat{\boldsymbol{w}}'$ koji zadovoljavaju relaciju

$$L = e^{\varphi\hat{\boldsymbol{v}}/2 - j\hat{\boldsymbol{w}}\theta/2} = e^{\varphi\hat{\boldsymbol{v}}'/2}e^{-j\hat{\boldsymbol{w}}'\theta/2}.$$

Zgodno je u primjeni rastaviti element koji želimo transformirati na komponente paralelne i okomite na $\hat{\boldsymbol{v}}$ ili $\hat{\boldsymbol{w}}$ te iskoristiti komutacijska svojstva. Za detaljniji pregled pogledajte Baylisove članke o APS (algebra of physical space, *Cl*3). U [22] možete naći lijepo poglavlje o STR-u.

Vidimo da su rotacije prirodan dio LT-a, pa formalizam geometrijske algebre može ponuditi puno mogućnosti zbog moćnih tehnika s rotacijama. Kasnije u tekstu ćemo prodiskutirati neke moćne tehnike sa spinorima (*eigenspinors*).

Proširene Lorentzove transformacije. Granica brzine?

Ovo poglavlje je **spekulativno**, sa zanimljivim posljedicama (**nove očuvanje veličine i promjena granične brzine u prirodi**). Oni slabijeg srca neka ovo shvate kao matematičku vježbu.

Ranije smo definirali (kvadratičnu) amplitudu MA kao

$$M\bar{M} = |M|^2 = t^2 - x^2 + n^2 - b^2 + 2j(tb - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}) \in \mathbb{C},$$

i pokazali njezina svojstva. Pogledajmo sada opću bilinearnu transformaciju $M' = XMY$ koja čuva MA (pogledajte [11]):

$$M' = XMY \Rightarrow M'\bar{M}' = XMY\bar{Y}\bar{M}\bar{X} = |M|^2|X|^2|Y|^2,$$

pa imamo dvije mogućnosti

$$|X|^2 = |Y|^2 = \pm 1,$$

što daje

$$X = e^{Z+\boldsymbol{F}} \Rightarrow |X|^2 = e^{Z+\boldsymbol{F}}e^{Z-\boldsymbol{F}} = e^{2Z} = \pm 1,$$

pa ćemo izabrati (za sada) mogućnost 1 i $Z = 0$, iako smo mogli promotriti i $Z = j\pi/2$. Sada opće transformacije imaju oblik

$$M' = XMY = e^{\vec{p}+j\vec{q}}Me^{\vec{r}+j\vec{s}},$$

što daje 12 parametara iz četiri vektora u eksponentima.

Pitanje je kakav motiv imamo za promatranje ovakvih transformacija. Elementi geometrijske algebre su linearne kombinacije jediničnih listova Cliffordove baze, a svaki od tih listova zapravo definira neki potprostor. Ako se ograničimo samo na realni dio multivektora (paravektori) stavljamo u privilegiranu poziciju potprostore realnih brojeva (stupanj 0) i vektora (stupanj 1). Ideja je da svi potprostori budu tretirani jednako. Zapravo, cijela ova struktura je bazirana na novom množenju vektora, pa manipulirajući s multivektorima mi zapravo manipuliramo potprostorima. Zbrajanje vektora i bivektora je zapravo operacija koja uspostavlja relaciju među potprostorima i to je važno za razumjeti. Ako potprostore tretiramo jednako moramo razmotriti sve moguće transformacije potprostora i sve moguće simetrije, a one su više nego što klasične (restricted) Lorentzove transformacije impliciraju. Čitatelj bi sada mogao zastati i razmisliti malo o rečenom. Podsjetimo da simetrija u vremenu daje zakon očuvanja energije, translacijska invarijantnost daje zakon očuvanja količine gibanja, itd. Gdje se trebamo zaustaviti, i zašto? Ako zaista prihvaćamo prirodnost novog množenja vektora moramo prihvatiti i posljedice takvog množenja, a one govore o neobično bogatoj strukturi našeg starog dobrog 3D euklidskog prostora. Istina, konačan sud će dati pokusi (nadati se).

Pogledamo li invarijantnu MA izraženu u dva referentna sustava možemo usporedbom realnog i imaginarnog dijela dobiti

$$t^2 - x^2 + n^2 - b^2 = t'^2 - x'^2 + n'^2 - b'^2 ,$$

$$tb - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = t'b' - \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{n}' .$$

Diferencijal multivektora

$$dX = dt + d\boldsymbol{x} + jd\boldsymbol{n} + jdb$$

daje MA

$$\left|dX\right|^2 = dt^2 - dx^2 + dn^2 - db^2 + 2j\left(dbdt - d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{n}\right),$$

pa možemo pokušati naći uvjete za postojanje **realnog** vlastitog vremena. Postoje mnogi razlozi za definiranje realno vlastitog vremena, primjerice, omogućuje jednostavnu definiciju poopćene brzine. Tipično, u STR-u biramo sustav mirovanja. Ovdje, zbog dodatnih elemenata (osim brzine), to neće biti dovoljno, jer želimo (τ je vlastito vrijeme)

$$\left|dX\right|^2 = dt^2 - dx^2 + dn^2 - db^2 + 2j\left(dbdt - d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{n}\right) = d\tau^2 \in \Re .$$

Prvi uvjet za realno vlastito vrijeme je svakako nestajanje imaginarnog dijela MA u u svakom sustavu (podsjetimo da je MA invarijanta i ne može imati imaginarni dio u jednom sustavu a u drugom ne). Ovo znači da mora biti u svakom referentnom sustavu

$$dbdt - d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{n} = dt^2\left(d\dot{b} - d\dot{\boldsymbol{x}} \cdot d\dot{\boldsymbol{n}}\right) = dt^2\left(h - d\dot{\boldsymbol{x}} \cdot d\dot{\boldsymbol{n}}\right) = 0 \Rightarrow h = d\dot{\boldsymbol{x}} \cdot d\dot{\boldsymbol{n}}, \quad d\dot{b} \equiv h ,$$

uz uobičajenu oznaku $dx/dt \equiv \dot{x}$, što vodi na $h' = d\dot{\boldsymbol{x}}' \cdot d\dot{\boldsymbol{n}}'$. Definiramo li $d\dot{\boldsymbol{x}} \equiv \boldsymbol{v}$, $\dot{\boldsymbol{n}} \equiv \boldsymbol{w}$, slijedi $h = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{w}$ dolazi iz bivektorskog dijela multivektora, pa očekujemo da je povezan s veličinom kao angularni moment, tada bi h mogao biti tok takve veličine, slično kao što je tok definiran za protjecanje tekućine u cijevima. Razlika je u tome da se bivektori ne transformiraju kao površine (pogledajte [11]).

Razmatrajući invarijantnost MA i realno vlastito vrijeme imamo

$$\left|dX\right|^2 = \left|dX'\right|^2 = d\tau^2 = dt^2 - dx^2 + dn^2 - db^2 \Rightarrow$$

$$1 = \frac{dt^2}{d\tau^2}\left(1 - \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dn^2}{dt^2} - \frac{db^2}{dt^2}\right) = \gamma^2\left(1 - v^2 + w^2 - h^2\right),$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2 + w^2 - \left(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}\right)^2} = 1/\sqrt{1 - v^2 + w^2 - w^2v^2\cos^2\alpha} .$$

Primijetite da naš relativistički faktor γ ima doprinose od svih potprostora. Bilo bi prirodno zahtijevati da „sustav mirovanja“ (s uvjetom $v = 0$) bude zamijenjen s $\gamma = 1$, to bi značilo da ne gledamo mirne čestice, već imamo

$$-v^2 + w^2 - w^2v^2\cos^2\alpha = 0 \Rightarrow v = w/\sqrt{1 + w^2\cos^2\alpha} .$$

Ovo nije teško prihvatiti, jer što ako brzina čestice ne može biti nula? Primjerice, kako pomiriti principe kvantne mehanike i ideju potpuno mirnog elektrona? Uključenjem svih potprostora i svih veličina koje su s njima povezane slijedi da „sustav mirovanja“ postaje nešto kao sustav „centra energije-impulsa-angularnog momenta“, itd.

Relativistički faktor γ je definiran kao omjer dva realna vremena, pa mora biti realan broj, što nam daje uvjet

$$1-v^2+w^2-w^2v^2\cos^2\alpha>0\Rightarrow v_{\max}<\sqrt{\frac{1+w^2}{1+w^2\cos^2\alpha}}.$$

Ovo je potpuno novi rezultat: granična brzina je 1 za $w=0$ ili za $\cos\alpha=\pm1$, inače je veća od 1. Ovaj rezultat je u geometrijskoj algebri dobiven i drugdje (*Pavšić*, koristeći C-algebre, ali je autor do rezultata došao neovisno, u komentaru članak [12]). Što bi moglo biti fizikalno značenje ovoga? Promotrimo elektron, koji svakako nije „mala kuglica“ (sjetimo se velikog Ruđera Boškovića i njegovih točkastih izvora sile), naime, ima spin, a spin je upravo „kao angularna količina gibanja“ veličina. Možemo li tretirati relativistički elektron kao neki Einsteinov relativistički vlak? Vjerojatno ne! u očima geometrije je teško prihvatiti da je elektron samo mala kuglica sa spinom upakiranim u nju, kao vlak s putnicima u njemu. Relativističke formule za vlak ne ovise o tipu tereta u njemu. Ali spin vjerojatno nije samo "teret", više je geometrijsko svojstvo, pa bi trebao biti dio transformacija. **Ako** su upravo izvedene formule primjenjive na elektron njegova granična brzina će ovisiti o orijentaciji spina u odnosu na vektor brzine. Štoviše, brzina za danu energiju će ovisiti o orijentaciji spina, pa će elektroni s istom energijom ali različitim orijentacijama stizati na cilj u različita vremena. Možda netko u budućnosti obavi takav pokus, pozitivan rezultat bi svakako značajno promijenio naše današnje poimanje relativnosti. Posebno bi bilo zanimljivo vidjeti kako se elektroni ponašaju u kvantnom tuneliranju, jer postoje sugestije nekih autora da se elektron možda giba brzinama većim od 1. Ovo se obično pokušava formulirati uvođenjem kompleksnih brojeva, stvaranjem cijele filozofije oko toga, iako se vjerojatno samo radi o neadekvatnoj matematici. Međutim, teško je biti siguran.

Sada kad imamo (invarijantno, realno) vlastito vrijeme možemo definirati multivektor poopćene brzine

$$V=\frac{dX}{d\tau}=\frac{dt}{d\tau}+\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}+j\frac{d\mathbf{n}}{dt}\frac{dt}{d\tau}+j\frac{db}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\gamma\left(1+\mathbf{v}+j\mathbf{w}+jh\right),$$

s invarijantnom amplitudom

$$V\bar{V}=1\Rightarrow\frac{d\left(V\bar{V}\right)}{d\tau}=\frac{dV}{d\tau}\bar{V}+V\frac{d\bar{V}}{d\tau}=0,$$

što je oblik uvjeta ortogonalnosti poopćene brzine poopćene akceleracije. Množenjem poopćene brzine s masom dobijemo poopćenu količinu gibanja

$$P=mV=E+\mathbf{p}+j\mathbf{l}+jH,\quad P\bar{P}=E^2-p^2+l^2-H^2=m^2.$$

Ovo se bitno razlikuje od uobičajene formule za energiju-količinu gibanja $E^2-p^2=m^2$. Pojavljuju se dvije dodatne očuvane veličine, od kojih je posljednja (H) sasvim nova ([11]). Prema uvjetima našeg izvoda mora biti $H=\gamma mh=\mathbf{l}\cdot\mathbf{v}$, pa je nova očuvana veličina primjer *toka*, pa imamo konačno

$$P\bar{P}=E^2-p^2+l^2-\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{v}\right)^2=m^2.$$

Ako je ovo fizikalno, gibanje čestica sa spinom bi trebalo zadovoljiti zakon očuvanja toka, ideja koja su neki autori već iznijeli (nažalost, zaboravio sam izvor!). Brzina čestice će općenito biti veća s $\mathbf{w}$ nego bez njega za danu energiju, što možemo zaključiti iz prethodne formule: dodavanje pozitivnog člana negativnom kvadratu količine gibanja daje mogućnost povećanja brzine. Uvjerimo se u to direktno

$$\gamma = E/m = 1/\sqrt{1 - v^2 + w^2 - (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})^2} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{1 + w^2 - m^2/E^2}{1 + w^2\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1 + (l/E)^2 - m^2/E^2}{1 + (l/E)^2\cos^2\alpha}} \geq \sqrt{1 - m^2/E^2}\,.$$

Primijetimo na kraju da se sve izneseno lako svodi na klasičnu teoriju relativnosti, treba samo odbaciti imaginarni dio multivektora, pa preostaju paravektori. Sve "čudne" posljedice jednostavno nestanu. Naravno, postoje brojne mogućnosti da se vrijeme tretira drugačije, ali nećemo o tome ovdje (pogledajte ([11] i ([12] za interesantnu diskusiju).

Elektromagnetsko polje u geometrijskoj algebri

Ovdje nećemo iznositi cijelu EM teoriju u *Cl*3 (pogledajte *Hestenes*, *Baylis*, *Chappell*, *Jancewicz*), samo ćemo komentirati nekoliko ideja. U formalizmu geometrijske algebre, za elektromagnetski (EM) val u vakuumu definiramo

$$E = B,\ \boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B},\ \ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + j\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{F}^2 = 0, \quad c = 1,$$

pa je kompleksni vektor $\boldsymbol{F}$ *nilpotent*. Primijetite da je član s magnetskim poljem bivektor. Korisno je raspisati bivektor magnetskog polja u ortonormiranoj bazi, pa ako krenemo od vektora magnetskog polja

$$\boldsymbol{B} = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3$$

dobijemo bivektor

$$j\boldsymbol{B} = j\left(B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3\right) = B_3 e_1 e_2 + B_2 e_3 e_1 + B_1 e_2 e_3\,.$$

Čitatelj bi trebao provjeriti ovaj jednostavan izraz i pokušati stvoriti mentalnu sliku. Također, možemo predstaviti bivektore koristeći paralelograme, pa provjeriti kako se zbrajaju grafički (slika pored glavnog naslova). *GAViewer* može puno pomoći. Iako ovo može izgledati kao "zgodan trik", ovdje ćemo pokušati pokazati da je bivektor, kao geometrijski objekt, potpuno primjeren za opis magnetskog polja, zapravo, fizikalna svojstva magnetskog polja **zahtijevaju** da bude tretirano kao bivektor. U bilo kojem formalizmu koji ne podrazumijeva postojanje bivektora (kao Gibbsov vektorski formalizam na jeziku skalarnog i vektorskog produkta) moraju se javljati problematične situacije. Ovdje ćemo diskutirati problem Maxwellove teorije i zrcalne simetrije, kao primjer. Ako koristimo koordinatni pristup, tada u 3D možemo uvesti bogatiju strukturu uvodeći tenzore. Pogledajmo citat iz članka (Jancewicz): *Sustav jedinica kompatibilan s geometrijom*, 2004:

„Za trodimenzionalni opis, potrebni su antisimetrični kontravarijantni tenzori ranga od nula do tri (poznati su kao multivektori) kao i antisimetrični kovarijantni tenzori ranga od nula do tri (poznati kao vanjske forme). To daje ukupno osam tipova usmjerenih veličina.“

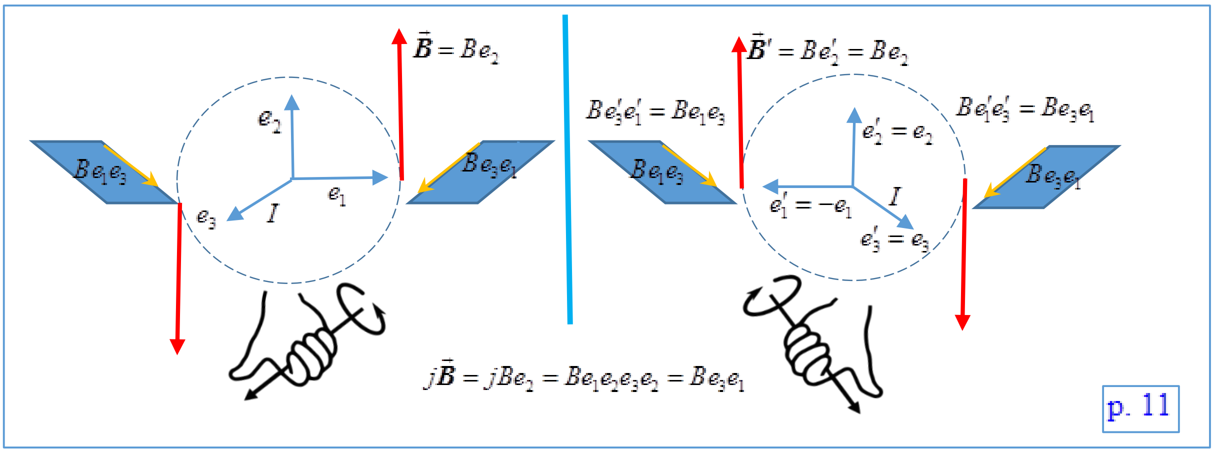
Tako, primjerice, aksijalni vektori (kao vektorski produkt) postaju antisimetrični tenzori drugog ranga. Cijela ova geometrijska struktura postaje jednostavna i intuitivna u geometrijskoj algebri, bez potrebe za uvođenjem koordinata (ovdje često uvodimo bazu, ali samo zbog jednostavnijeg razumijevanja teksta i nije nužno). Zbog neovisnosti o bazi, prestaje biti važno, primjerice, radimo li u desnom ili lijevom koordinatnom sustavu, geometrijski produkt se brine o svemu. Za dva vektora bismo mogli imati izraze kao $\boldsymbol{ab} \pm \boldsymbol{ba}$ i ne moramo koristiti bilo koju bazu da vidimo radi li se o skalaru ili bivektoru, u bilo kojoj dimenziji.

Maxwellova elektromagnetska teorija je prva fizikalna teorija koja je od početka zadovoljila postulat(e) specijalne teorije relativnosti. Nije stoga čudno da se obje teorije lijepo daju opisati u *Cl*3.

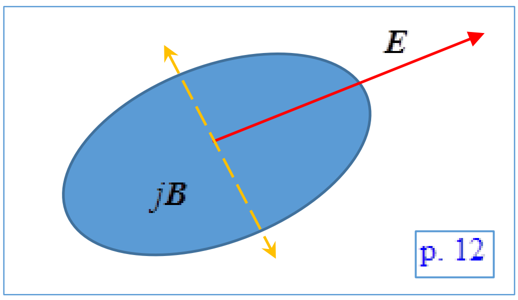
Pogledajmo nekoliko činjenica vezanih uz teoriju izraženu na jeziku geometrijske algebre. Primjerice, možemo vizualizirati rješenja za elektromagnetski val u vakuumu ([22]) pomoću jednostavne i zanimljive slike, naime, valni vektor $\boldsymbol{k}$ je paralelan vektoru smjera nilpotenta $\boldsymbol{F}$, pa rješenje za $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{x}$ možemo napisati kao

$$\boldsymbol{F}_0 e^{\pm jkx} e^{j\omega t}, \quad \boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{E}_0 + j\boldsymbol{B}_0 .$$

Možemo zamisliti prostorni dio vala $\boldsymbol{F}_0 e^{\pm jkx}$ kao prostorno periodičnu **mirnu** spiralu koja se prostire duž smjera propagacije vala. Ova "spirala" je nilpotent jer je proporcionalna s $\boldsymbol{F}_0$. Pokazuje se da (vidjeti dalje u tekstu) rotacija nilpotenta oko njegovog smjera može biti ostvareno množenjem s kompleksnom fazom, kao $e^{j\omega t}$, pa imamo spiralu u prostoru koja rotira oko smjera prostiranja vala. Bivektorski dio $j\boldsymbol{B}$ definira ravninu okomitu na $\boldsymbol{B}$, tako da vektor $\boldsymbol{E}$ pripada toj ravnini. Bivektor $j\boldsymbol{B}$ daje mogućnost za proučavanje elektromagnetskih fenomena potpunije i elegantnije nego s (aksijalnim) vektorom $\boldsymbol{B}$.



Pogledajmo još neka svojstva EM polja u vakuumu. Maxwellove jednadžbe su potpuno zrcalno-simetrične na jeziku geometrijske algebre, kao i njihova rješenja. Kada koristimo vektorski produkt odmah moramo uvesti pravilo desne ruke, pa vidimo da imamo pravilo lijeve ruke u zrcalu. Ako postavimo slike (original i onu u zrcalu , p. 11) jednu preko druge one se ne poklapaju, vektori stoje pogrešno. međutim, ako vektore (aksijalne) magnetskog polja zamijenimo bivektorima, slike se točno podudaraju. I, naravno, ne trebamo pravilo desne ruke, kako je već objašnjeno, geometrijski produkt se brine o svemu. Jasno je će da oni koji su dugo razmišljali na jeziku "vektori-pravilo desne ruke" teže prihvatiti novu paradigmu. naučeni smo razmišljati o strelicama, pa treba razviti intuiciju za objekte koji nisu vektori ili skalari. Geometrija je jezik fizike više nego što smo sanjali.



Vektor $\boldsymbol{E}$ pripada ravnini definiranoj bivektorom $j\boldsymbol{B}$. Površina kruga koji reprezentira bivektor je B, pa ima polumjer $\sqrt{B/\pi} \approx 0.56\sqrt{B}$. Smjer i moguće orijentacije širenja vala su prikazani na p. 12.

Ova slika je rotirana oko smjera širenja vala za kut ovisan o položaju ($\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$), to daje statičnu sliku u prostoru. Veće je rečeno, cijela ova prostorna slika rotira ovisno o vremenu i frekvenciji vala (ω). Posljednju tvrdnju čitatelj može provjeriti ako uzme nilpotent $e_1 + je_2$ i pomnoži ga s kompleksnom fazom $e^{j\varphi}$. Odmah se dobije matrica rotacije oko z-osi. Možemo elegantno rotirati cijelu sliku, pa ovaj primjer nije na bilo koji način poseban.

Za bilo koji kompleksni vektor $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} + j\boldsymbol{w}$ u *Cl*3 vrijedi

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger} = (\boldsymbol{v} + j\boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} - j\boldsymbol{w}) = v^2 + w^2 - 2j\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w} = v^2 + w^2 + 2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w},$$

pa ako uzmemo kompleksni vektor elektromagnetskog polja u vakuumu (nilpotent) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + jc\boldsymbol{B}$, gdje privremeno koristimo SI sustav jedinica, dobijemo

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger} = E^2 + c^2B^2 + 2c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}.$$

Sada slijedi

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 c\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger} = c\xi + \boldsymbol{S},$$

gdje je

$$\xi = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^2 + c^2B^2\right),$$

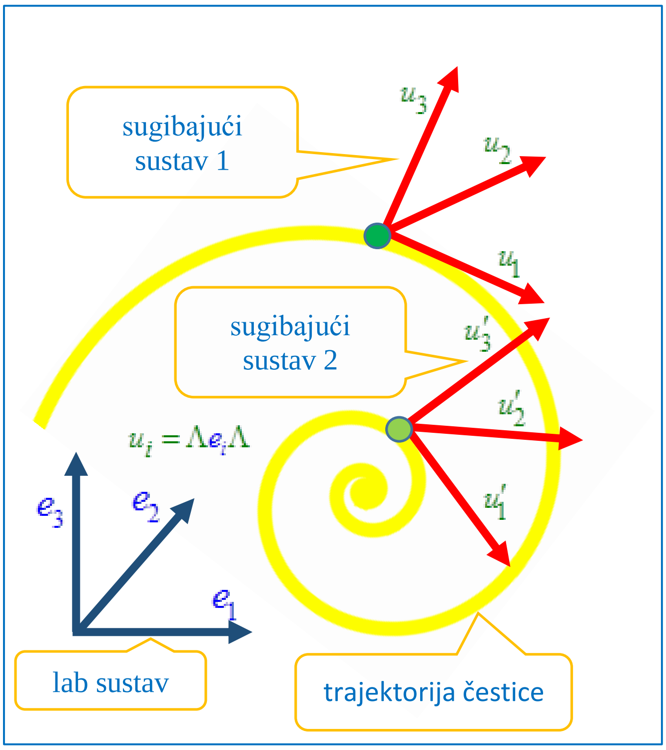
$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0.$$

Ovdje je ξ gustoća energije a $\boldsymbol{S}$ je gustoća toka energije, poznata kao *Poynting vektor*. Znači, Poynting vektor je proporcionalan vektoru smjera nilpotenta. Primijetite također da je općenito

$$\boldsymbol{F}^2 = E^2 - c^2B^2 + 2jc\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$$

kompleksni skalar koji možemo iskoristiti za klasifikaciju pola (u vakuumu je nula).

Eigenspinori



Razmotrimo još jednu elegantnu i moćnu tehniku opisivanja gibanja relativističkih čestica ([5], [6], [7]). Zamislimo laboratorijski sustav i sustav koji je vezan za česticu u gibanju pod utjecajem, primjerice, elektromagnetskog polja. Razmotrit ćemo ovdje samo paravektore i Lorentzove transformacije (restricted). U svakom trenutku možemo naći transformaciju koja elemente prevodi iz laboratorijskog sustava u sugibajući inercijalni sustav koji se podudara sa sustavom čestice u nekom trenutku (*commoving frame*). Vlastita brzina u laboratorijskom sustavu je $u_0 \equiv e_0 = 1$, pa u svakom trenutku možemo dobiti vlastitu brzinu čestice kao

$$u = \Lambda e_0 \Lambda^{\dagger},$$

gdje je Λ Lorentzova transformacija, nazvana *eigenspinor* zbog specijalnog izbora inercijskog sustava. Spomenimo usput da primjenom ovakve transformacije na ortonormalne bazne vektore

$u_\mu = \Lambda e_\mu \Lambda^\dagger,\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ dobijemo tzv. *Frenet tetrad*. Podsjetimo, za Lorentzove transformacije vrijedi $\Lambda\bar{\Lambda} = 1$ (unimodularnost). Ako je eigenspinor Λ poznat u svakom trenutku imamo sve informacije potrebne za opis gibanja čestice. Eigenspinori se mijenjaju u vremenu, prvu derivaciju po vremenu

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}\bar{\Lambda}\Lambda \equiv \boldsymbol{\Omega}\Lambda / 2, \quad \boldsymbol{\Omega} = 2\dot{\Lambda}\bar{\Lambda}.$$

Ovo izgleda kao trivijalna relacija, ali nije. Vrijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\Lambda\bar{\Lambda}\right) = 0 = \dot{\Lambda}\bar{\Lambda} + \Lambda\dot{\bar{\Lambda}},$$

pa koristeći $\overline{\dot{\Lambda}\bar{\Lambda}} = \Lambda\dot{\bar{\Lambda}} = -\dot{\Lambda}\bar{\Lambda}$ vidimo da je $\boldsymbol{\Omega}$ kompleksni vektor (zbog toga je u bold formatu). Za prvu derivaciju vlastite brzine po vremenu dobijemo

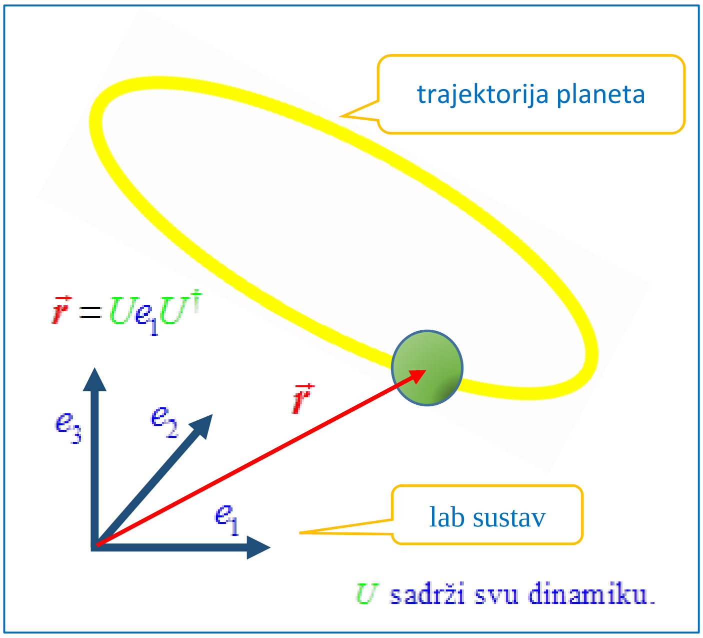
$$\dot{u} = \dot{\Lambda}e_0\Lambda^\dagger + \Lambda e_0\dot{\Lambda}^\dagger = \dot{\Lambda}\bar{\Lambda}\Lambda e_0\Lambda^\dagger + \left(\dot{\Lambda}\bar{\Lambda}\Lambda e_0\Lambda^\dagger\right)^\dagger = \frac{\boldsymbol{\Omega}u + \left(\boldsymbol{\Omega}u\right)^\dagger}{2} = \left\langle \boldsymbol{\Omega}u \right\rangle_R,$$

što je paravektor. Lorentzova sila (pogledajte [8]) je sada

$$\dot{p} = m\dot{u} = e\left\langle \boldsymbol{F}u \right\rangle_R, \ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + j\boldsymbol{B},$$

pa vidimo kako je upravo definirani $\boldsymbol{\Omega}$ dobio fizikalno značenje: proporcionalan je kompleksnom vektoru elektromagnetskog polja $\boldsymbol{F}$. Iznenađujuće je kako se elektromagnetska teorija jednostavno i prirodno formulira u *Cl*3. A to nije samo izolirani primjer. Geometrijski produkt čini geometriju našeg 3D svijeta prirodnim okvirom za fiziku. Netko tko dobro poznaje geometrijsku algebru, ali ne zna ništa o elektromagnetizmu, vjerojatno bi mogao otkriti elektromagnetsko polje kao čisto geometrijski objekt. Gibbsovi skalarni i vektorski produkti a onda i cijeli aparat teorijske fizike s koordinatama, matricama, tenzorima ... zamaglili su cijelu sliku, puno.

Ovaj kratak osvrt na eigenspinore bi trebao ukazati na moćnu i elegantnu tehniku koja široko primjenjiva, osim elektromagnetizma, primjerice, u kvantnoj mehanici.



Spinorne jednadžbe

Znajući radijus-vektor čestice u 2D možemo pisati

$$\boldsymbol{r} = e_1x + e_2y = e_1r\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}e_1e_2\right)$$
$$= re_1\exp\left(\varphi e_1e_2\right).$$

Vidjeli smo da ovakav izraz ne može biti poopćen na više dimenzije, ali poopćavanje postaje lako ako sve napišemo u "sendvič" formi

$$\boldsymbol{r} = Ue_1U^\dagger.$$

Što smo napisali? U 2D, U je kompleksan broj s imaginarnom jedinicom e_1e_2, ali općenito može biti tretiran kao *spinor* (za definiciju spinora pogledajte literaturu, ovdje pojam „spinor“ gledamo kao element parnog dijela *Cl*3, ili jednostavno, kao rotor s dilatacijom). Primijetite da polazeći od jediničnog vektora e_1 možemo dobiti bilo koji vektor u ravnini definiranoj bivektorom e_1e_2, gdje specijalni izbor vektora i bivektora nije važan. Ove relacije se lako poopćavaju na više dimenzije. Ako spinor U ovisi o vremenu sva dinamika je sadržana u spinoru. Ovo je snažna tehnika za opis različitih vrsta gibanja, što ćemo još vidjeti dalje u tekstu. Pokazuje se da jednadžbe gibanja, kao po pravilu, lakše rješavamo u obliku s U umjesto s $\boldsymbol{r}$.

Primijetite da za kompleksni broj U dobijemo kompleksnu konjugaciju kao $U^\dagger$. Modul od $\boldsymbol{r}$ je jednostavno $r=\sqrt{\boldsymbol{r}^2}$, tj. $r=UU^\dagger$. Vremenska promjena vektora $\boldsymbol{r}$ je dana prvom derivacijom od $\boldsymbol{r}=Ue_1U^\dagger$, što je općenito ispravan pristup. U 2D, zbog jednostavnosti, deriviramo U^2e_1, tj.

$$\dot{\boldsymbol{r}}=2\dot{U}Ue_1 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}e_1=2\dot{U}U \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}e_1U^\dagger=2r\dot{U}\,.$$

Uvodeći novu varijablu

$$\frac{d}{ds}=r\frac{d}{dt},\quad \frac{dt}{ds}=r$$

i koristeći $\frac{dU}{ds}=U'$, dobijemo novu jednadžbu za U

$$2U'=\dot{\boldsymbol{r}}Ue_1,$$

pa derivirajući još jedanput imamo

$$2U''=r\ddot{\boldsymbol{r}}Ue_1+\dot{\boldsymbol{r}}U'e_1=U\left(\ddot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r}+\dot{\boldsymbol{r}}^2/2\right).$$

Kao konkretan problem izabiremo gibanje tijela pod djelovanjem centripetalne sile (*Keplerov problem*)

$$\mu\,\ddot{\boldsymbol{r}}=-k\boldsymbol{r}r^{-3},$$

gdje je μ reducirana masa, a k je konstanta. Jednadžba za U sada postaje

$$U''=\frac{1}{2\mu}U\left(\frac{\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}-\frac{k}{r}\right)=\frac{E}{2\mu}U\Rightarrow$$
$$U''=\kappa U,\quad \kappa=const,$$

gdje smo uveli ukupnu energiju E. Ovo je dobro poznata i relativno jednostavna jednadžba, koja za vezana stanja ($E<0$) uzima formu jednadžbe harmoničkog oscilatora. Mnoge su prednosti ovakvog pristupa, kao jednostavnije rješavanje konkretnih jednadžbi, bolja stabilnost rješenja (nema singularnosti za $r=0$), a primijetite i da je jednadžba linearna, što ima niz prednosti u perturbacijskom pristupu (bolja stabilnost).

*Cl*3 i kvantna mehanika

Ortonormirana baza u *Cl*3 je reprezentirana Paulijevim matricama, što je već objašnjeno. Sada ćemo tu činjenicu razviti malo dalje da vidimo kako se i kvantna mehanika lijepo uklapa u formalizam geometrijske algebre.

U “standardnoj” kvantnoj mehanici valna funkcija elektrona ima oblik

$$|\psi\rangle=\alpha|\uparrow\rangle+\beta|\downarrow\rangle,\quad \alpha,\ \beta\in\mathbb{C},$$

pa se takvo stanje čestice obično zapisuje u obliku spinora (pogledajte [18])

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Ako postavimo smjer *z*-osi u smjeru stanja $|\uparrow\rangle$ dobijemo operator spina u obliku

$$\hat{s}_k = \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_k,$$

gdje su $\hat{\sigma}_k$ ranije definirane Paulijeve matrice. Sada možemo tražiti opservable u obliku

$$s_k = \frac{1}{2}\hbar n_k = \langle\psi|\hat{s}_k|\psi\rangle, \quad n_k = \langle\psi|\hat{\sigma}_k|\psi\rangle,$$

gdje su komponente dane sa

$$n_1 = \alpha\beta^* + \alpha^*\beta, \quad n_2 = i\left(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta\right), \quad n_3 = \alpha\alpha^* - \beta\beta^*.$$

Vrijedi

$$|\boldsymbol{n}|^2 = \langle\psi|\psi\rangle^2 = \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)^2,$$

pa ovo možemo iskoristiti da normaliziramo vektor $\boldsymbol{n}$ da bude $|\boldsymbol{n}| = 1$. Uvodeći sferne koordinate možemo pisati

$$n_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad n_2 = \cos\theta\sin\varphi, \quad n_3 = \cos\theta,$$

ili

$$\alpha = \cos\left(\theta/2\right)e^{i\gamma}, \quad \beta = \sin\left(\theta/2\right)e^{i\delta}, \quad \delta - \gamma = \varphi,$$

što daje za spinor

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta/2\right)e^{-i\varphi/2} \\ \sin\left(\theta/2\right)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} e^{i(\gamma+\delta)/2}.$$

Možemo zanemariti ukupnu fazu $\exp\left(i\left(\gamma+\delta\right)/2\right)$. Vidimo ovisnost o polovičnim kutovima, što sugerira vezu s rotorima u *Cl*3. Uvedimo sada oznaku uobičajenu u *Cl*3: $e_i \to \sigma_i$, pa slijedi veza s rotorima

$$\boldsymbol{n} = \sum_{k=1}^{3} n_k\sigma_k = \sin\theta\left(\sigma_1\cos\varphi + \sigma_2\sin\varphi\right) + \sigma_3\cos\theta \equiv R\sigma_3 R^\dagger, \quad R = e^{-j\varphi\sigma_3/2}e^{-j\theta\sigma_2/2}.$$

Uvedemo li sada spinor u *Cl*3, koji ćemo po analogiji označiti sa ψ, potražit ćemo opći oblik novouvedenog objekta

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a^0 + ia^3 \\ -a^2 + ia^1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \psi = a^0 + a^k j\sigma_k,$$

gdje se podrazumijeva sumiranje po k. Odmah vidimo da vrijedi $|\uparrow\rangle \leftrightarrow 1$, $|\downarrow\rangle \leftrightarrow -j\sigma_2$, te da odgovarajući vektori opservable imaju komponente (0, 0, ±1). Za operatore možemo naći vezu

$$\hat{\sigma}_k|\psi\rangle \leftrightarrow \sigma_k\psi\sigma_3,$$

gdje je σ_3 uključen da osigura pripadnost parnom dijelu algebre. Ovaj izbor je, naravno, posljedica početnog izbora *z*-osi i ne utječe na općenitost izraza. Izbor *z*-osi obično ima fizikalnu pozadinu, primjerice, smjer vanjskog magnetskog polja. Što dobijemo ako pomnožimo sve tri Paulijeve matrice? Možemo ustanoviti analogiju s množenjem imaginarnom jedinicom kao

$$i|\psi\rangle \leftrightarrow \psi\, j\sigma_3 .$$

Sugestivno je da smo dobili množenje bivektorom $j\sigma_3$, jer se to moglo očekivati. Naime, vektore opservabli dobijemo upravo rotacijom vektora σ_3 koji je invarijantan na rotacije u $j\sigma_3$ ravnini, što daje geometrijsku sliku fazne invarijantnosti. Primijetite ulogu pseudoskalara i bivektora, koji, za razliku od obične imaginarne jedinice, odmah daju jasno geometrijsko značenje veličinama u teoriji. Ovo je svakako dobra motivacija za proučavanje kvantne mehanike u ovom novom jeziku. Umjesto neintuitivnih matrica nad kompleksnim poljem imamo sada elemente geometrijske algebre, koji uvijek unose jasnoću. A tek smo povirili u ovo područje…

Sada pogledajmo opservable u Paulijevoj teoriji. Pretpostavit ćemo da možemo razdvojiti prostorne i spin komponente. *Unutarnji* produkt u kvantnoj mehanici definiramo kao

$$\langle\psi|\phi\rangle = \left(\psi_1^*, \psi_2^*\right)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 .$$

Realni dio možemo naći kao

$$\mathrm{Re}\langle\psi|\phi\rangle \leftrightarrow \langle\psi^\dagger\phi\rangle ,$$

primjerice

$$\mathrm{Re}\langle\psi|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi^\dagger\psi\rangle = \left\langle\left(a^0 - a^j j\sigma_j\right)\left(a^0 + a^j j\sigma_j\right)\right\rangle = \sum_{k=0}^{3} a^k a^k .$$

Vrijedi

$$\langle\psi|\phi\rangle = \mathrm{Re}\langle\psi|\phi\rangle - i\,\mathrm{Re}\langle\psi|i\phi\rangle ,$$

pa možemo naći analogiju (nemojte zamijeniti $\langle a|b\rangle$ s $\langle ab\rangle$ - stupanj 0)

$$\langle\psi|\phi\rangle \leftrightarrow \langle\psi^\dagger\phi\rangle - \langle\psi^\dagger\phi\, j\sigma_3\rangle\, j\sigma_3 .$$

Imamo $\langle\psi^\dagger\phi\rangle$, stupanj 0 od produkta $\psi^\dagger\phi$, kao i $\langle\psi^\dagger\phi\, j\sigma_3\rangle\, j\sigma_3$, projekciju produkta $\psi^\dagger\phi$ na ravninu $j\sigma_3$.

Potražimo očekivanu vrijednost spina $\langle\psi|\hat{s}_k|\psi\rangle$. Zahtijevamo

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_k|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi^\dagger\sigma_k\psi\sigma_3\rangle - \langle\psi^\dagger\sigma_k\psi\, j\rangle\, j\sigma_3 .$$

Iskoristimo li reverz involuciju slijedi

$$\left(\psi^\dagger\sigma_k\psi\, j\right)^\dagger = j^\dagger\psi^\dagger\sigma_k\psi = -\psi^\dagger\sigma_k\psi\, j ,$$

što znači da u izrazu nema stupnjeva 0 i 1, pa mora biti $\langle\psi^\dagger\sigma_k\psi\, j\rangle = 0$, što očekujemo jer su $\hat{\sigma}_k$ hermitski operatori. Element $\psi^\dagger\sigma_k\psi$ ima samo neparne stupnjeve i jednak je svom reverzu, što znači da je vektor. Iskoristimo to da definiramo *vektor spina* kao

$$\boldsymbol{s} \equiv \frac{1}{2}\hbar\,\psi\sigma_3\psi^\dagger .$$

Očekivana vrijednost je sada

$$\langle\psi|\hat{s}_k|\psi\rangle = \frac{1}{2}\hbar\langle\sigma_k\psi\sigma_3\psi^\dagger\rangle = \sigma_k\cdot\boldsymbol{s} .$$

Ovaj izraz je drugačiji od onog na što smo navikli u kvantnoj mehanici. Umjesto računanja očekivane vrijednosti operatora ovdje jednostavno imamo projekciju vektora spina na željeni smjer u prostoru. To odmah nameće pitanje istovremene egzistencije sve tri komponente vektora spina. Problem zapravo ne postoji, čitatelja upućujemo na članak *Doran et al*, 1996b.

Možemo iskoristiti našu formu spinora i definirati skalar $\rho = \psi\psi^\dagger$, pa ako definiramo

$$R = \rho^{-1/2}\psi$$

vidimo da je $RR^\dagger = 1$, pa imamo rotor. Vidimo da ovdje spinori nisu ništa drugo nego rotori s dilatacijom, pa možemo pisati za vektor spina

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\hbar\rho R\sigma_3 R^\dagger .$$

Vidimo da je izraz za očekivanu vrijednost zapravo instrukcija za rotaciju fiksnog vektora σ_3 u smjeru vektora spina, uz njegovu dilataciju. Uočite opet potpuno jasan geometrijski smisao, koji nije tako lako polučiti u kvantnoj teoriji kako se obično formulira.

Zamislimo sada da želimo rotirati vektor spina, pa uvedimo transformaciju $\boldsymbol{s} \to R_0\boldsymbol{s}R_0^\dagger$, pa nije teško vidjeti da se pri tome spinor mora transformirati kao $\psi \to R_0\psi$ (pokažite to), što se često uzima kao način da se neki objekt identificira kao spinor. Slično svojstvo imamo za već spominjane vlastite spinore u specijalnoj teoriji relativnosti, koji se u odnosu na općenitu Lorentzovu transformaciju mijenjaju kao $\Lambda \to L\Lambda$, tj. nemamo „sendvič“ formu, već „spinor“ formu transformacije. Čitatelju prepuštamo da, uzimajući u obzir upravo pokazano svojstvo transformacije, pokaže kako spinori nakon rotacije za 2π mijenjaju predznak. To je rezultat koji je jasan i u „običnoj“ kvantnoj teoriji, ali ovdje vidimo da u toj pojavi nema ničega „kvantnog“, već da je to zapravo svojstvo našeg 3D prostora. To svakako nije beznačajan zaključak, reklo bi se da imamo razloga dobro preispitati fundamente (i filozofiju, ako želite) kvantne teorije. I opet, sjetimo se kako je sve počelo: množenjem vektora. Pa, ako želite, može biti i podrška osnovanosti novog množenja vektora.

Deriviranje i integriranje

Ovdje ćemo samo ukratko prokomentirati ovo područje, čitatelja upućujemo na literaturu. Geometrijska algebra sadrži moćan aparat diferencijalnog i integralnog računa. Ne bi trebalo biti iznenađenje da i ovdje imamo značajan napredak u odnosu na tradicionalni pristup. Posebno, postoji fundamentalni teorem koji objedinjuje i proširuje mnoge poznate teoreme iz klasičnog integralnog računa. Osim toga, svi elementi algebre (i cijeli multivektori) mogu biti ravnopravno uključeni u račun, pa tako možemo derivirati u „smjeru“ multivektora. Ono što bitno razlikuje klasičnu teoriju od geometrijske algebre ogleda se u nekoliko elemenata.

Prvo, u diferencijalnom računu koristimo različite „operatore“ koji sadrže elemente algebre, pa zbog svojstava nekomutativnosti daju nove mogućnosti. Pogledajmo primjer takvog „operatora“

$$\nabla A = e^k \partial_k A, \quad \partial_k A \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} A,$$

Einsteinova konvencija zbrajanja se podrazumijeva. Ovdje smo uveli opet vektore recipročne baze, ali u ortonormiranim sustavima su oni jednaki vektorima baze, ovdje je ovakva forma zgodna zbog pravila sumiranja i mogućnosti poopćavanja. Uočite da $\nabla \equiv e^k \partial_k$ ima stupanj 1, tj. ponaša se kao vektor. U *Cl*3 se često definira „operator“

$$\partial = \partial_t - \nabla ,$$

koji ima formu paravektora. Takvi elementi mogu djelovati na multivektor s lijeva i s desna, a pri tom nema razlike u samom deriviranju, tj. djelovanjem s desna deriviranje se odnosi na objekt lijevo. Međutim, pri tom imamo geometrijsko množenje baznih vektora i ono nije komutativno. Operatori deriviranja, kao elementi algebre, mogu imati inverz, pa, primjerice, Maxwellove jednadžbe mogu bez osobitog napora biti napisane u obliku

$$\partial \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} ,$$

što omogućuje da se nađe inverz „operatora“ ∂ koristeći Greenove funkcije. Na taj način ova jednostavna matematička forma jednadžbi nije samo „zgodan trik“ već zaista pruža mogućnosti koje bez geometrijskog produkta ne bi postojale. Uočite ponovo da su „operatori“ ujedno elementi algebre, zbog toga ih ovdje i ne promatramo kao operatore. Kao zanimljive primjere snage geometrijske algebre u elektromagnetizmu pogledajte [10], ili [2].

Drugo, u integralnom računu se susrećemo s mjerom, što su objekti kao $dxdy$. U geometrijskoj algebri takvi objekti imaju orijentaciju (kao što je imaju listovi), što daje sasvim nove mogućnosti . Primjerice, objedinjavanje svih važnih teorema klasičnog integralnog računa u jedan (Stokes, Gauss, Green, Cauchy …) je sjajno i pažnje vrijedno postignuće geometrijske algebre. Čitatelja spremnog naučiti ovu lijepu, ali netrivijalnu temu upućujemo na literaturu [18], [20] (na internetu možete tražiti frazu “*geometric calculus*”).

Geometrijski modeli

Poznato je da geometrija 3D prostora može biti lijepo opisana tako da se 3D vektorski prostor „umetne“ u prostor više dimenzije, pa spomenimo *homogeni model* (4D) i *konformni model* (5D). Geometrijska algebra je idealan okvir za istraživanje ovakvih modela. Ovdje ćemo samo kratko opisati jedan od njih, konformni (razvio ga je i patentirao *Hestenes*). Ideja je da n-dimenzionalni euklidski vektorski prostor promatra u $n+2$ - dimenzionalnom prostoru Minkowskog . Za $n=3$ osim uobičajenih jediničnih vektora uvedimo još dva : e, $e^2=1$ i $\bar{e}$, $\bar{e}^2=-1$, pa imamo bazu

$$\{e, e_1, e_2, e_3, \bar{e}\} .$$

Ovo je ortonormirana baza 5D vektorskog prostora $\Re^{4,1}$. Dva dodana jedinična vektora definiraju 2D potprostor $\Re^{1,1}$ u kojem ćemo uvesti novu bazu $\{o, \infty\}$ (simbol ∞ ovdje koristimo kao oznaku vektora koji predstavlja točku u beskonačnosti, dok simbol o predstavlja ishodište)

$$o = (e+\bar{e})/2, \qquad \infty = \bar{e} - e .$$

Faktor ½ ne igra bitnu ulogu, može biti izostavljen, ali onda preostale formule imaju nešto drugačiji oblik . Pokažite da su o i ∞ nilpotenti i da vrijedi $e \wedge \bar{e} = o \wedge \infty$, $o \cdot \infty = \infty \cdot o = -1$, $o \cdot o = \infty \cdot \infty = 0$. Sada imamo novu bazu

$$\{o, e_1, e_2, e_3, \infty\}$$

u kojoj geometrijski elementi kao što je linija ili kružnica imaju jednostavan oblik.

Ako imamo dvije točke u $\Re^3$ i dva vektora $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ koji izlaze iz zajedničkog ishodišta i završavaju u našim točkama, kvadrat udaljenosti dan je sa $(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$. Ideja je naći vektore p i q u ovoj algebri čiji unutarnji produkt će nam dati udaljenost 3D točaka (do na faktor), tj. $p \cdot q \simeq (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$. U tom slučaju bi moralo biti $p \cdot p = 0$, jer je udaljenost nula, pa takve vektore nazivamo *nul-vektorima*. Prema tome, u ovom modelu su točke predstavljene nul-vektorima, pa se može pokazati da je za 3D vektor $\boldsymbol{p}$ odgovarajući nul-vektor dan sa

$$p = o + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}^2 \infty / 2 ,$$

gdje je $p \cdot p = 0$ (provjerite). Nađite $p \cdot q$. U konformnom modelu točke mogu imati težinu, ali ovdje se nećemo time baviti, osim napomene da težina ima geometrijski smisao, primjerice, može pokazati način na koji se presijecaju pravac i ploha. Vektori modela koji nisu točke (odnosno nisu nul-vektori) mogu predstavljati različite geometrijske elemente. Kao primjer uzmimo vektor $\pi = \boldsymbol{n} + \lambda \infty$, pa ako želimo naći sve točke x koje bi pripadale takvom objektu moramo napisati uvjet $x \cdot \pi = 0$, što znači da je udaljenost točke predstavljene s x i točke predstavljene s π jednaka nuli. Imamo

$$x \cdot \pi = \left(o + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2 \infty / 2 \right) \cdot \left(\boldsymbol{n} + \lambda \infty \right) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - \lambda = 0 ,$$

pa vidimo da imamo jednadžbu plohe okomite na vektor $\boldsymbol{n}$, s udaljenošću do ishodišta λ / n. Ako se sjetimo da je kružnica u 3D definirana s tri točke možemo cijeniti činjenicu da kružnicu u ovom modelu dobijemo jednostavno: napravimo vanjski produkt točaka. Ako je jedna od točaka ∞ dobijemo pravac. Lakše od toga ne može. Naročito je važno da transformacije elemenata možemo ostvariti jednim formalizmom, pa tako, primjerice, možemo postići da istim formalizmom opisujemo rotacije i translacije. Zainteresirani čitatelj može naći lijepo izloženu teoriju u [19], gdje možete iskoristiti prednost software-a koji prati knjigu: *GAViewer*. Sve je besplatno dostupno na Internetu.

Dodatak

A1. Neka svojstva Paulijevih matrica

Pogledajmo Paulijeve matrice i neka njihova svojstva. Za linearne kombinacije Paulijevih matrica

$$a = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{\sigma}_i \quad \text{i} \quad b = \sum_{i=1}^{3} b_i \hat{\sigma}_i \,, \;\; a_i,\; b_i \in \Re \,,$$

pa vrijedi

$$a^2 = aa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_i^2 \,,$$

naš a se ponaša kao vektor. Također vrijedi

$$\frac{ab+ba}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \,,$$

što znači da Paulijeve matrice mogu biti interpretirane kao jedinični vektori (dobili smo skalarni produkt vektora $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i$ i $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i$). Naravno, to znači da bi produkti jediničnih vektora e_i trebali biti anti-komutativni (kao za matrice). Nađemo li antisimetrični dio

$$\frac{ab-ba}{2}$$

i pomnožimo ga matricom

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

dobit ćemo koeficijente vektorskog produkta (pokažite to). Iz $\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = -\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i$ slijedi

$$\left(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j\right)^2 = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = -\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_j = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imamo objekte s negativnim kvadratom, oni svakako nisu vektori, što znači da matrica $\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j$ ne predstavlja vektor. Ovdje imamo problem geometrijske interpretacije. Međutim, s jediničnim vektorima imamo $e_i e_j$, objekt koji odmah daje jasno geometrijsko značenje (orijentirani paralelogram), koji usput definira svoju ravninu. Slično, $\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3$ je samo produkt jedinične matrice i imaginarne jedinice, dok je $e_1 e_2 e_3$ orijentirani volumen s kvadratom -1, koji komutira sa svim vektorima, što znači da opet imamo „imaginarnu jedinicu“, ali s jasnom geometrijskom interpretacijom. Konačno, tražimo li 2D matričnu reprezentaciju od *Cl*3 dobijemo Paulijeve matrice kao rješenje. Postojanje matrične reprezentacije dokazuje da je *Cl*3 dobro definirana algebra.

A2. Sve je "boost"

Za kompleksni vektor $\boldsymbol{F} = \vec{v} + j\vec{w}$ imamo $W = \sqrt{\boldsymbol{F}^2} \in \mathbb{C}$ ili $\sqrt{\boldsymbol{F}^2} = \boldsymbol{F}$, pa za $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}^2 = 0$ definiramo $\boldsymbol{F}/W = \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}^2 = 1$ i $\boldsymbol{F}/\sqrt{-\boldsymbol{F}^2} = \boldsymbol{I} = -j\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{I}^2 = -1$. Pretpostavimo da imamo eksponencijalnu formu $\exp(\varphi \boldsymbol{f})$, definirajući $\tanh\varphi = W$, $\Gamma = 1/\sqrt{1-W^2}$, $\kappa = \sqrt{(1+W)/(1-W)} = \Gamma(1+W)$ (poopćeni *Bondi faktor*, $\varphi = \ln\kappa$) i idempotente $\boldsymbol{f}_\pm = (1 \pm \boldsymbol{f})/2$, $\boldsymbol{f}_+\boldsymbol{f}_- = 0$ dobijemo

$$\mathrm{e}^{\varphi \boldsymbol{f}} = \cosh\varphi + \boldsymbol{f}\sinh\varphi = \Gamma(1+W\boldsymbol{f}) = \kappa \boldsymbol{f}_+ + \kappa^{-1}\boldsymbol{f}_- .$$

Sada možemo pročitati "brzinu" kao W i lako slijedi da za uzastopne "boost"-ove vrijedi

$$\mathrm{e}^{\varphi_1 \boldsymbol{f}}\,\mathrm{e}^{\varphi_2 \boldsymbol{f}} = \mathrm{e}^{(\varphi_1+\varphi_2)\boldsymbol{f}} = \Gamma_1\Gamma_2(1+W_1\boldsymbol{f})(1+W_2\boldsymbol{f}) = \Gamma_1\Gamma_2(1+W_1W_2)\left(1+\frac{W_1+W_2}{1+W_1W_2}\boldsymbol{f}\right),$$

$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2(1+W_1W_2), \qquad W = \frac{W_1+W_2}{1+W_1W_2},$$

ili

$$\mathrm{e}^{\varphi_1 \boldsymbol{f}}\,\mathrm{e}^{\varphi_2 \boldsymbol{f}} = \left(\kappa_1\boldsymbol{f}_+ + \kappa_1^{-1}\boldsymbol{f}_-\right)\left(\kappa_2\boldsymbol{f}_+ + \kappa_2^{-1}\boldsymbol{f}_-\right) = \kappa_1\kappa_2\boldsymbol{f}_+ + \kappa_1^{-1}\kappa_2^{-1}\boldsymbol{f}_- \Rightarrow \kappa = \kappa_1\kappa_2 .$$

Općenito imamo kompleksni skalar $\varphi = \ln\kappa = \varphi_\mathrm{R} + j\varphi_\mathrm{I}$ (eksplicitne formule za φ_R i φ_I su prilično nepregledne, možemo iskoristiti program *Mathematica* i zamjenu $j \to i$, gdje je i obična imaginarna jedinica) što vodi na $\exp(\varphi\boldsymbol{f}) = \exp(\varphi_\mathrm{R}\boldsymbol{f})\exp(\varphi_\mathrm{I} j\boldsymbol{f})$.

Za $\boldsymbol{F} = \vec{v} + j\vec{w}$, $W = \sqrt{(\vec{v}+j\vec{w})^2} = \sqrt{v^2 - w^2 + 2j\vec{v}\cdot\vec{w}}$, za $\vec{w} = 0$ imamo dobro poznate formule za boost-ove u specijalnoj relativnosti.

Za $\boldsymbol{F} = j\vec{w}$ imamo $W = \sqrt{(j\vec{w})^2} = \sqrt{-w^2} = jw$, $\boldsymbol{f} = j\vec{w}/jw = \hat{\boldsymbol{w}}$, $\Gamma = 1/\sqrt{1+w^2}$, $\kappa = \sqrt{(1+jw)/(1-jw)}$, $\varphi = \log\kappa = j\arctan w$, $\exp(\varphi\hat{\boldsymbol{w}}) = \Gamma(1+jw\hat{\boldsymbol{w}})$, pa za uzastopne transformacije vrijedi

$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2(1-w_1w_2), \quad w = (w_1+w_2)/(1-w_1w_2).$$

Postoji zanimljiva mogućnost interpretacije ovakvih transformacija kao "boost"-ova, definirajući novi „rotirajući" sustav referencije s „vremenom" $t = \Gamma\tau$ (τ je "vlastito vrijeme"), uvodeći tako ove „rotirajuće" sustave kao analog inercijalnim. Zahtjev za invarijantnošću MA navodi na preispitivanje paradigme "inercijalni sustav referencije".

Za dobro poznate čiste rotacije $\exp(\theta j\hat{\boldsymbol{n}})$ imamo $\theta j\hat{\boldsymbol{n}} = j\theta(j\theta\hat{\boldsymbol{n}})/j\theta$, $\varphi = j\theta$, $W = \tanh(j\theta) = j\tan\theta$, $\Gamma = 1/\sqrt{1+\tan^2\theta}$, $\kappa = \sqrt{(1+j\tan\theta)/(1-j\tan\theta)}$, $\boldsymbol{f}_\pm = (1\pm\hat{\boldsymbol{n}})/2$ pa možemo pisati

$$\mathrm{e}^{\theta j\hat{n}} = \Gamma(1+j\hat{\boldsymbol{n}}\tan\theta),$$

$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2(1-\tan\theta_1\tan\theta_2),$$

$$\tan\theta = (\tan\theta_1+\tan\theta_2)/(1-\tan\theta_1\tan\theta_2) = \tan(\theta_1+\theta_2).$$

Zahvala

Želim izraziti zahvalnost Eckhardu Hitzeru za ljubazne riječi i podršku.

Literatura

[1] Baez: *Division Algebras and Quantum Theory*, arXiv:1101.5690v3

[2] Baylis et al: *Motion of charges in crossed and equal E and B fields*, AJP

[3] Baylis, *Geometry of Paravektor Space with Applications to Relativistic Physics*, Kluwer Academic Publishers, 2004

[4] Baylis, Hadi: *Rotations in n dimensions as spherical vectors*, Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering

[5] Baylis: *Classical Eigenspinors and the Dirac Equation*, Ph. Rev. A, 45, 7, 1992

[6] Baylis: *Eigenspinors in Electrodynamics*, in *Clifford (geometric) algebras with applications to physics, mathematics, and engineering*, ch 18

[7] Baylis: *Eigenspinors in Quantum Theory*, in *Clifford (geometric) algebras with applications to physics, mathematics, and engineering*, ch 19

[8] Baylis: *Electrodynamics: A Modern Geometric Approach*, Progress in Mathematical Physics

[9] Baylis, Sobczyk: *Relativity in Clifford's Geometric Algebras of Space and Spacetime*, arXiv:math-ph/0405026v1

[10] Baylis: *Surprising Symmetries in Relativistic Charge Dynamics*, arXiv:physics/0410197v1

[11] Chappell, Hartnett, Iannella, Abbott: *Deriving time from the geometry of space*, arXiv:1501.04857v2

[12] Chappell, Hartnett, Iannella, Abbott, Iqbal: *Exploring the origin of Minkowski spacetime*, arXiv:1501.04857v3

[13] Chappell, Iqbal, Gunn, Abbott: *Functions of multivektor variables*, arXiv:1409.6252v1

[14] Chappell, Iqbal, Iannella, Abbott: *Generalizing the Lorentz transformations*, https://www.researchgate.net/publication/309765990

[15] Chappell, Iqbal, Iannella, Abbott: *Revisiting special relativity: A natural algebraic alternative to Minkowski spacetime*, PLoS ONE 7(12)

[16] Doran: *Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics*, thesis

[17] Doran, Lasenby, Gull: *Gravity as a gauge theory in the spacetime algebra*, Fundamental Theories of Physics, 55, 1993

[18] Doran, Lasenby: *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge University Press

[19] Dorst, Fontijne, Mann: *Geometric Algebra for Computer Science*, http://www.geometricalgebra.net

[20] Hestenes, Sobczyk: *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, Springer

[21] Hestenes: *Mathematical Viruses*, in Micali et al., *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Kluwer Academic Publishers 1992

[22] Hestenes: *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer Academic Publishers

[23] Hitzer, Helmstetter, Ablamowicz: *Square Roots of -1 in Real Clifford Algebras*, arXiv:1204.4576v2

[24] Jancewicz: *Multivectors And Clifford Algebra In Electrodynamics*, World Scientific, Singapore (1988)

[25] Lasenby, Doran, Gull: *Gravity, Gauge Theories and Geometric Algebra*, gr-qc/0405033v1

[26] Mermin: *Relativity without light*, Am. J. Phys. 52, 119 (1984)

[27] Mornev: *Idempotents and nilpotents of Clifford algebra* (russian), Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(12), том 6, 2009

[28] Sabbata, Datta: *Geometric algebra and applications in physics*, Taylor&Francis

[29] Sobczyk: *Geometric matrix algebra*, Linear Algebra and its Applications 429 (2008) 1163–1173

[30] Sobczyk: *New Foundations in Mathematics*: *The Geometric Concept of Number*, Birkhäuser

[31] Sobczyk: *Special relativity in complex vector algebra*, arXiv:0710.0084v1

[32] Sobczyk: *Vector Analysis of Spinors*, http://www.garretstar.com

[33] Sobczyk: *The Missing Spectral Basis in Algebra and Number Theory*, the American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 4. (Apr., 2001), pp. 336-346

[34] Trayling, Baylis: *The Cl7 approach to the standard model*, Progress in Mathematical Physics 34 pp 547-558

[35] Vince: *Geometric algebra for computer graphics*, Springer, 2008

Nekoliko dodatnih zanimljivih tekstova

Bouma, Timaeus: *Invertible Homogeneous Versors are Blades*, 2001, http://www.science.uva.nl/ga/publications

Bromborsky, Alan: *An Introduction to Geometric Algebra and Calculus*, http://www2.montgomerycollege.edu/departments/planet/planet/Numerical_Relativity/bookGA.pdf

Chisholm J.S.R., Common A.K.: *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Reidel Publishing Company, 1985

Hildenbrand, Dietmar: *Foundations of Geometric Algebra Computing*, Springer

Hitzer, Eckhard: *Introduction to Clifford's Geometric Algebra*, arXiv:1306.1660v1

Jones, George Llewellyn: *The Pauli algebra approach to relativity*, thesis, University of Windsor

Kanatani, Kenichi: *Understanding Geometric Algebra*, CRC Press

Kosokowsky, David E.: *Dirac theory in the Pauli algebra*, thesis, University of Windsor

Macdonald, Alan: *A Survey of Geometric Algebra and Geometric Calculus*, http://faculty.luther.edu/~macdonal/GA&GC.pdf

Macdonald, Alan: *Linear and Geometric Algebra*, http://faculty.luther.edu/~macdonal/laga/

Macdonald, Alan: *Vector and Geometric Calculus*, http://faculty.luther.edu/~macdonal/vagc/

Meinrenken, Eckhard: *Clifford algebras and Lie groups* , http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1048774.files/clif_mein.pdf

Perwass, Christian: *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Springer, 2009

Wei, Jiansu: *Quantum mechanics in the real Pauli algebra*, thesis, University of Windsor

Yao, Yuan: *New relativistic solutions for classical charges in an electromagnetic field*, thesis, University of Windsor

Namjerno je ponuđena manja količina literature, zbog današnje mogućnosti lakog dolaska do informacija, ali na kraju dajemo popis imena ljudi koji se bave ovim područjem, tako da čitatelj lakše pronađe članke, knjige, itd.

3D geometrija

http://geocalc.clas.asu.edu/GA_Primer/GA_Primer/index.html

Izvori na Internetu

https://gaupdate.wordpress.com

http://geocalc.clas.asu.edu

https://staff.science.uva.nl/l.dorst/clifford/

Software

Cinderella

https://www.cinderella.de/tiki-index.php

clifford.m, Mathematica package, https://arxiv.org/abs/0810.2412

http://www.fata.unam.mx/investigacion/departamentos/nanotec/aragon/software/clifford.m

CLIFFORD

http://math.tntech.edu/rafal/

Clifford algebra for CAS Maxima

https://github.com/dprodanov/clifford

Clifford Multivektor Toolbox for MATLAB

http://clifford-multivektor-toolbox.sourceforge.net/

CLUCalc/CLUViz

http://www.clucalc.info/

GA20 and GA30 (Formerly called pauliGA)

https://github.com/peeterjoot/gapauli

Gaalet

https://sourceforge.net/projects/gaalet/

Gaalop

http://www.gaalop.de/

GABLE

https://staff.fnwi.uva.nl/l.dorst/GABLE/index.html

Gaigen

https://sourceforge.net/projects/g25/

GAlgebra

https://github.com/brombo/galgebra

GA Sandbox

https://sourceforge.net/projects/gasandbox/

GAViewer, http://www.geometricalgebra.net/downloads.html, lijepi alat preporučen uz teks. Možete donekle manipulirati slikama.

GluCat
https://sourceforge.net/projects/glucat/

GMac
https://gacomputing.info/gmac-info/

SpaceGroupVisualizer
http://spacegroup.info/

The GrassmannAlgebra package
https://sites.google.com/site/grassmannalgebra/thegrassmannalgebrapackage

Versor
http://versor.mat.ucsb.edu/

Nekoliko važnih detalja možete naći na https://gacomputing.info/ga-software/.

Popis imena autora u geometrijskoj algebri

(po abecednom redu)

Oni kojih se nisam sjetio, ili oni za koje ne znam, neka oproste, listu ćemo proširivati.

Abbott, Derek

Ablamowicz, Rafal

Aharonov, Yakir

Almeida, José

Aragón-Camarasa, Gerardo
Aragón, José Luis
Aristidou, Andreas
Artin, Emil

Arthur, John

Artūras, Acus

Augello, Agnese

Babalic, Elena-Mirela

Barbosa, Afonso Manuel

Bajguz, Wieslaw

Bartsch, Thomas

Baugh, James

Baylis, William

Bayro-Corrochano, Eduardo

Benger, Werner

Bengtsson, Ingemar

Blanchfield, Kate

Bouma, Timaeus

Brackx, Freddy

Brini, Andrea

Bromborsky, Alan

Browne, John

Buchholz, Sven

Cameron, Jonathan

Campbell, Earl

Castro, Carlos

Challinor, Anthony

Chapell, James

Chisholm, John Stephen Roy

Chisolm, Eric

Cibura, Carsten

Clifford, William Kingdon

Colapinto, Pablo

Conte, Elio

Cory, David G.

Dargys, Adolfas

Denker, John

Dixon, Geoffrey

Doran, Chris

Dorst, Leo

Dresden, Max

Dress, Andreas

Eid, Ahmad Hosny
Falcón, Luis Eduardo

Farach, Horacio A.

Farouki, Rida T.

Fernandes , Leandro

Fernandez, Virginia

Figueroa-O'Farrill, José

Finkelstein, David Ritz

Fontijne, Daniel

Franchini, Silvia

Francis, Matthew

Galiautdinov, Andrei

Gentile, Antonio

Goldman, Ronald

Grassmann, Hermann (first ideas)

Gull, Stephen

Gunn, Charles

Gunn, Lachlan

Halma, Arvid

Havel, Timothy F.

Henselder, Peter

Hestenes, David (big dog)

Hilley, Basil

Hildenbrand, Dietmar
Hitzer, Eckhard
Horn, Martin Erik
Howard, Mark
Ichikawa, Daisuke
Iqbal, Azhar
Ivezić, Tomislav
Jancewicz, Bernard
Jones, George Liewellyn
Joot, Peeter
Kanatani, Kenichi
Klawitter , Daniel
Kocik, Jerzy
Kosokowsky, David E.
Kumar, Datta Bidyut
Kuroe, Yasuaki
Kwasniewski, Andrzej Krzysztof
Lachièze-Rey, Marc
Lasenby, Anthony
Lasenby, Joan
Laurinolli, Teuvo
Lazaroiu, Calin Luliu
Leopardi, Paul
Lewis, Antony
Li, Hongbo
Lounesto, Pertti
Luca, Redaelli
Lundholm, Douglas
Lynn, Ben
Mann, Stephen
Matos, Sérgio
Matzke, Douglas
Mawardi, Bahri
Macdonald, Alan
Meinrenken, Eckhar
Miller, Richard Alan
Mornev, Oleg
Moya, Antonio Manuel
Naeve, Ambjorn
Najfeld, Igor
Nesterov, Michael M.
Nitta, Tohru
Oliveira, Manuel
Paiva, Carlos
Parkin, Spencer T.
Parra, Josep
Pavšič, Matej
Perwass, Christian
Pesonen, Janne
Pezzaglia, William
Poole, Charles P. Jr
Porteous, Ian R.
Pozo, Jose Maria
Regonati, Francesco
Renaud, Peter
Riesz, Marcel
Rocha, Marlene Lucete Matias
Rockwood, Alyn
Rodrigues, Waldyr
Salingaros, Nikos
Setiawan, Sandi
Seybold, Florian
Schönberg, Mário
Shirokov, Dmitry
Snygg, John
Sobczyk, Garrett Eugene
Soiguine, Alexander
Somaroo, Shyamal
Sommen, Frank
Sommer, Gerald
Sorbello, Filippo
Sugon, Quirino
Suter, Jaap
Svenson, Lars
Tachibana, Kanta
Tarkhanov, Victor

Teolis, Antonio

Tisza, Laszlo

Trayling, Greg

Vargas, José

Varlamov, Vadim

Vassallo, Giorgio

Velebil, Jirka

Vugt, Floris T. van

Zamora, Julio

Zhang, Hua

Zhaoyuan, Yu

Yao , Yuan

Wang, Dongming

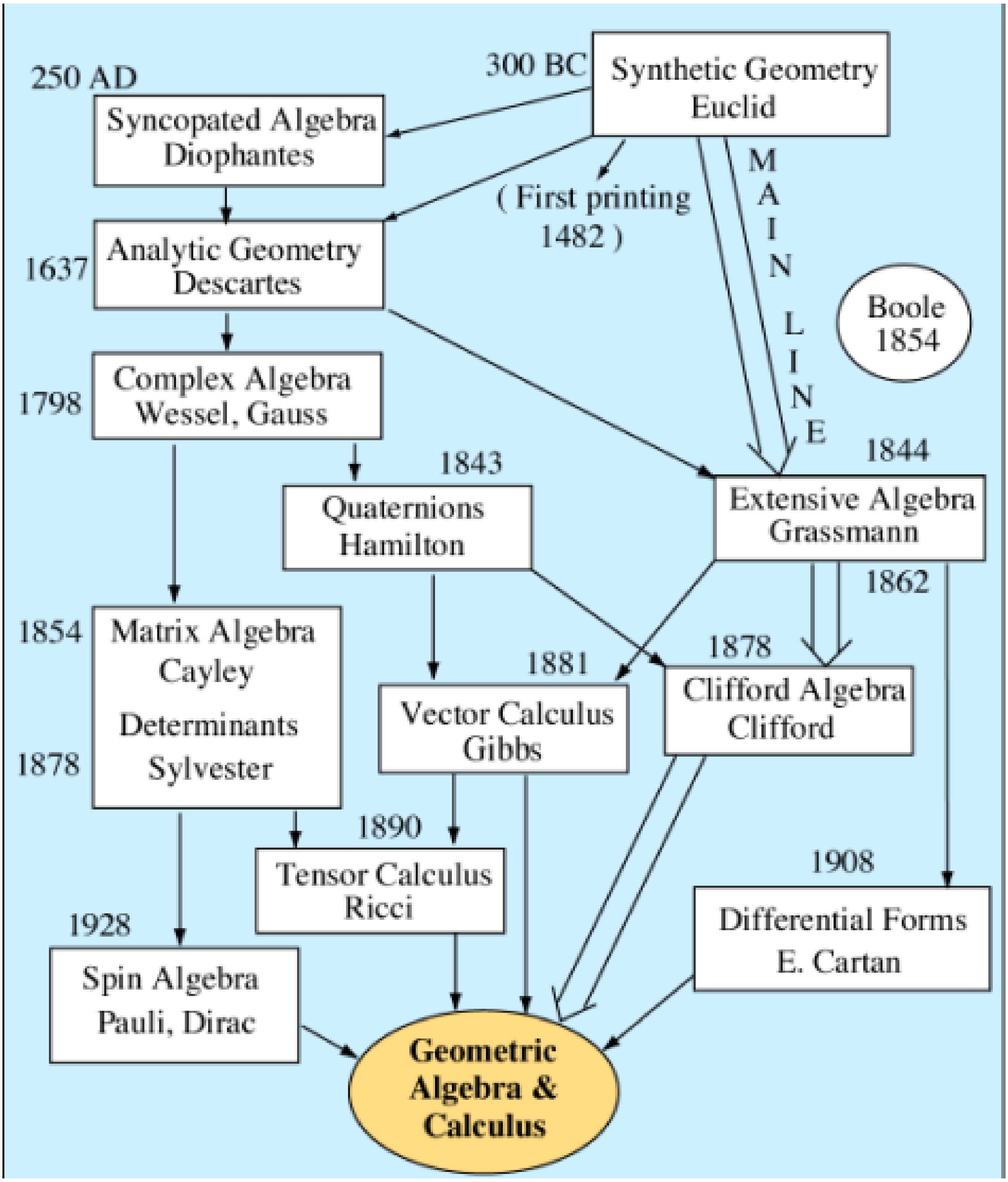
Wareham, Rich

Wei, Jiansu

Wei, Lu

Witte, Frank

Wu, Dimin



250 AD
Syncopated Algebra
Diophantes
300 BC
Synthetic Geometry
Euclid
(First printing
1482)
MAIN LINE
1637
Analytic Geometry
Descartes
Boole
1854
1798
Complex Algebra
Wessel, Gauss
1843
Quaternions
Hamilton
1844
Extensive Algebra
Grassmann
1862
1854
Matrix Algebra
Cayley
Determinants
Sylvester
1878
1881
Vector Calculus
Gibbs
1878
Clifford Algebra
Clifford
1890
Tensor Calculus
Ricci
1908
Differential Forms
E. Cartan
1928
Spin Algebra
Pauli, Dirac
Geometric
Algebra &
Calculus