New approximation algorithms of π Accelerated convergence formulas from n = 100 to n = 2m

François MENDZINA ESSOMBA
Gael Dieudonné ESSOMBA ESSOMBA

08 april 2017

Résumé

We give algorithms for the calculation of π. These algorithms can be easily developed in a linear manner and allows the calculation of pi with an infinite degree of convergence. Of course, the calculation of the second term passes through the first one, and it is necessary, as this type of algorithms, for a larger memory for calculations contrary to the formula BBP [1] whose execution corresponds to the order of the desired number. Number.

The advantage of our formulas in spite of the difficulty associated with extracting $sin(x)$ lies in their degree of convergence, which is infinite, they prove the Borweins brothers hypothesis on the construction of algorithms At any speed as symbolized in our generic formula (8) of this paper.

These formulas for the most part are totally new :

We had found several other formulas of pi like the following linear convergence formula whose theory will be the subject of a special article. [1]

1. Mathematics Subject Classification. Primary 11A05, 11Y16, 68Q25. Key words and phrases. π, convergence, algorithm

$$
\begin{cases}
u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2u_n+1}}{2};\ u_0 = \dfrac{1}{2} \\
\\
a_n = \dfrac{3\times 2^n}{2717}\sqrt{1-u_n^2}\Big(\dfrac{22846976}{5355} - \dfrac{45933}{17}u_n + \dfrac{11020288}{5355}u_n^2 - \dfrac{26782}{17}u_n^3 \\
+\dfrac{1948672}{1785}u_n^4 - \dfrac{53368}{85}u_n^5 + \dfrac{296960}{1071}u_n^6 - \dfrac{432}{5}u_n^7 + \dfrac{2560}{153}u_n^8 - \dfrac{256}{170}u_n^9\Big) \\
\\
n\to\infty;\ a_n \to \pi
\end{cases}
\tag{1}
$$

Introduction nous avions pu remarquer que toutes les formules de grande

convergence jusqu'ici connues peuvent être regroupées en deux grands groupes, les formules de type 1 et les formules de type 2. C'est à cet effet que nous allons introduire un troisième groupe qui intégrera l'ensemble de nos formules de grande convergence.

Formule de type 1

La première du type (qui est un cas particulier du second) a été découverte indépendamment par Salamin et Brent [2],[3] basée sur la moyenne arithmético-géométrique AGM de Gauss [4] et dont la convergence est quadratique (n=2).

$$
\begin{cases}
a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2},\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\
c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \dfrac{c_{n-1}}{4a_n} \\
\pi_n = \dfrac{2a_{n+1}^2}{1-\sum_{k=0}^{\infty} 2^k c_k^2}
\end{cases}
\tag{2}
$$

Cette formule découverte venait rompre avec des algorithmes compte-gouttes connus depuis Archimède [5] et dont la méthode de polygone est incorporée dans la formule (1).

Formule de type 2

Le second type d'algorithmes à grande convergence a été découvert par les frères Borweins [6] découlant des travaux de Ramanujan autour de 1910 sur les intégrales elliptiques à travers ses séries en $1/\pi$ dont l'une des plus célèbre a été utilisée par le mathématicien américain Ralph William Gosper pour établir un record de calcul des décimales en 1985.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}\right) \tag{3}$$

Les frères Borweins trouverons des formules allant de la quartique (n=2) jusqu'à un ordre supérieur (n=16)et ont montré que l'on pouvait construire des algorithmes convergeant à n'importe quelle vitesse (quadratique,quartique, quintique...) vers π avec une complexité des calculs qui augmente en conséquence.

Sur leur site internet les algorithmes suivants ont été copiés :

$$\alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2} \quad y_0 = \sqrt{2} - 1 \quad ; y_{n+1} = \frac{1-(1-y_n^4)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-y_n^4)^{\frac{1}{4}}}$$
$$\alpha_{n+1} = (1+y_{n+1})^4\alpha_n - 2^{2n+3}y_{n+1}(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2) \quad \alpha_n \to \frac{1}{pi} \tag{4}$$

pour la convergence hexadécimalique (m=16)

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \quad s_1 = \sqrt{2} - 1 \quad s_1^{\times} = (1-(s_1)^4)^{\frac{1}{4}} \quad s_{n+1} = \frac{(1-s_n^{\times})^4}{(t+u)^2(t^2+u^2)}$$
$$m_1 = (\frac{1+s_n}{t})^4 \quad m_2 = \frac{1}{t^4} \quad t = 1+s_n^{\times} \quad u = [8s_n^{\times}(1+(s_n^{\times})^2)]^{\frac{1}{4}} \quad s_n^{\times} = (1-s_n^4)^{\frac{1}{4}}$$
$$\alpha_n = 16m_1\alpha n - 1 + \frac{4^{2n-1}}{3}(1-12m_2-4m_1) \to \frac{1}{\pi} \tag{5}$$

Formule de type 3

après la présentation des formules de Brent-Salamin et des frères et dont les autres sont essentiellement des variables, nous introduisons notre formule dont l'expression générale et simplifiée est :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \sin(\lambda_i x_n) + \sum_{i=1}^{m} b_i \cos(\frac{2\beta_i + 1}{2}x_n) \\ n \to \infty \ ; \ x_0 = 3 \ ; \ x_n \to \pi \end{cases} \tag{6}$$

les termes λ_i ; β_i ; k et m sont des entiers :
Elle admet pour cas particulier :

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \sin(\lambda_i x_n) \qquad (6.1)$$

et

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{m} b_i \cos\left(\frac{2\beta_i + 1}{2} x_n\right) \qquad (6.2)$$

Les propriétés admises sont les suivantes :

Théorème 1 $\forall \lambda_i \in \mathbb{N}^* / \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots \neq \lambda_n$ *il existe un unique* $(a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n) \in \Re^n$ *tel que la suite* $(x_n)_n$ *définie ci-dessous converge vers* π *avec un degré* $m = 2k$ *:*

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \sin(\lambda_i x_n)$$

Théorème 2 $\forall \beta_i \in \mathbb{N}^* / \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \cdots \neq \beta_n$ *il existe un unique* $(b_1; b_2; b_3; \cdots; b_n) \in \Re^n$ *tel que la suite* $(x_n)_n$ *définie ci-dessous converge vers* π *avec un degré* $m = 2k$ *:*

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{m} b_i \cos\left(\frac{2\beta_i + 1}{2} x_n\right)$$

Théorème 3 $\forall \lambda_i \in \mathbb{N}^* / \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots \neq \lambda_k$ *et* $\forall \beta_i \in \mathbb{N}^* / \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \cdots \neq \beta_p$ *il existe un unique* $(a_1; a_2; a_3; \cdots; a_k; b_1; b_2; b_3; \cdots; b_p) \in \Re^n$ *tel que la suite* $(x_x)_n$ *définie ci-dessous converge vers* π *avec un degré* $m = 2(p + q)$ *:*

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \sin(\lambda_i x_n) + \sum_{i=1}^{p} b_i \cos\left(\frac{2\beta_i + 1}{2} x_n\right)$$

Théorème 4 *Pour un ordre de convergence* m *donné, il existe une infinité de formules de convergence vers* π*.*

Les théorèmes 1,2,3 peuvent paraître contradictoire au 4, cependant s'il n'existe qu'une unique convergence de degré $m = 2k$ pour une formule de longueur k, il exite une infinité de convergence inférieure pour $m < 2k$

La première de nos formules a été trouvée, ci-dessous, il y a plus de dix années aujourd'hui :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{90}\left(243 \sin(x_n) - \frac{243}{7} \sin(2x_n) - \sin(3x_n) + \frac{1024}{7} \cos\left(\frac{3}{2} x_n\right)\right) \quad (7)$$

Depuis ce temps les travaux portant sur lesdites formules ont été abandonnés, compte tenu de la problématique de l'extraction des $\sin(x)$ mais surtout des difficultés rencontrées pour le passage d'un ordre m à un ordre $m+1$. A ce niveau, nous sommes restés autour de n=11.

Nous n'avons repris les travaux que récemment à la lumière des sites de calcul en ligne notammenthttps ://matrixcalc.org , http ://fr.numberempire, ou http ://www.solumaths.com/fr grâce auxquels nous sommes arrivés à un ordre de $m = 80$ tels que ressorti sur l'une de nos pages facebook (https ://www.facebook.com/francois.mendzinaessomba) .

$$x_{n+1} = x_n + \frac{80}{41}\sin(x_n) + \frac{260}{287}\sin(2x_n) + \frac{19760}{37023}\sin(3x_n) + \frac{45695}{135751}\sin(4x_n)$$
$$+\frac{146224}{678755}\sin(5x_n)+\frac{182780}{1338117}\sin(6x_n)+\frac{12429040}{146746831}\sin(7x_n)+\frac{776815}{15246424}\sin(8x_n)$$
$$+\frac{24858080}{840459123}\sin(9x_n) + \frac{38530024}{2334608675}\sin(10x_n) + \frac{9065888}{1027227817}\sin(11x_n)$$
$$+\frac{1263994}{280153041}\sin(12x_n) + \frac{20223904}{9191687869}\sin(13x_n) + \frac{5055976}{4949370391}\sin(14x_n)$$
$$+\frac{262910752}{583318653225}\sin(15x_n)+\frac{41079805}{217772297204}\sin(16x_n)+\frac{69187040}{925532263117}\sin(17x_n)$$
$$+\frac{596440}{21303811683}\sin(18x_n) + \frac{2385760}{241228009057}\sin(19x_n) + \frac{29822}{9068722145}\sin(20x_n)$$
$$+\frac{2385760}{2323406613549}\sin(21x_n)+\frac{365560}{1217022511859}\sin(22x_n)+\frac{1462240\times\sin(23x_n)}{17812784037209}$$
$$+\frac{776815}{37174505816784}\sin(24x_n)+\frac{95608}{19361721779575}\sin(25x_n)+\frac{119510\times\sin(26x_n)}{110749048579169}$$
$$+\frac{478040}{2201593723952931}\sin(27x_n) + \frac{45695\times\sin(28x_n)}{1141567116123742} + \frac{365560\times\sin(29x_n)}{54387519032466851}$$
$$+\frac{18278}{17901847957395045}\sin(30x_n) + \frac{365560}{2626797823615099603}\sin(31x_n)$$
$$+\frac{45695}{2711533237280102816}\sin(32x_n) + \frac{365560}{20412761151899274011 7}\sin(33x_n)$$
$$+\frac{2470}{1502237833689556961 9}\sin(34x_n) + \frac{1976}{154642129938630863725}\sin(35x_n)$$
$$+\frac{13}{15906047650830603126}\sin(36x_n) + \frac{104}{2517573875400910461443}\sin(37x_n)$$
$$+\frac{2}{1292808206286954020741}\sin(38x_n)+\frac{8}{20963905703000554410015 9}\sin(39x_n)$$
$$+\frac{1}{2150144174666723529232400}\sin(40x_n)$$

A la suite des calculs effectués sur internet, nous allons nous appesantir sur la recherche d'une généralisation que nous allons parvenir à obtenir quelques temps plus tard.

En effet, une compréhension poussée des coefficients a_i et b_i de l'équation (6) nous permettra de passer ce verrou pour atteindre une convergence d'ordre $2m$ symbolisée par la formule générale pour le cas particulier (6.1) suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \sum_{n=1}^{m} \dfrac{2(m!)^2}{n(m+n)!(m-n)!} \sin(nx) \\ \\ x_n \to \pi \quad ; \quad x_0 = 3 \quad ; x_{n+1} - \pi = O(x_n - \pi)^{2m} \end{cases} \tag{8}$$

Cette formule générale nous permet donc de trouver les algorithmes de π pour n'importe quelle vitesse souhaitée comme il a été indiqué d'emblé. Ainsi donc :

n=100

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{n=1}^{50} \frac{2(50!)^2}{n(50+n)!(50-n)!} \sin(nx)$$

n=2000

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{n=1}^{1000} \frac{2(1000!)^2}{n(100+n)!(1000-n)!} \sin(nx)$$

n=20000000

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{n=1}^{1000000} \frac{2(10000000!)^2}{n(10000000+n)!(10000000-n)!} \sin(nx)$$

Pour clore l'article nous indiquerons qu'ils existent une infinité de variables de notre formule qui peut être trouvée.

Références

[1] David Bailey, Peter Borwein, Simon Plouffe on the rapid computation of various polylogarithmic constants . Mathematic of computation Volume 66, Number 218, April 1997, Pages 903913.

[2] E. Salamin, “Computation of using arithmetic-geometric mean”, Mathematics of computation,

[3] R. Brent, “Fast multiple-precision evaluation of elementary fonctions”, Journal of the Association of Computing Machinery, 1976, pp.242-251. 1976, vol. 30, pp. 565-570.

[4] Borwein, Jonathan M., Peter B. Borwein, and David H. Bailey. ”Ramanujan, modular equations, and approximations to pi or how to compute one billion digits of pi.” The American Mathematical Monthly 96.3 (1989) : 201-219.

[5] J.-P. Delahaye, ”Le Fascinant Nombre π”, Bibliothèque Pour La Science, Belin, 1997.

[6] J.M. Borwein and P.B. Borwein.Ramanujan and Pi.” Scientific American, February 1988, 112117. Reprinted in pp. 187-199 of Ramanujan : Essays and Surveys, B.C. Berndt and R.A. Rankin Eds., AMS-LMS History of Mathematics, vol. 22, 2001.