Self-consistent current structures in a collisionless plasma

Yurii A. Spirichev
Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering - branch of Federal State Unitary Enterprise of Federal Scientific-Production Center "Production Association "Start" named after Michael V.Protsenko"
E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Abstract
From Maxwell's equations with field sources are followed not only by the wave equations of the electromagnetic field and the continuity equation for the current density, but also by the equation of motion of electric charges in the form of the Euler equation. It is shown that these equations in an explicit form describe the mechanism of the appearance in a collisionless plasma of self-consistent current structures and its turbulence.
Keywords: self-consistent current structures, vortex motion, wave equation, plasma turbulence, magnetic dynamo.

О самосогласованных токовых структурах в бесстолкновительной плазме

Ю.А. Спиричев

Аннотация.
Из уравнений Максвелла с источниками поля следуют не только волновые уравнения электромагнитного поля и уравнение непрерывности для плотности тока, но и уравнение движения электрических зарядов в форме уравнения Эйлера. Показано, что эти уравнения в явном виде описывают механизм возникновения в бесстолкновительной плазме самосогласованных токовых структур и ее турбулентности.

Ключевые слова: самосогласованные токовые структуры, вихревое движение, волновое уравнение, турбулентность плазмы, магнитное динамо.

Содержание

1. Введение

2. Уравнения самосогласованного движения свободных электрических зарядов

3. Нелинейное волновое уравнение движения свободных зарядов и уравнение самосогласованных токовых структур
4. Заключение
Список литературы

1. Введение

Построение теории самосогласованных токовых структур в плазме является важной задачей фундаментальной физики, связанной не только с необходимостью теоретического объяснения множества астрофизических явлений, включая магнитное динамо, природных и лабораторных плазменных долгоживущих (квазистационарных) структур типа шаровой молнии, но и с решением практических задач термоядерного синтеза и прямого преобразования тепловой энергии в электрическую. Вопросам построения такой теории посвящен недавно опубликованный на страницах УФН обзор [1] с обширной библиографией, в котором показано развитие аналитических методов описания и исследования самосогласованных токовых структур в бесстолкновительной плазме. В данном обзоре рассмотрено большинство классов стационарных аналитических решений самосогласованных уравнений Максвелла и кинетических уравнений. В обзоре отмечается, что многочисленные попытки кинетического описания не дают ясного понимания возможных типов самосогласованных токовых структур и их характерных свойств. Также отмечается, что и методы магнитной гидродинамики до сих пор не позволяют составить сколько-нибудь ясную картину механизмов коллективного взаимодействия частиц, посредством создаваемого ими сложно структурированного магнитного поля, без участия которого фактически не обходится ни одно из существенных явлений в бесстолкновительной плазме. Эта проблема усугубляется тем, что самосогласованные динамические процессы в плазме неразрывно связаны с ее турбулентностью [2, 3, 4], которая сама по себе является важной проблемой физики плазмы.

Широкое распространение самосогласованных токовых структур в природной плазме говорит о том, что их возникновение является фундаментальным внутренним свойством плазмы и их описание должно содержаться в базовых уравнениях электродинамики, которыми являются уравнения Максвелла. Однако считается, что уравнения Максвелла не описывают движения электрических зарядов. По мнению автора, такая точка зрения является заблуждением. Поскольку источники поля и возбуждаемое ими поле представляют собой связанную физическую систему, то из уравнений Максвелла должны следовать уравнения движения не только для поля, но и для его источников. Из уравнений Максвелла следует уравнение непрерывности плотности тока, описывающее движение электрических зарядов. Однако для этого движения зарядов электромагнитное поле тождественно равно нулю. Но возбуждение электромагнитных волн ускоренно движущимися зарядами является экспериментальным фактом. Тогда из уравнений Максвелла должно следовать и другое уравнение для движения электрических зарядов и токов, связанное с возбуждением электромагнитных волн. Таким уравнением является уравнение движения электрических зарядов в форме Эйлера.

Целью настоящей статьи является вывод из уравнений Максвелла уравнений самосогласованного движения свободных электрических зарядов и описание следующих из них характерных свойств такого движения, в частности уравнения самосогласованных токовых структур

Уравнения Максвелла являются идеальными, и при рассмотрении электродинамических процессов в среде требуют ряда дополнений, учитывающих не-идеальность среды. Применительно к движению электрических зарядов идеальность уравнений Максвелла заключатся в отсутствии в них учета массы зарядов, диссипации энергии, вязкости среды и т.п. Тем не менее, уравнения Максвелла представляют собой основу электродинамики поля и описывают основные его законы, это касается и электродинамики электрических зарядов. Таким образом, получение уравнений движения электрических зарядов из уравнений Максвелла, хотя и в идеальной форме, представляет собой интерес для понимания базовых электродинамических процессов в плазме. Для учета массы зарядов можно дополнительно использовать гидродинамическое уравнение непрерывности и уравнение Эйлера для сплошной среды.

2. Уравнения самосогласованного движения свободных электрических зарядов

Запишем уравнения Максвелла в потенциалах электромагнитного поля φ и A:

$$\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}+\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_t\nabla\varphi+\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mu\cdot\mathbf{J} \tag{1}$$

$$-\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0\cdot\varepsilon \tag{2}$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (1) и, использовав уравнение (2), получим уравнение непрерывности для плотности тока:

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\partial_t\rho=0 \tag{3}$$

Применив к уравнениям (1) и (2) калибровочное условие Лоренца $\varepsilon\cdot\mu\cdot\partial_t\varphi/c^2+\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ получим волновые уравнения для потенциалов электромагнитного поля:

$$\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0\cdot\varepsilon \tag{4}$$

$$\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mu\cdot\mathbf{J} \tag{5}$$

Возьмем градиент от обеих частей уравнения (4) и производную по времени от обеих частей уравнения (5) и, сложив результаты, получим уравнение:

$$\nabla(\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi)+\partial_t(\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A})=\mu_0\cdot\mu\cdot\partial_t\mathbf{J}+\nabla\rho/\varepsilon_0\cdot\varepsilon \tag{6}$$

Это уравнение можно записать в виде неоднородного волнового уравнения для электрического поля **E**:

$$\Delta\mathbf{E}-\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{E}=\mu_0\cdot\mu\cdot\partial_t\mathbf{J}+\nabla\rho/\varepsilon_0\cdot\varepsilon \tag{7}$$

Правая часть этого уравнения описывает источник электромагнитных волн. Для случая, когда **E** или φ и **A** не равны нулю и удовлетворяют однородным волновым уравнениям:

$$\Delta\mathbf{E}-\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{E}=0, \quad \frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=0, \quad \frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi=0$$

правую часть уравнения (6), являющуюся описанием источника электромагнитных волн, можно записать в однородном виде:

$$\varepsilon\cdot\mu\cdot\partial_t\mathbf{J}/c^2+\nabla\rho=0 \tag{8}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение движения для плотности электрических зарядов в форме Эйлера. Рассмотрим уравнение (8) и уравнение непрерывности (3) как систему уравнений:

$$\varepsilon\cdot\mu\cdot\partial_t\mathbf{J}/c^2+\nabla\rho=0 \qquad \text{и} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J}+\partial_t\rho=0$$

Разделив в них переменные, получим волновые уравнения для плотности зарядов и плотности тока:

$$\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\rho-\Delta\rho=0 \tag{9}$$

$$\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{J}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{J})=0 \tag{10}$$

Эти волновые уравнения показывают, что уравнения Максвелла описывают не только волновое движение электромагнитного поля, но и волновое движение источников поля. Уравнение (10) можно записать в виде:

$$\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{J}-\nabla\times\nabla\times\mathbf{J}-\Delta\mathbf{J}=0 \tag{11}$$

Это волновое уравнение отличается от канонической формы волнового уравнения Даламбера наличием вихревого члена $\nabla\times\nabla\times\mathbf{J}$, описывающего двойное вращение вектора плотности тока по замкнутому контуру. Это говорит о том, что волны плотности тока имеют вихревую составляющую, т.е. являются вихревыми. Известно, что движение плазмы в турбулентном состоянии представляет собой набор слабо коррелированных вихревых волн [4]. Тогда уравнение (11) можно рассматривать как уравнение турбулентных плазменных волн. Уравнение (11) является идеализированным уравнением движения, в котором у зарядов отсутствует масса и нет диссипативного члена, описывающего потери. Но это уравнение показывает, что при отсутствии потерь плазменная турбулентность является принципиальным свойством волнового самосогласованного движения зарядов. При наличии потерь волны турбулентности плазмы возбуждаются, когда приток энергии превышает потери, например, при повышении ее температуры.

Таким образом, из уравнений Максвелла следуют волновые уравнения для плотности зарядов и плотности тока. Эти детерминированные уравнения описывают самосогласованное коллективное движение свободных электрических зарядов под действием самосогласованного электромагнитного поля. Из этих уравнений можно сделать следующие выводы:

1. При отсутствии потерь групповое движение свободных электрических зарядов является волновым движением.
2. Волновое движение свободных электрическим зарядов имеет вихревую компоненту, являющуюся источником турбулентности плазмы.
3. Турбулентность плазмы при отсутствии диссипации является непременным условием группового движения свободных электрических зарядов.

В работе [2] указывается, что самовозбуждение и самоусиление магнитного поля в плазменной среде, т.е. явление магнитного динамо, связано с явлением турбулентности плазмы. Из уравнения (10) можно сделать вывод, относящийся к этой проблеме. Заменив плотность тока в уравнении (10) из уравнения Максвелла (1), получим уравнение для магнитной индукции **B** и электрического поля **E**:

$$\partial_{tt}(\nabla\times\mathbf{B}-\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_t\mathbf{E})+\nabla(\nabla\cdot\partial_t\mathbf{E})=0$$

Пренебрегая вторым членом, ввиду его малости, используя уравнение Максвелла (2), дважды проинтегрировав по времени t и положив постоянные интегрирования равными нулю, получим уравнение:

$$\nabla\times\mathbf{B}=-t\cdot\nabla\rho/\varepsilon\varepsilon_0$$

Это уравнение более просто можно получить и из уравнения (8). Из этого уравнения следует вывод о том, что при групповом самосогласованном движении электрических зарядов в среде может происходить линейное возрастание во времени ротора магнитной индукции. Скорость нарастания магнитного поля прямо пропорциональна градиенту плотности зарядов. Этот вывод объясняет причину и механизм возбуждения в ионизированной среде магнитного «динамо». Таким образом, это магнитное явление связано с самосогласованным волновым движением электрических зарядов. Как и для турбулентности, такой процесс возникает, когда приток энергии превышает потери.

Поскольку полученные уравнения движения не содержат массы зарядов, то их необходимо дополнить «массовыми» уравнениями. Такими уравнениями могут служить гидродинамическое уравнение непрерывности и уравнение Эйлера для сплошной среды.

Для учета инерционных свойств зарядов можно ввести в волновые уравнения (9) и (10) эмпирический интегральный коэффициент k, учитывающий влияние плотности массы на скорость распространения волн плотности зарядов и плотности тока:

$$k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\rho-\Delta\rho=0 \qquad k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{J}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{J})=0$$

4 Нелинейное волновое уравнение движения зарядов и уравнение самосогласованных токовых структур

Подставив в уравнения (3) и (8) выражение для плотности тока $\mathbf{J}=\rho\cdot\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ скорость движения зарядов и сделав необходимые преобразования, получим систему уравнений для плотности зарядов и скорости их самосогласованного движения:

$$\partial_t\rho+\mathbf{V}\cdot\nabla\rho+\rho\cdot\nabla\cdot\mathbf{V}=0 \tag{12}$$

$$\nabla\rho+k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}(\mathbf{V}\cdot\partial_t\rho+\rho\cdot\partial_t\mathbf{V})=0 \tag{13}$$

После разделения неизвестных из этой системы следует нелинейное волновое уравнение для скорости $\mathbf{V}$ самосогласованного движения заряженных частиц:

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})-k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{V}+2\cdot\mathbf{V}\cdot\frac{k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu}{c^2}(\partial_t\mathbf{V})^2-(\nabla\cdot\mathbf{V})^2}{1-k\cdot\varepsilon\cdot\mu\cdot\mathbf{V}^2/c^2}=0$$

или

$$\Delta\mathbf{V}+\nabla\times\nabla\times\mathbf{V}-k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu\cdot}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{V}+2\cdot\mathbf{V}\cdot\frac{k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu\cdot}{c^2}(\partial_t\mathbf{V})^2-(\nabla\cdot\mathbf{V})^2}{1-k\cdot\varepsilon\cdot\mu\cdot\mathbf{V}^2/c^2}=0 \tag{14}$$

Это нелинейное волновое уравнение с вихревым членом можно рассматривать как уравнение турбулентности плазмы. Из вида нелинейного члена этого уравнения следует, что в зависимости от величины пространственных и временных производных скорости движения зарядов этот член может быть равным нулю или менять знак и, следовательно, менять характер волнового процесса. Из уравнения (14) следует, что для случая, когда скорость движения заряженных частиц $\mathbf{V}$ не равна нулю и удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta\mathbf{V}-k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu\cdot}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{V}=0$$

в плазме могут существовать локальные динамические самосогласованные токовые структуры, описываемые нелинейным уравнением:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{V}+2\cdot k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu\cdot}{c^2}\mathbf{V}\cdot\frac{k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\mu\cdot}{c^2}(\partial_t\mathbf{V})^2-(\nabla\cdot\mathbf{V})^2}{1-k\cdot\varepsilon\cdot\mu\cdot\mathbf{V}^2/c^2}=0 \tag{15}$$

Поскольку первый член этого уравнения описывает двойную циркуляцию вектора скорости заряженных частиц по замкнутому контуру, то можно предположить, что это уравнение описывает плазменные самосогласованные токовые структуры тороидного типа или вихревые кольца. Как известно из гидродинамики, вихревые кольца являются устойчивыми динамическими образованиями. Первый член уравнения (15) описывает замкнутые электрические токи, представляющие собой локальный источник магнитного поля. Из наблюдений шаровой молнии известно существование у нее сильного магнитного поля. Из нелинейного члена уравнения (15) следует, что в зависимости от величины пространственных и временных производных скорости движения зарядов этот член может менять знак и, следовательно, менять характер процесса, т.е. приводить к возникновению или разрушению таких плазменных структур.

В неоднородном волновом уравнении для электрического поля (7) его правая часть рассматривалась как источник электромагнитных волн. Но в качестве источника можно рассматривать и левую часть уравнения (7). Тогда это уравнение совместно с уравнением непрерывности (3) будет описывать возбуждение волн плотности зарядов и тока в ионизированной среде под воздействием на нее электромагнитных волн. Такое воздействие будет приводить к возбуждению в ионизированной среде турбулентных волн в соответствии с уравнениями (11) и (14) и возможности образования плазменных структур в соответствии с уравнением (15). Такие явления наблюдаются в ионосфере при экспериментах HAARP и др. [5].

4 Заключение

Из уравнений Максвелла следуют уравнения движения не только для электромагнитного поля, но и для его источников. Уравнения движения электрических зарядов имеют форму уравнения непрерывности и уравнения Эйлера. Эти уравнения также фундаментальны, как и уравнения движения для электромагнитного поля. Из этих уравнений движения электрических зарядов следуют волновые уравнения для плотности зарядов, плотности тока, нелинейное волновое уравнение для скорости зарядов и уравнение самосогласованных токовых структур плазмы. Они дают объяснение механизма возбуждения плазменной турбулентности и магнитного динамо и показывают, что все эти явления представляют собой базовые свойства плазмы.

Список литературы

1. Кочаровский В В и др. *УФН* **186** 1267 (2016); Kocharovsky V V et al. Sov. Phys. Usp. **59** 12 (2016)

2. Вайнштейн С И, Зельдович Я Б *УФН* **106** 431 (1972); Vainshtein S I, Zeldovich Ya B Sov. Phys. Usp. **15** 159 (1972)
3. Соколов Д Д и др. *УФН* **184** 313 (2014); Sokolov D D et al. Sov. Phys. Usp. **57** 292 (2014)
4. Кадомцев Б Б *Турбулентность плазмы* Вопросы теории плазмы вып. 4 (М.: Атомиздат, 1964)
5. Грач С М и др. *УФН* **186** 1189 (2016); Grach S M et al. Sov. Phys. Usp. **59** 11 (2016)

__________Ю.А. Спиричев