

周方变换（Z 变换）之全貌与哈勃定律

中国社会科学院 周方

zhoufang@cass.org.cn

tony_zf_zf_zf@126.com

摘要 互作相对运动的两观测者对同一事件进行观测时，两个观测者“见到”该事件的时刻及空间位置之间，存在着确定的对应关系。也就是说，在“两观测者有相对运动且光速为有限值”场合下，两个观测者对同一事件进行观测时客观上必然存在着“时间及空间坐标的转换”，正是这种“转换”，才使得观测者能够“见到”客观事物的真实景象，实际地完成对事物的观测与评估。通常我们把这种“坐标转换”称之为“时空变换”。由此可见，“时空变换”乃客观存在，而绝不是被人为“创建”、“设计”出来的。因此，我们只能依据客观的物理事实去“发现”这种客观存在的“时空变换”，而绝不可以不依据任何物理模型，通过纯粹的数学模型进行“数学推导”去“创造、建立”甚至“拼凑、编造”出一个“时空变换”。至今，人们居然还沉陷在这样的误区里，狭义相对论之“洛伦兹变换”就是这个误区里的产物。本文揭示了“两观测者有相对运动且光速为有限值”场合下两个观测者对同一事件进行观测时唯一客观存在的“时空变换”，它是“伽利略型”的时空变换（周方，2014 年版及 2016 年版），而（经典的）伽利略变换 $x' = x - ut$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ 则不过是此时空变换在“光速为无限大”假设条件下的特例。1929 年，美国天文物理学家哈勃（E. P. Hubble）发现河外星系视向退行速度与距离成正比，即距离越远，视向退行速度越大。“哈勃定律”中速度和距离都是间接观测得到的物理量。“哈勃定律”通常被用来推算遥远星系的距离。可是，“哈勃定律”至今从未得到理论上的解释。本文十分简捷地首次给出了“哈勃定律”的理论表达式。实际上，从笔者首次发现的“两坐标系有相对运动且真空中光速为有限值”情况下唯一存在的时空变换——Z 变换（周方变换）——的时间变换式即可直接导出“哈勃定律”的理论表达式。

关键词 哈勃定律 时空变换 伽利略变换 广义的伽利略变换 Z 变换 周方变换

一. “一般 Z 变换”

设：两个观测者分别处在两参考系的原点（ K' 系原点和 K 系原点）。 K' 系相对于 K 系作匀速直线平移相对运动，相对速度为 u 。 K' 系与 K 系之间始终保持 x' 轴平行于 x 轴， y' 轴平行于 y 轴及 z' 轴平行于 z 轴。 x 轴、 y 轴、 z 轴中，没任何一个轴“优越”于其它的轴；同样， x' 轴、 y' 轴、 z' 轴中，也没有任何一个轴“优越”于其它的轴。

相对速度矢量 u 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分量分别为 u_x 、 u_y 、 u_z 。 K' 系观测者和 K 系观测者各持有时钟，在时刻 $t' = t = 0$ ，有 $x' = x = 0$ ， $y' = y = 0$ ， $z' = z = 0$ ，这时两观测者的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 1。

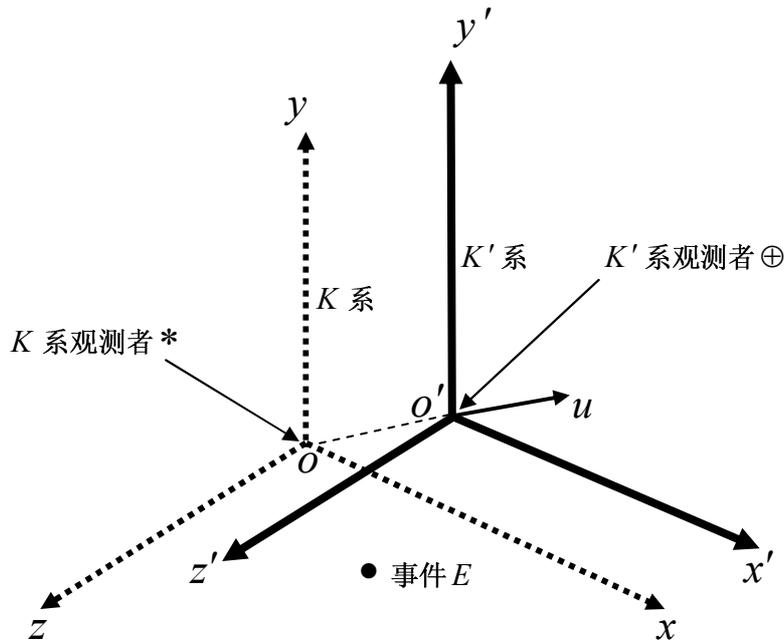


图 1 K' 系与 K 系之间的关系

(一) 空间坐标变换式

A. 以 K 系为静系， K' 系对 K 系沿 x 轴方向的相对运动物理模型示于图 2（ K' 系对 K 系沿 x 轴方向的相对运动）。

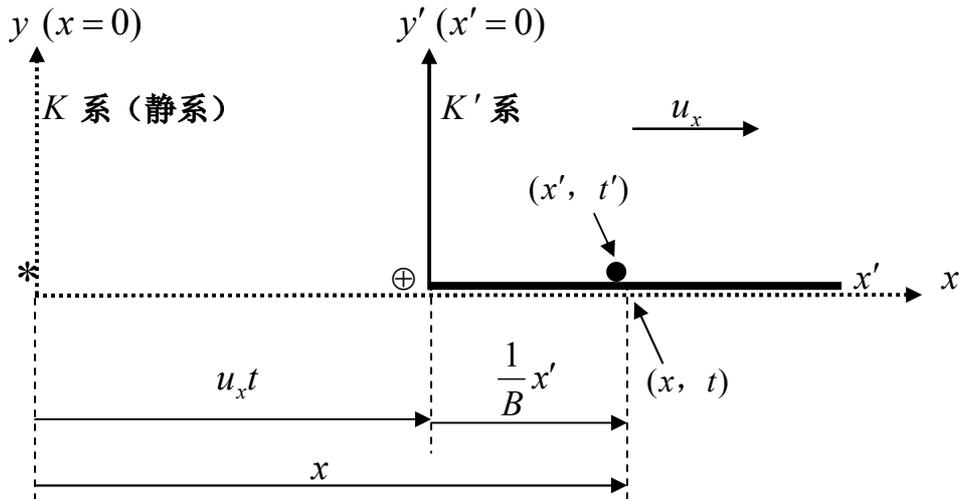


图 2 K' 系沿 x 轴方向的相对运动 (以 K 系为静系)

- (1) * 为 K 系观测者, \oplus 为 K' 系观测者; u_x 为 K' 系对 K 系的相对速度矢量 u 在 x 轴方向的分量;
- (2) K 系观测者与 K' 系观测者持有相同的时钟及量尺; 在 K' 系观测者掠过 K 系观测者的时刻, 两者的时钟对准到零点 ($t' = t = 0$);
- (3) x' 为 K' 系观测者在时刻 t' ‘测得’ 的某运动质点的 K' 系坐标, 而 $\frac{1}{B}x'$ 则是 “ K 系观测者 (在时刻 t) 认为的” K' 系观测者所 ‘测得’ 的该运动质点的 K' 系坐标, B 为坐标系相对速度 u_x 和光速 c 的正实函数。从图 2 有: $\frac{1}{B}x' = x - u_x t$

从而得空间变换式: $x' = B(x - u_x t)$

B. 以 K' 系为静系, 此时图 2 可表为图 2a (K 系对 K' 系沿 x' 轴方向的相对运动):

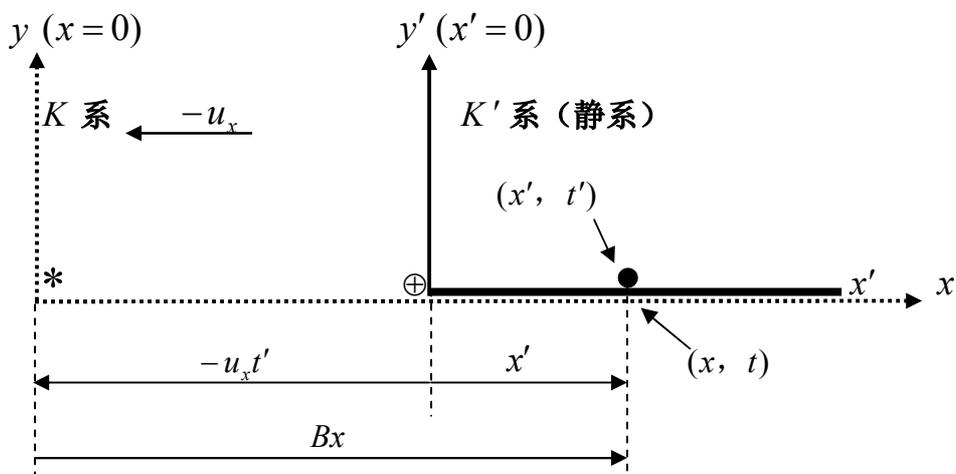


图 2a K 系沿 x' 轴方向的相对运动 (以 K' 系为静系)

图 2a 中:

- (1) * 为 K 系观测者, \oplus 为 K' 系观测者; $-u_x$ 为 K 系对 K' 系的相对速度 $-u$ 在 x' 轴方向的分量;
- (2) K 系观测者与 K' 系观测者持有相同的时钟及量尺; 在 K 系观测者掠过 K' 系观测者的时刻, 两者的时钟对准到零点 ($t' = t = 0$);
- (3) x' 为 K' 系观测者 ‘测得’ 的某运动质点的 K' 系坐标, 而 Bx 则是 K' 系观测者 ‘认为’ 的该运动质点的 K 系坐标, B 为坐标系相对速度 u 和光速 c 的正实函数。

从图 2a 有:

$$Bx = x' - (-u_x t') = x' + u_x t'$$

从而得从而得空间变换方程:

$$x = \frac{1}{B}(x' + u_x t')$$

从图 2 所得之 “正变换” 方程 $x' = B(x - u_x t)$ 与从图 2a 所得之 “逆变换” 方程 $x = \frac{1}{B}(x' + u_x t')$ 实际上为同一个方程, 因此以下等价关系成立:

$$\{x' = B(x - u_x t)\} \Leftrightarrow \{x = \frac{1}{B}(x' + u_x t')\}$$

由此得出同时成立的两个关系式:

1. $x' = B(x - u_x t)$, 即 $Bx - x' = Bu_x t$;

及

2. $x = \frac{1}{B}(x' + u_x t')$, 即 $Bx - x' = u_x t'$ 。

由此可得等式 $Bu_x t = u_x t'$, 即: $t' = Bt$

$t' = Bt$ 就是两参考系之间的时间变换式。

于是, 我们得到以下同时成立的方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{两参考系之间的时间变换式: } t' = Bt \\ \text{沿 } x \text{ (} x') \text{ 轴的坐标 “正变换” 方程: } x' = B(x - u_x t) \\ \text{沿 } x \text{ (} x') \text{ 轴的坐标 “逆变换” 方程: } x = \frac{1}{B}(x' + u_x t') \end{array} \right.$$

用完全相同的方法可以得到以下同时成立的方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{两参考系之间的时间变换式: } t' = Bt \\ \text{沿 } y \text{ (} y') \text{ 轴的坐标“正变换”方程: } y' = B(y - u_y t) \\ \text{沿 } y \text{ (} y') \text{ 轴的坐标“逆变换”方程: } y = \frac{1}{B}(y' + u_y t') \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{两参考系之间的时间变换式: } t' = Bt \\ \text{沿 } z \text{ (} z') \text{ 轴的坐标“正变换”方程: } z' = B(z - u_z t) \\ \text{沿 } z \text{ (} z') \text{ 轴的坐标“逆变换”方程: } z = \frac{1}{B}(z' + u_z t') \end{array} \right.$$

于是,我们就得到时空坐标变换的“正变换”方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = B(x - u_x t) \\ y' = B(y - u_y t) \\ z' = B(z - u_z t) \\ t' = Bt \end{array} \right.$$

及与之等价的“逆变换”方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{B}(x' + u_x t') \\ y = \frac{1}{B}(y' + u_y t') \\ z = \frac{1}{B}(z' + u_z t') \\ t = \frac{1}{B}t' \end{array} \right.$$

“相对性原理”检验

Z 变换的方程组为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} (x - u_x t) \\ (y - u_y t) \\ (z - u_z t) \\ t \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

即:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

这个方程组称为“一般Z变换”，可写成：

$$\begin{cases} x' = B(x - u_x t) \\ y' = B(y - u_y t) \\ z' = B(z - u_z t) \\ t' = Bt \end{cases}$$

表为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & -Bu_x \\ 0 & B & 0 & -Bu_y \\ 0 & 0 & B & -Bu_z \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的变换矩阵 Φ 为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & -Bu_x \\ 0 & B & 0 & -Bu_y \\ 0 & 0 & B & -Bu_z \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵 Φ^{-1} 为：

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{B^4} \begin{bmatrix} B^3 & 0 & 0 & B^3 u_x \\ 0 & B^3 & 0 & B^3 u_y \\ 0 & 0 & B^3 & B^3 u_z \\ 0 & 0 & 0 & B^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见，变换矩阵 Φ 与逆变换矩阵 Φ^{-1} 具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi \times \Phi^{-1} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以，“一般 Z 变换”满足“相对性原理”。

二. “特殊 Z 变换”

不失一般性，我们对 K' 系与 K 系之间的相对运动作以下安排： K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速直线平移相离运动，且保持 x' 轴与 x 轴重合， y' 轴与 y 轴平行及 z' 轴与 z 轴平行。

在这种场合下，有 $u_x = u$ ， $u_y = 0$ ， $u_z = 0$ 。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 3。

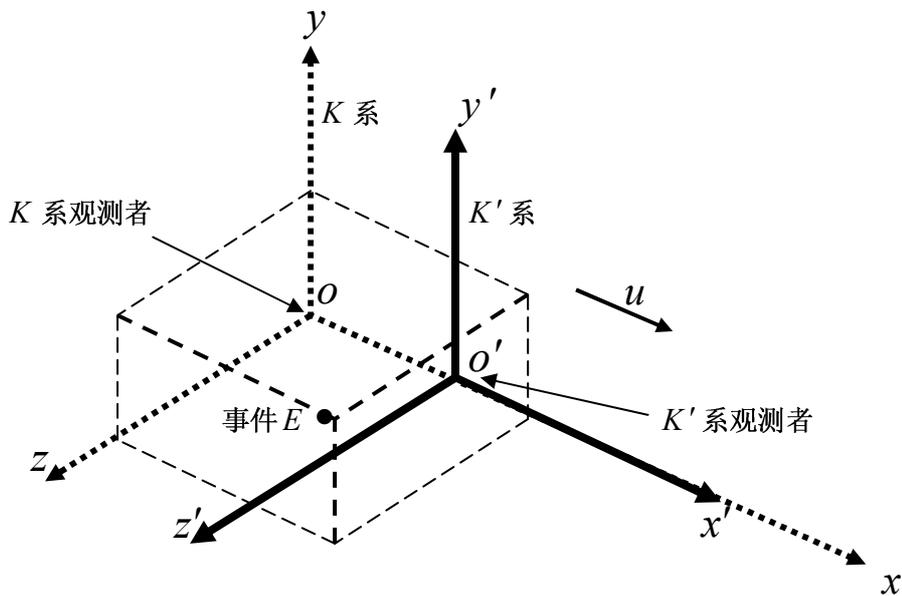


图 3 K' 系与 K 系之间的关系

于是，在“正变换”方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x - u_x t) \\ y' = B(y - u_y t) \\ z' = B(z - u_z t) \\ t' = Bt \end{cases}$$

及“逆变换”方程组：

$$\begin{cases} x = \frac{1}{B}(x' + u_x t') \\ y = \frac{1}{B}(y' + u_y t') \\ z = \frac{1}{B}(z' + u_z t') \\ t = \frac{1}{B}t' \end{cases}$$

中有 $u_x = u$ ， $u_y = 0$ ， $u_z = 0$ 。

“正变换”方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ y' = By \\ z' = Bz \\ t' = Bt \end{cases}$$

“逆变换”方程组：

$$\begin{cases} x = \frac{1}{B}(x' + ut') \\ y = \frac{1}{B}y' \\ z = \frac{1}{B}z' \\ t = \frac{1}{B}t' \end{cases}$$

“相对性原理” 检验

取时空变换式:

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ y' = By \\ z' = Bz \\ t' = Bt \end{cases}$$

可以表为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & -Bu \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的变换矩阵 Φ 为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & -Bu \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵 Φ^{-1} 为:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{B^4} \begin{bmatrix} B^3 & 0 & 0 & B^3u \\ 0 & B^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见, 变换矩阵 Φ 与逆变换矩阵 Φ^{-1} 具有完全相同的张量形式。而且, 有:

$$\begin{aligned} \Phi \times \Phi^{-1} &= B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以，时空变换式

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ y' = By \\ z' = Bz \\ t' = Bt \end{cases}$$

满足“相对性原理”（“相似性原理”）。

同样可以证明，“逆变换”方程组：

$$\begin{cases} x = \frac{1}{B}(x' + ut') \\ y = \frac{1}{B}y' \\ z = \frac{1}{B}z' \\ t = \frac{1}{B}t' \end{cases}$$

同样也满足“相对性原理”（“相似性原理”）。

（一）时间变换式 $t' = Bt$ 中的系数 B 之确定

1. 推导方法 A

“闪光模型 A”示于图 4。

设有两个坐标系： K 系和 K' 系， K 系为静系。

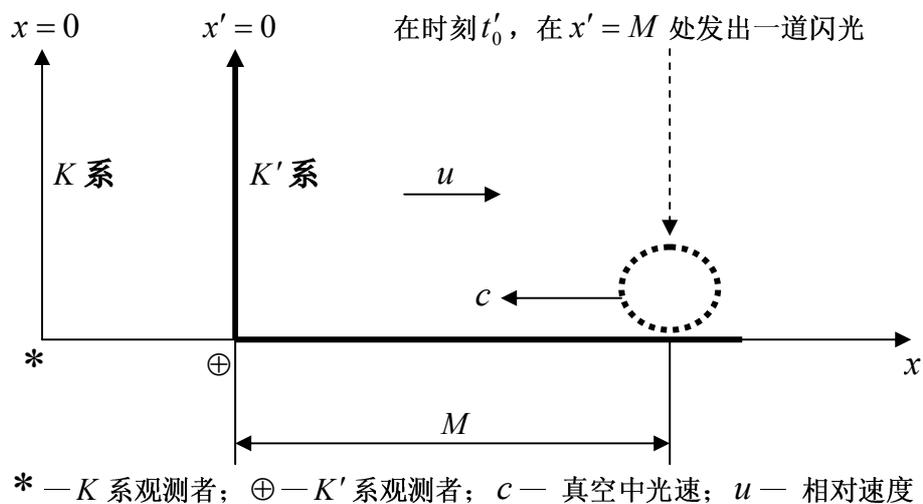


图 4 闪光模型 A

参看图 4。K 系的 x 轴上有一根任意长的刚性杆子。杆子 (K' 系) 沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移运动, 相对速度为 u 。观测者被设置在坐标系的原点。

设: K 系 (K 系观测者 $*$) 和 K' 系 (K' 系观测者 \oplus) 各持有时钟, 在时刻 $t' = t = 0$, K' 系观测者 \oplus ($x' = 0$) 恰好经过 K 系观测者 $*$ ($x = 0$), 这时两坐标系的时钟相互对准到零点, 而且两时钟完全同步运行。

设: 在时刻 t'_0 , 在杆上 $x' = M$ 处发出一道闪光, 参看图 4。

(1) K 系观测者 $*$ 评估的 “‘K' 系观测者 \oplus 见到该闪光’ 之 (K' 系) 时刻” 为 t'_1 :

$$t'_1 = t'_0 + \frac{\frac{1}{B}M}{c+u} = \frac{(c+u)t'_0 + \frac{1}{B}M}{c+u}$$

式中 B 就是空间变换式 $x' = B(x - ut)$ 中的系数 B 。

(2) K 系观测者 $*$ 见到该闪光之 (K 系) 时刻为 t_1 :

$$t_1 = t'_0 + \frac{ut'_0 + \frac{1}{B}M}{c} = \frac{(c+u)t'_0 + \frac{1}{B}M}{c}$$

从 (1) 与 (2) 约去分子中的 $(c+u)t'_0 + \frac{1}{B}M$, 得:

$$\frac{t'_1}{t_1} = \frac{c}{c+u}$$

由于有 $t' = t = 0$, 故得 $t' = \frac{c}{c+u}t$, 即时间变换式:

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \frac{1}{1 + \frac{u}{c}} t \\ 0 < u < +\infty \end{aligned}}$$

这个时间变换式的物理意义是: 在两坐标系有相对运动 ($u \neq 0$) 且真空中光速为有限值 c 的场合下, 静系 (K 系) 观测者 $*$ 在 (K 系) 时刻 t 观测到的某个事件 E 实际上是在 (K' 系) 时刻 $t' = \frac{c}{c+u}t$ 发生的; 或者说, 在 (K' 系) 时刻 t' 发生的某个事件 E 将在 (K 系) 时刻 $t = \frac{c+u}{c}t'$ 才被静系 (K 系) 观测者 $*$ 观测到。

这个时间变换式 $t' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}} t$ 的一个极其重要的特点是：它只取决于真空中光信号传播

速率 c 及坐标系相对速度 u ，而与事件发生的时刻 (t'_0) 及地点 (M) 均无关系，即时间

关系式 $t' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}} t$ 是针对两个坐标系 (K 系与 K' 系) 的整体而言的关系式。这种不含 ‘ x

项’ 的时间变换式必然导致推导出的时空变换必定是“伽利略型”的时空变换。

2. 推导方法 B

“闪光模型 B” 示于图 5。

设有两个坐标系： K 系和 K' 系， K 系为静系。

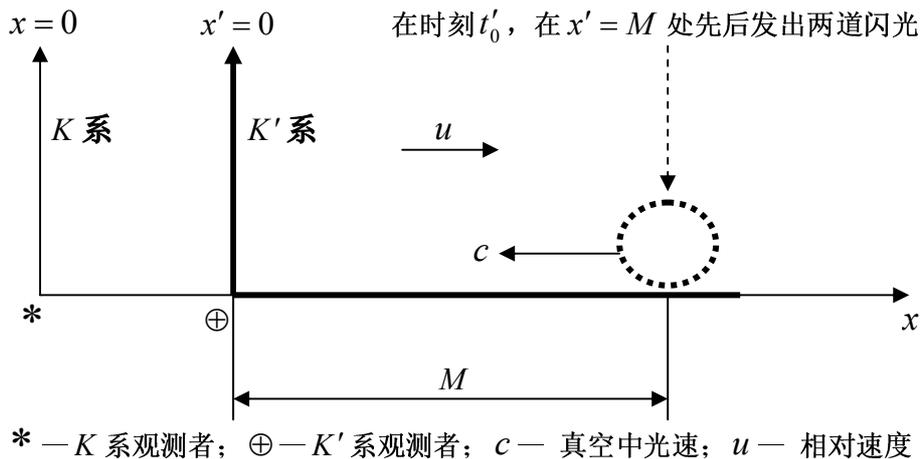


图 5 闪光模型 B

参看图 5。 K 系的 x 轴上有一根任意长的刚性杆子。杆子 (K' 系) 沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移运动，相对速度为 u 。观测者被设置在坐标系的原点。

设： K 系 (K 系观测者 $*$) 和 K' 系 (K' 系观测者 \oplus) 各持有时钟，在时刻 $t' = t = 0$ ， K' 系观测者 \oplus ($x' = 0$) 恰好经过 K 系观测者 $*$ ($x = 0$)，这时两坐标系的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。

设：在某一时刻 t' ，在杆上 $x' = M$ 处发出一道闪光，参看图 5。

- (1) K 系观测者 $*$ 评估的“‘杆上 $x' = M$ 处发出一道闪光’ 之 (K' 系) 时刻” 为 t' ；
- (2) K 系观测者 $*$ 见到该闪光时之 (K 系) 时刻为 t ；

$$t = t' + \frac{ut' + \frac{1}{B}M}{c} = \frac{c+u}{c}t' + \frac{1}{Bc}M$$

从(1)可得： $x' = M$ 处先后发出两道闪光的时间间隔为 $\Delta t'$ 。

从(2)可得： K 系观测者*先后见到两道闪光的时间间隔为 Δt ：

$$\Delta t = \frac{c+u}{c}\Delta t' + \frac{1}{Bc}\Delta M$$

由于两道闪光在杆上 $x' = M$ 处先后发出，故 $\Delta M = 0$ ，因此 K 系观测者*见到（杆上任意地点先后发出）两道闪光的时间间隔是：

$$\Delta t = \frac{c+u}{c}\Delta t'$$

由于有 $t' = t = 0$ ，故得 $t = \frac{c+u}{c}t'$ ，即时间变换式：

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \frac{1}{1 + \frac{u}{c}} t \\ 0 < u < +\infty \end{aligned}}$$

时间变换式为

$$B = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}$$

故得“特殊 Z 变换”之时空变换式

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}(x - ut) \\ y' &= \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}y \\ z' &= \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}z \\ t' &= \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}t \end{aligned} \right.$$

及其“逆变换”方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(x' + ut') \\ y = \left(1 + \frac{u}{c}\right)y' \\ z = \left(1 + \frac{u}{c}\right)z' \\ t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t' \end{array} \right.$$

这就是两坐标系有相对运动（ u ）且真空中光速为有限值（ c ）的场合下的时空变换，它实际上是广义的伽利略变换。这个时空变换是笔者完全独立地首次发现的，故可命名为“周方变换”（简称“Z变换”）。

当光速 $c \rightarrow +\infty$ 时或在 $\frac{u}{c} \approx 0$ （相对速度 u 与光速 c 相比较是很小）的时候 Z 变换就退化为（经典的）伽利略变换。可见，（经典的）伽利略变换作为特例被包含在 Z 变换之中。

对于“特殊 Z 变换”，在 x' （ x ）轴方向，由 K' 系观测者 \oplus 的 K' 系时空点 (x', t') 生成对应的 K 系观测者 $*$ 的 K 系时空点 (x, t) 之过程示于图 6 — 图 8。

在时刻 t' ， K' 系观测者 \oplus 观测到运动质点的 K' 系坐标 x' [即运动质点离 K' 系观测者 \oplus 的距离]。此刻， K' 系观测者 \oplus 离 K 系观测者 $*$ 的距离为 ut' ，故运动质点的 K 系坐标 [即运动质点离 K 系观测者 $*$ 的距离] 为 $x' + ut'$ 。如果真空中光速为无限大，则 K 系观测者 $*$ 和 K' 系观测者 \oplus 在时刻 $t = t'$ 同时观测到该运动质点，此时 K 系观测者 $*$ 观测到运动质点的 K 系坐标为 $x = x' + ut'$ 。这样，我们就得到 K 系时空点 (x, t) ：

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' + ut' \\ t = t' \end{array} \right.$$

此即（经典的）伽利略变换： $x' = x - ut$ ， $t' = t$ 。（参看图 6）

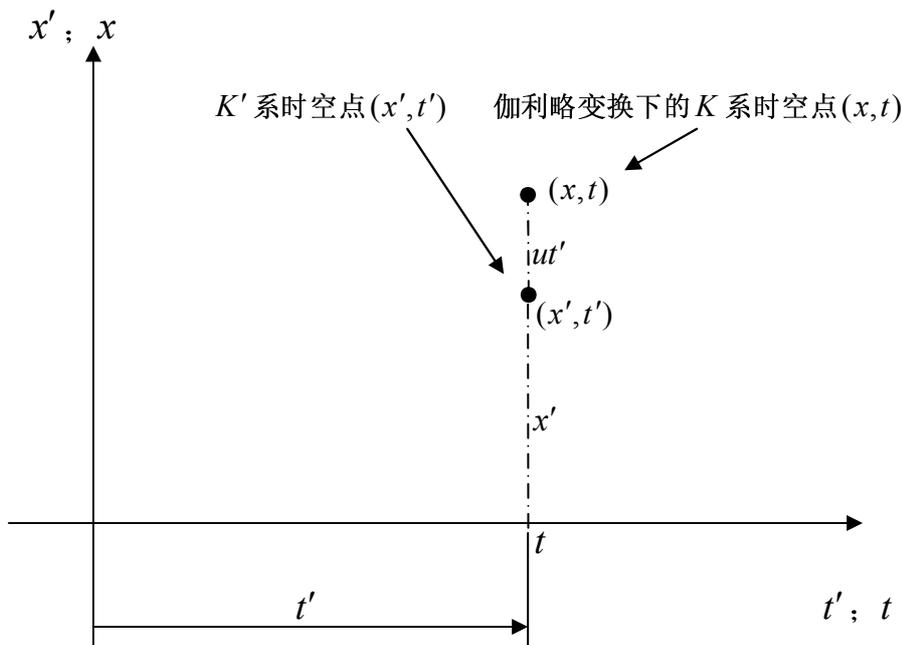


图 6 运动质点的 K' 系时空点 (x', t') 与 K 系时空点 (x, t)

但是，由于真空中光速为有限值 (c)，所以在时刻 $t = t'$ ， K 系观测者 * 并不能立刻观测到该运动质点。(参看图 7)

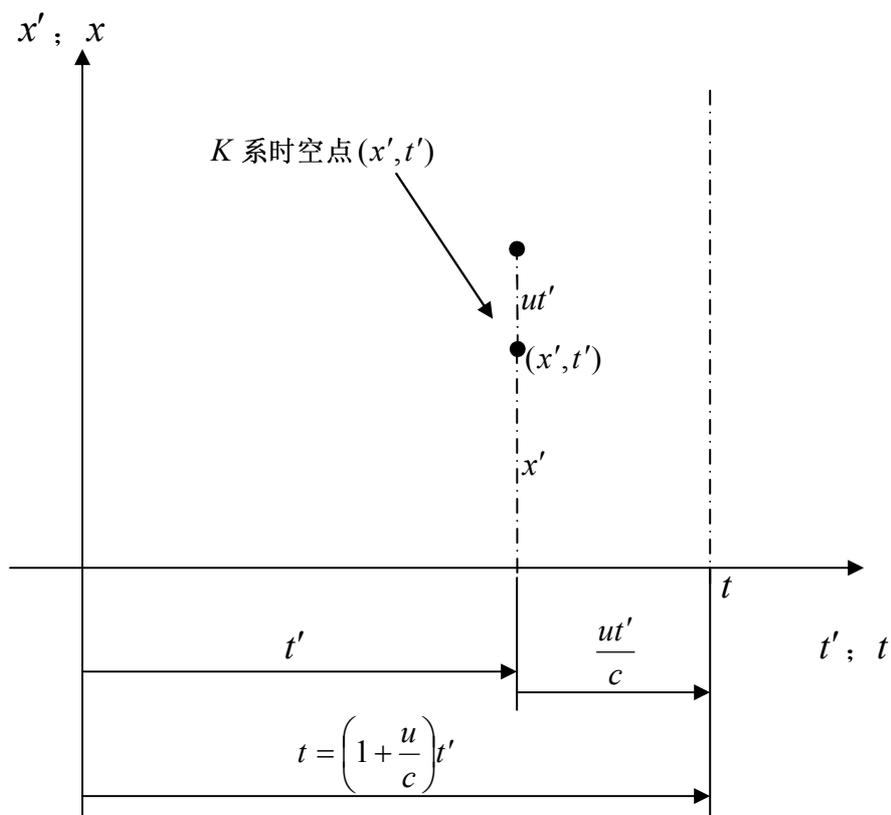


图 7 运动质点的 K' 系时空点 (x', t')

K 系观测者 * 要在时刻 t' 之后经过一段时间 $\frac{ut'}{c}$ 才可观测到该运动质点，这个时刻为

t ：

$$t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$$

运动质点的 K' 系时空点 (x', t') 与对应的 K 系时空点 (x, t) 示于图 8。

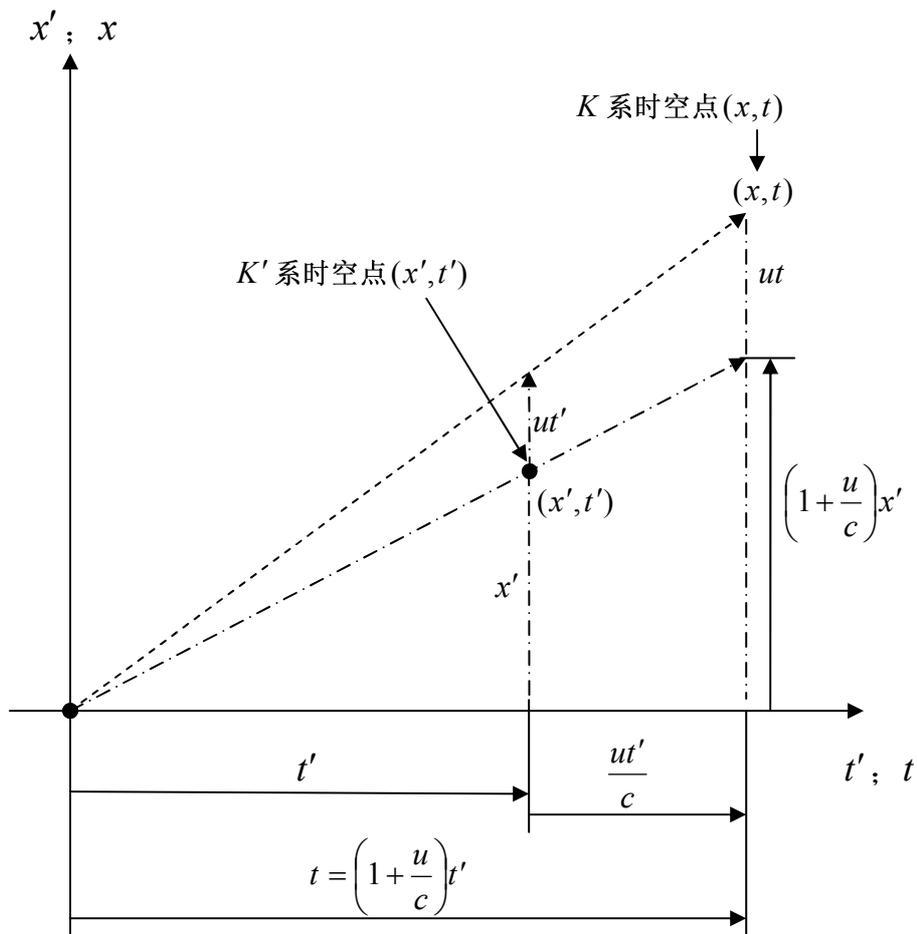


图 8 运动质点的 K' 系时空点 (x', t') 与对应的 K 系时空点 (x, t)

对于图 7 的形成可作如下解释：

(1) 在时刻 t' ， K' 系观测者 \oplus 观测到运动质点。此刻，运动质点的 K' 系坐标为 x' ， K' 系观测者 \oplus 离 K 系观测者 * 的距离为 ut' 。

(2) 由于 K' 系相对于 K 系作匀速 (u) 直线平移相离运动，以及真空中光传播速率为有限值 (c)，所以， K 系观测者 * 要等到时刻 $t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ 才观测到运动质点

(x', t') ，在这个时刻 $t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ ， K 系观测者 * 对运动质点的 K 系坐标为 x ：（参看图

8）

$$\begin{aligned} x &= \left(ut' + u \cdot \frac{ut'}{c}\right) + \left(x' + u \cdot \frac{x'}{c}\right) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)ut' + \left(1 + \frac{u}{c}\right)x' \\ &= \left(1 + \frac{u}{c}\right)(x' + ut') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)x' + u\left(1 + \frac{u}{c}\right)t' \\ &= \left(1 + \frac{u}{c}\right)x' + ut \end{aligned}$$

此式表明， K 系观测者 * 在时刻 $t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ 观测到运动质点 (x', t') ，这时在 K 系观

测者 * 看来，该运动质点的 K 系坐标 x 包含两段长度：

(a) 运动质点的 K' 系坐标： $\left(1 + \frac{u}{c}\right)x'$ ；

(b) K' 系观测者 \oplus 离 K 系观测者 * 的距离： $u\left(1 + \frac{u}{c}\right)t' = ut$

综上，得到一组数学关系式：（参看图 8）

$$\begin{cases} t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t' \\ x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)x' + ut \end{cases}$$

由此可以看到，由于 K' 系相对于 K 系作匀速（ u ）直线平移相离运动，以及真空中光传播速率为有限值（ c ），故 K 系观测者 * 要等到时刻 $t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ 才观测到运动质点

(x', t') ，这时，依 K 系观测者 * 看来，产生了“动系时间间隔显大”效应 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ ，也

即 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)\Delta t'$ ，与此同时也产生了“动系空间间隔显大”效应 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)x'$ ，也即 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)\Delta x'$ 。

而且，这两个“显大”效应的程度大小一样，均为 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)$ 。

依 K' 系观测者 \oplus 看来，该运动质点的 K' 系速度为： $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ 。

相应地，依 K 系观测者 $*$ 看来，该运动质点的 K' 系速度为：

$$\frac{d\left[\left(1 + \frac{u}{c}\right)x'\right]}{d\left[\left(1 + \frac{u}{c}\right)t'\right]} = \frac{\left(1 + \frac{u}{c}\right)dx'}{\left(1 + \frac{u}{c}\right)dt'} = \frac{dx'}{dt'}$$

由此可见，运动质点的 K' 系速度 $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ 不依参考系而变，乃是一个变换不变量。

(二) “特殊 Z 变换”的时空图

“特殊 Z 变换”的时空图示于图 9、图 10、图 11。

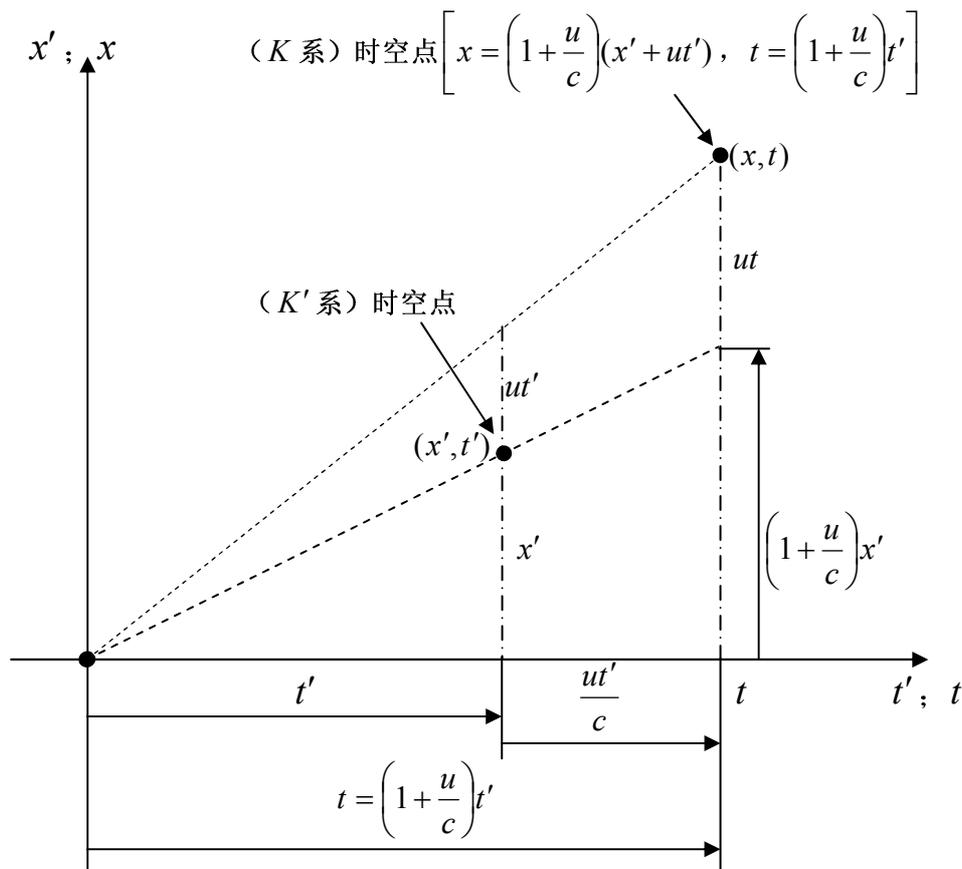


图 9 “特殊 Z 变换”（沿 x 轴）的时空图

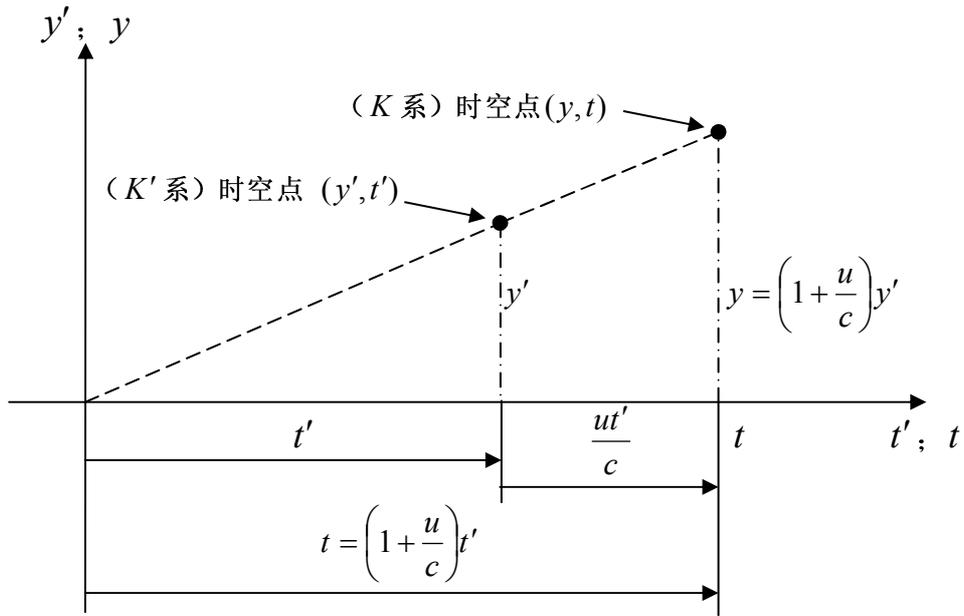


图 10 “特殊 Z 变换”（沿 y 轴）的时空图

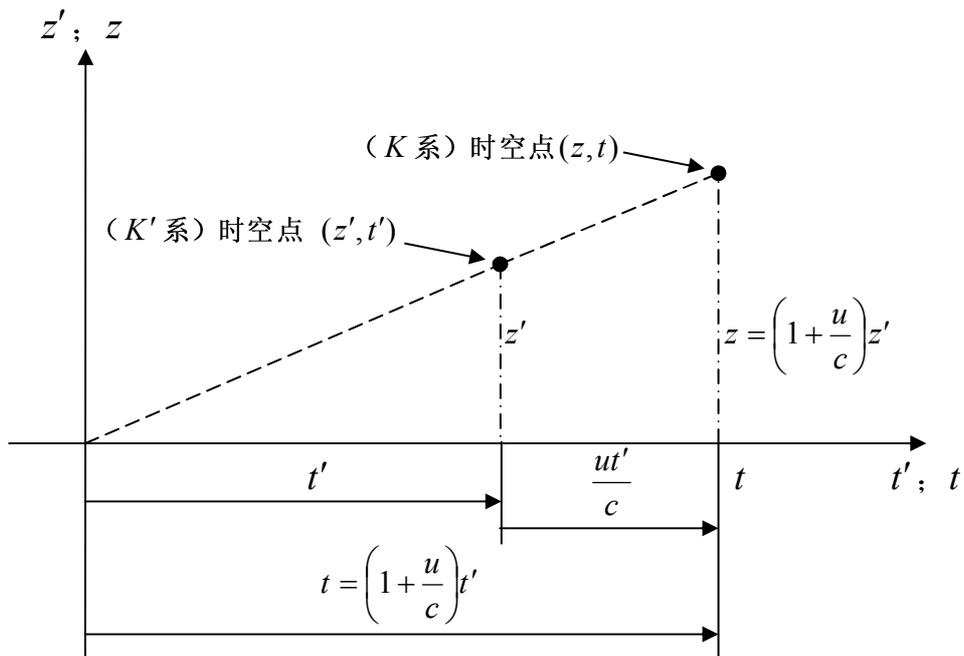


图 11 “特殊 Z 变换”（沿 z 轴）的时空图

将图 9、图 10、图 11 三个图整合为一个图，得图 12。

$x', x; y', y; z', z$

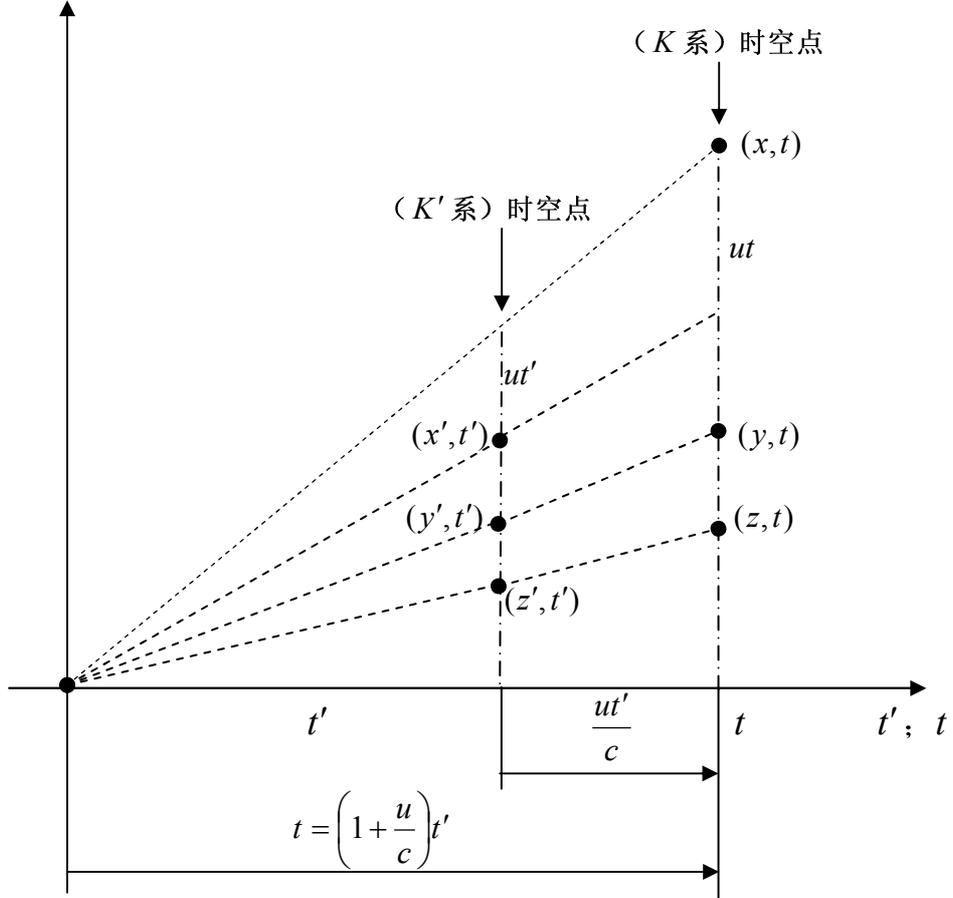


图 12 “特殊 Z 变换”的时空图

将时空变换式

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}(x - ut) \\ y' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}y \\ z' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}z \\ t' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}t \end{cases}$$

写成

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{u}{c}\right)x' = x - ut \\ \left(1 + \frac{u}{c}\right)y' = y \\ \left(1 + \frac{u}{c}\right)z' = z \\ \left(1 + \frac{u}{c}\right)t' = t \end{array} \right.$$

(a) 在物理上，对时空变换式的解读是：

K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移相离运动 ($u > 0$) 且光速为有限值 (c)。两观测者分别处在 K' 系原点和 K 系原点。 K' 系观测者和 K 系观测者各持有时钟，在时刻 $t' = t = 0$ ，有 $x' = x = 0$ ， $y' = y = 0$ ， $z' = z = 0$ ，这时两观测者的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。在这种场合下， K 系观测者在时刻 t 观测到某运动质点的 K 系坐标分别为 $(x - ut)$ 、 y 、 z ，他认为后者 [即： $(x - ut)$ 、 y 、 z] 就是 K' 系观测者在此时刻 t 所测到的该质点的 K' 系坐标。这就是说，在 K 系观测者看来， K' 系观测者在时刻 t

所测到的该质点的 K' 系坐标值，比他在前一刻 t' $\left(t' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}} t \right)$ 所测到的 K' 系坐标值

x' 、 y' 、 z' 要大，分别为 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)x'$ 、 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)y'$ 、 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)z'$ 。

(b) 在物理上，对时间变换式 $\left(1 + \frac{u}{c}\right)t' = t$ 的解读是：

K 系观测者与 K' 系观测者对同一运动质点进行测量时，由于 K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移相离运动 ($u > 0$) 且光速为有限值 (c)， K 系观测者要在 K' 系观测者见到该运动质点的时刻 t' 之后的那一时刻 $t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ 才可见到该运动质点。

(三) x 轴、 y 轴、 z 轴方向上时空轨迹的形成

下面给出 x 轴、 y 轴、 z 轴方向上 Z 变换的时空轨迹的形成过程。

(1) 单一匀速相对运动

单一匀速(u)相对运动下 Z 变换的时空点示于图 13。

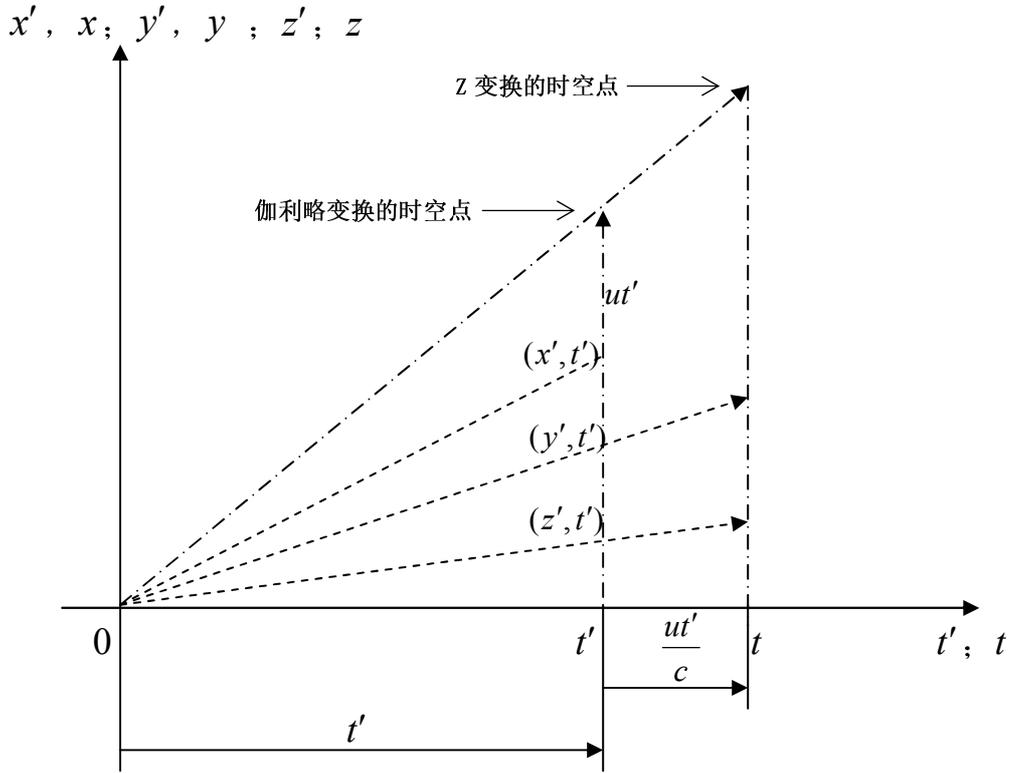


图 13 单一匀速相对运动下 Z 变换的时空点

参看图 13。对于任意时刻 t' ，都有：参考系相对速度为 u ， $u > 0$ 。可得：

$$s(t') = ut'$$

式中 $s(t')$ 为在时刻 t' 时 K' 系原点（ K' 系观测者）离 K 系原点（ K 系观测者）之距离。

K 系观测者与 K' 系观测者对同一运动质点进行测量时，由于 K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移相对运动且光速为有限值，故 K 系观测者要在 K' 系观测者见到该运动质点的时刻 t' 之后的时刻 t 才可见到该运动质点。所以，有：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c}$$

将 $s(t') = ut'$ 代入此式，得：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c} = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'}\right]t' = \left(1 + \frac{ut'}{ct'}\right)t' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$$

这就是 Z 变换的时间变换式。根据此种表达形式的时间变换式相应地可得 Z 变换的空间变换式:

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= \left(1 + \frac{u}{c}\right) [x'(t') + s(t')] \\ &= \left(1 + \frac{u}{c}\right) [x'(t') + ut'] \\ y(t) &= \left(1 + \frac{u}{c}\right) y'(t') \\ z(t) &= \left(1 + \frac{u}{c}\right) z'(t') \end{aligned} \right.$$

Z 变换之“逆变换”为:

$$\left\{ \begin{aligned} t' &= \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} t \\ x'(t') &= \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' \\ y'(t') &= \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} y(t) \\ z'(t') &= \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} z(t) \end{aligned} \right.$$

(2) 分段匀速相对运动

第 1 个匀速相对运动时段为 $0 < t' \leq t'_1$ 。第 1 个匀速相对运动时段 $(0, t'_1]$ 内的时空点示于图 14。

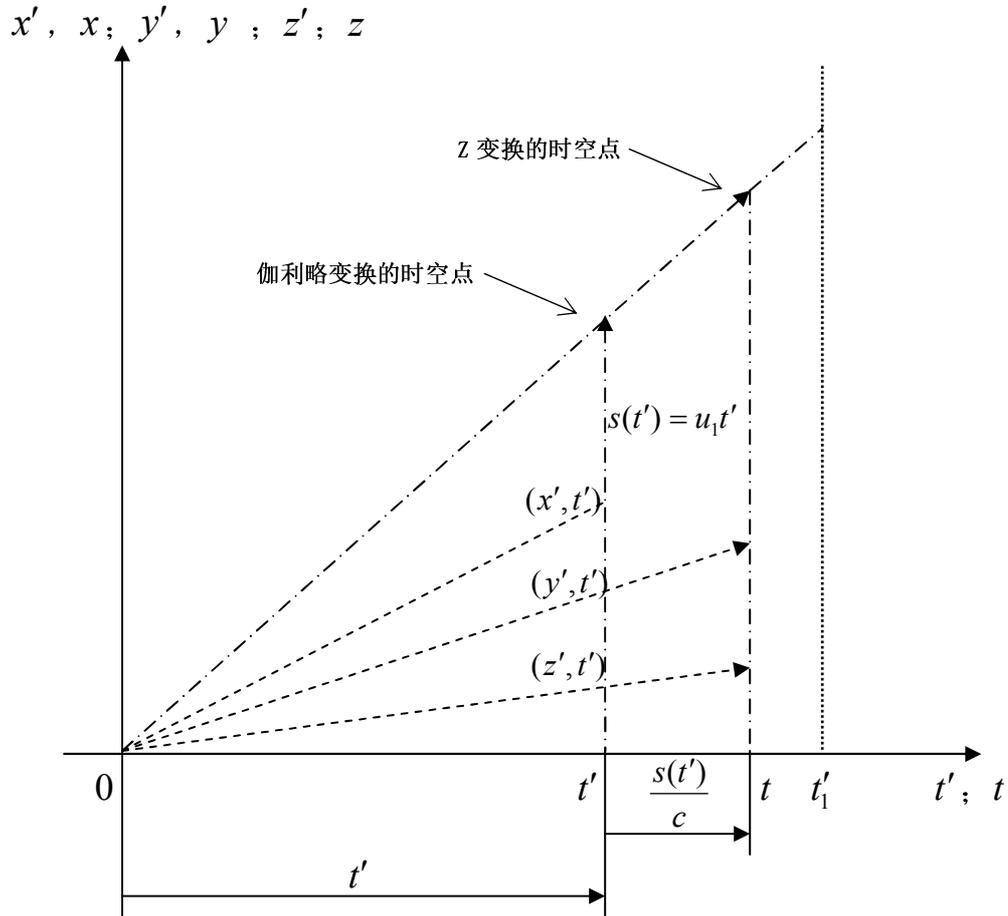


图 14 第 1 个匀速相对运动时段 $(0, t'_1]$ 内的时空点

参看图 14。对于第 1 时段 $(0, t'_1]$ 内的任意时刻 $t' \in (0, t'_1]$ ，有：在第 1 时段 $(0, t'_1]$ 内，参考系相对速度为 u_1 ， $u_1 > 0$ 。可得：

$$s(t') = u_1 t'$$

式中 $s(t')$ 为在时刻 t' 时 K' 系原点 (K' 系观测者) 离 K 系原点 (K 系观测者) 之距离。

K 系观测者与 K' 系观测者对同一运动质点进行测量时，由于 K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移相对运动且光速为有限值，故 K 系观测者要在 K' 系观测者见到该运动质点的时刻 t' 之后的时刻 t 才可见到该运动质点。所以，有：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c}$$

将 $s(t') = u_1 t'$ 代入此式，得：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c} = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'}\right] t' = \left[1 + \frac{u_1 t'}{ct'}\right] t' = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] t'$$

这就是 Z 变换的时间变换式。根据此种形式的时间变换式相应地可得 Z 变换的空间变换式：

$$\begin{cases} x(t) = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] [x'(t') + s(t')] \\ \qquad \qquad \qquad = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] [x'(t') + u_1 t'] \\ y(t) = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] y'(t') \\ z(t) = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] z'(t') \end{cases}$$

将所得结果列于表 1。

表 1 （第 1 时段）

<p>（第 1 时段）： $0 < t' \leq t'_1$； （t'_1—相对运动变动时刻）</p> <p>$s(t') = u_1 t'$； $s(t'_1) = u_1 t'_1$</p>
$t = t' + \frac{s(t')}{c} = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'}\right] t' = \left[1 + \frac{u_1 t'}{ct'}\right] t' = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] t'$
$x(t) = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] [x'(t') + s(t')]$ $= \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] [x'(t') + u_1 t']$
$y(t) = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] y'(t')$
$z(t) = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] z'(t')$

表 1 中的 Z 变换之“逆变换”列于表 2。

表 2 Z 变换之“逆变换”

(第 1 时段): $0 < t' \leq t'_1$; (t'_1 —相对运动变动时刻)
$t' = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} t$
$x'(t') = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} x(t) - u_1 t'$
$y'(t') = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} y(t)$
$z'(t') = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} z(t)$

第 i 个 ($i \geq 2$) 匀速相对运动时段: $t'_{i-1} \leq t' \leq t'_i$

第 i 个 ($i \geq 2$) 匀速相对运动时段 $[t'_{i-1}, t'_i]$ 内的时空点示于图 15。

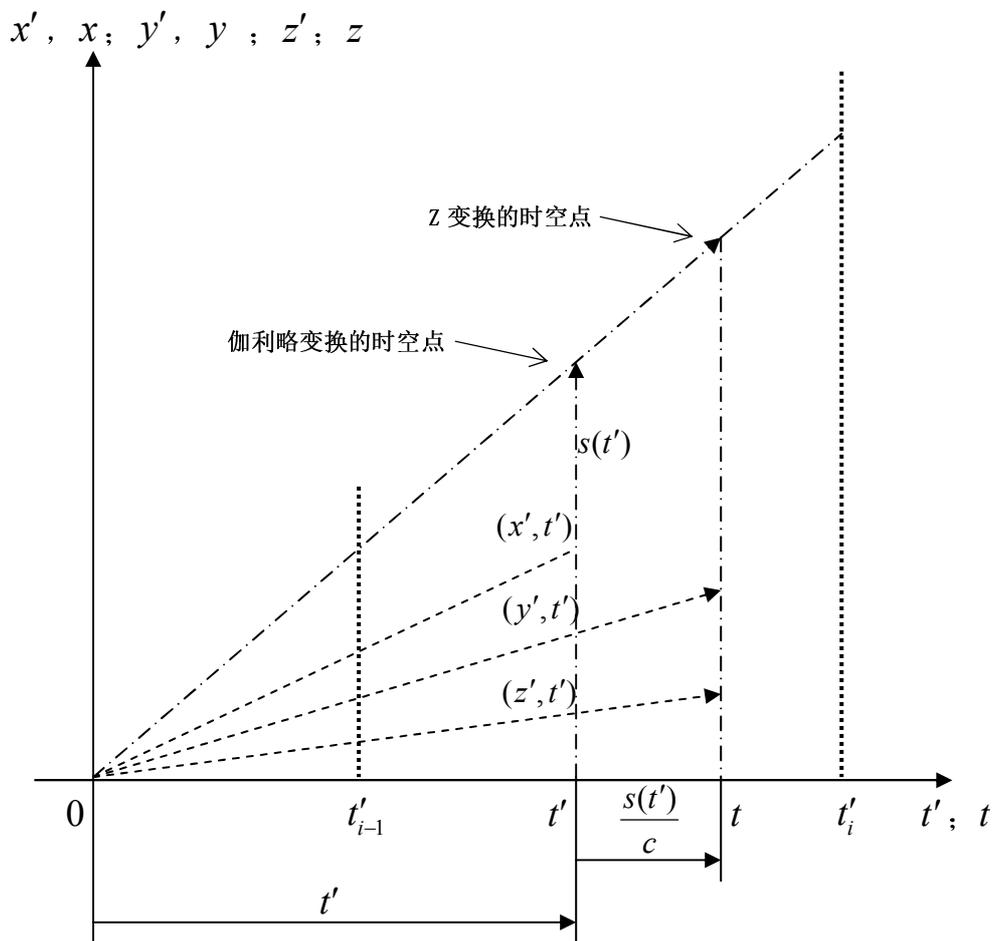


图 15 第 i 个匀速相对运动时段 $[t'_{i-1}, t'_i]$ 内的时空点

参看图 15。对于第 i 时段 $[t'_{i-1}, t'_i]$ 内的任意时刻 $t' \in [t'_{i-1}, t'_i]$ ，有：
$$\frac{s(t') - s(t'_{i-1})}{t' - t'_{i-1}} = u_i,$$

u_i 为第 i 时段 $[t'_{i-1}, t'_i]$ 内的参考系相对速度。从公式 $\frac{s(t') - s(t'_{i-1})}{t' - t'_{i-1}} = u_i$ 得：

$$s(t') = s(t'_{i-1}) + u_i(t' - t'_{i-1})$$

式中 $s(t'_{i-1})$ 为第 $(i-1)$ 时段之终点时刻 t'_{i-1} 时 K' 系原点 (K' 系观测者) 离 K 系原点 (K 系观测者) 之距离，故有：

$$s(t'_{i-1}) = u_1 t'_1 + \sum_2^{i-1} u_i (t'_i - t'_{i-1})$$

由此可得时刻 t' 时 K' 系原点离 K 系原点之距离 $s(t')$ ：

$$\begin{aligned}
 s(t') &= s(t'_{i-1}) + u_i(t' - t'_{i-1}) \\
 &= u_1 t'_1 + \sum_2^{i-1} u_i(t'_i - t'_{i-1}) + u_i(t' - t'_{i-1}) \\
 &= u_1 t'_1 + u_2(t'_2 - t'_1) + u_3(t'_3 - t'_2) + u_4(t'_4 - t'_3) + \dots + u_{i-1}(t'_{i-1} - t'_{i-2}) + u_i(t' - t'_{i-1}) \\
 &= (u_1 - u_2)t'_1 + (u_2 - u_3)t'_2 + (u_3 - u_4)t'_3 + \dots + (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t' \\
 &= \sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'
 \end{aligned}$$

即：

$$s(t') = \sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'$$

K 系观测者与 K' 系观测者对同一运动质点进行观测时，由于 K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移相对运动且光速为有限值，故 K 系观测者要在 K' 系观测者见到该运动质点的时刻 t' 之后的时刻 t 才可以见到该运动质点。所以，有：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c}$$

将 $s(t') = \sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'$ 代入此式，得：

$$\begin{aligned}
 t = t' + \frac{s(t')}{c} &= \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right] t' = \left[1 + \frac{\sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'}{ct'} \right] t' \\
 &= \left(1 + \frac{u_i}{c} + \sum_{i=2}^i \frac{u_{i-1} - u_i}{c} \frac{t'_{i-1}}{t'} \right) t' \\
 &= \left\{ 1 + \sum_2^{i-1} \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} + \left[\frac{u_{i-1}}{c} \frac{t'_{i-1}}{t'} + \frac{u_i}{c} \left(1 - \frac{t'_{i-1}}{t'} \right) \right] \right\} t' \\
 &= \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} t'
 \end{aligned}$$

这就是 Z 变换的时间变换式。根据这种表达形式的时间变换式相应地可得 Z 变换的空间变换式：

$$\begin{cases} x(t) = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} \left[x'(t') + \sum_2^i (u_{i-1} - u_i) t'_{i-1} + u_i t' \right] \\ y(t) = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} y'(t') \\ z(t) = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} z'(t') \end{cases}$$

第 i 时段 ($i \geq 2$) 内时刻 t' ($t'_{i-1} \leq t' \leq t'_i$) 时的 Z 变换列于表 3 及表 4。

表 3 第 i 时段 ($i \geq 2$) 内时刻 t' ($t'_{i-1} \leq t' \leq t'_i$) 时的 Z 变换表达式

$t = \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) t' + \sum_{i=2}^i \frac{u_{i-1} - u_i}{c} t'_{i-1} = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} t'$
$x(t) = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} \left[x'(t') + \sum_2^i (u_{i-1} - u_i) t'_{i-1} + u_i t' \right]$
$y(t) = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} y'(t')$
$z(t) = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\} z'(t')$

表 4 第 i 时段 ($i \geq 2$) 内时刻 t' ($t'_{i-1} \leq t' \leq t'_i$) 时的 Z 变换之逆变换

$\begin{aligned} t' &= \left(1 + \frac{u_i}{c} \right)^{-1} \left(t + \frac{u_2 - u_1}{c} t'_1 + \sum_3^i \frac{u_i - u_{i-1}}{c} t'_{i-1} \right) \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\}^{-1} t \end{aligned}$
$x'(t') = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\}^{-1} x(t) - \left[\sum_2^i (u_{i-1} - u_i) t'_{i-1} + u_i t' \right]$
$y'(t') = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\}^{-1} y(t)$
$z'(t') = \left\{ \left(1 + \frac{u_i}{c} \right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c} \right) \frac{t'_{i-1}}{t'} \right] \right\}^{-1} z(t)$

在 $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u = \text{const.}$ 的场合下, Z 变换的 ‘正’ 变换式为:

$$\begin{cases} x(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) [x'(t') + ut'] \\ y(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) y'(t') \\ z(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) z'(t') \\ t = \left(1 + \frac{u}{c}\right) t' \end{cases}$$

‘逆’变换式为：

$$\begin{cases} x'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' \\ y'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} y(t) \\ z'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} z(t) \\ t' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} t \end{cases}$$

下面是这种情况下 Z 变换的 ‘正’ 变换式及 ‘逆’ 变换式的示例。

‘正’ 变换：设 $x'(t') = 1 + \sin t'$ ， $y'(t') = at'^2$ ， $z'(t') = bt'$ ，代入 ‘正’ 变换式，得：

$$\begin{cases} t = \left(1 + \frac{u}{c}\right) t' \\ x(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) [x'(t') + ut'] = \left(1 + \frac{u}{c}\right) (1 + \sin t' + ut') \\ \quad = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \left(1 + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}} + u \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \left(1 + \sin \frac{t}{1 + \frac{u}{c}}\right) + ut \\ y(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) at'^2 = \left(1 + \frac{u}{c}\right) at^2 \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} at^2 \\ z(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) bt' = bt \end{cases}$$

‘逆’变换：将 $x(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(1 + \sin t' + ut')$ ， $y(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)at'^2$ ， $z(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)bt'$ ，代入

‘逆’变换式，得：

$$\begin{cases} t' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} t \\ x'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \left(1 + \frac{u}{c}\right)(1 + \sin t' + ut') - ut' = 1 + \sin t' \\ y'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} y(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \left(1 + \frac{u}{c}\right)at'^2 = at'^2 \\ z'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} z(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \left(1 + \frac{u}{c}\right)bt' = bt' \end{cases}$$

计算结果 (K' 系时空轨迹与相应的 K 系时空轨迹) 示于图 16、图 17、图 18。

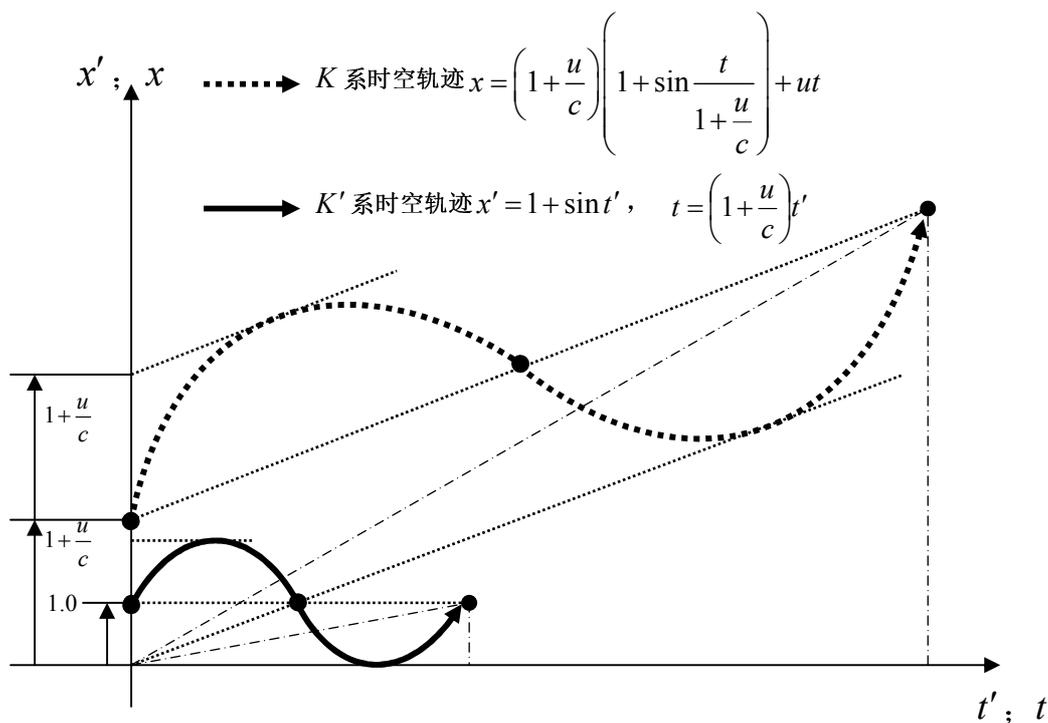


图 16 Z 变换下的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

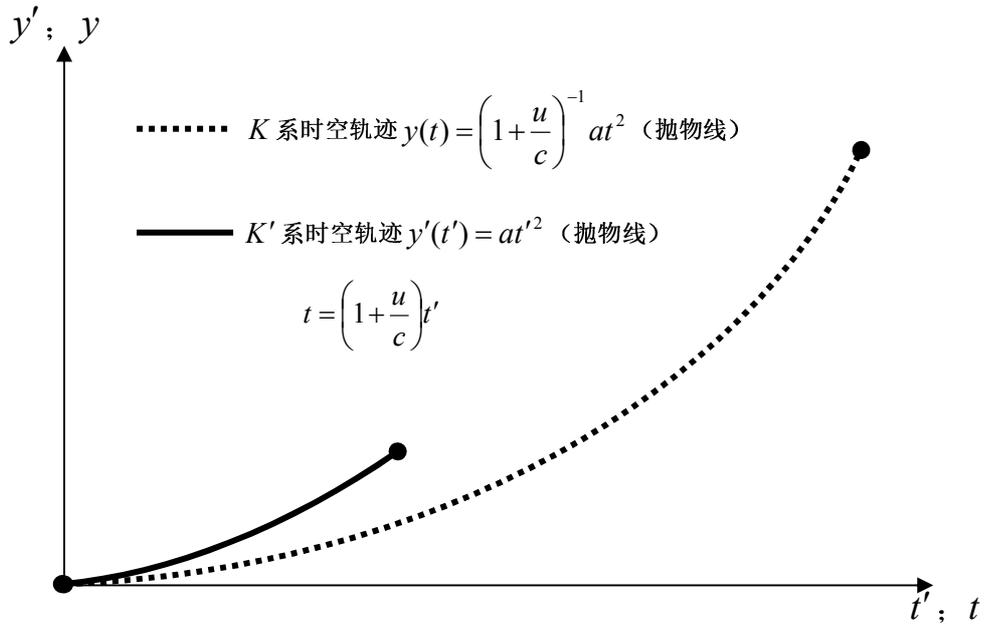


图 17 Z 变换下的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

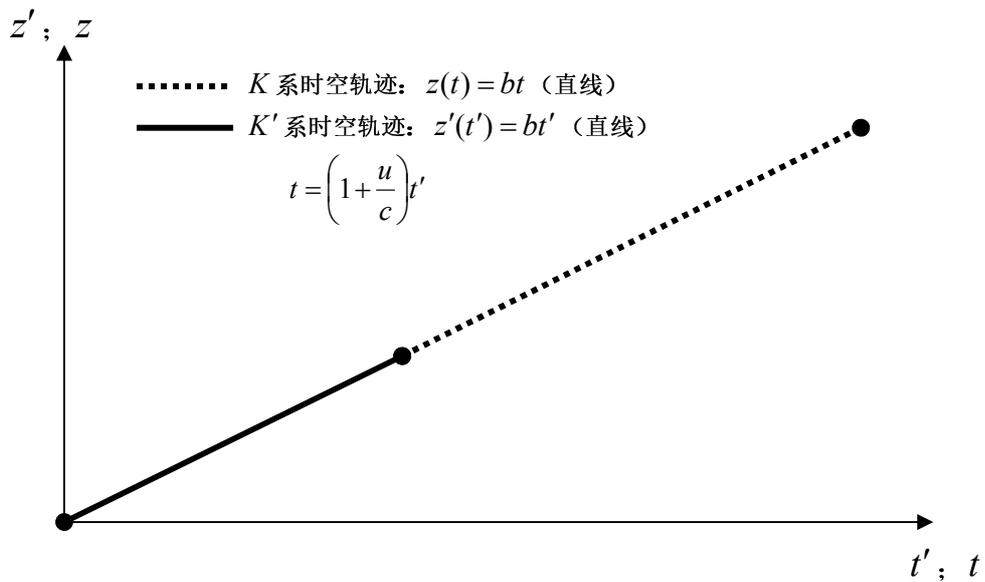


图 18 Z 变换下的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

下面是 Z 变换的另一示例。

‘正’变换：设 $x'(t') = kt'^2$ ， $y'(t') = at'^2$ ， $z'(t') = bt'$ ，代入‘正’变换式，得：

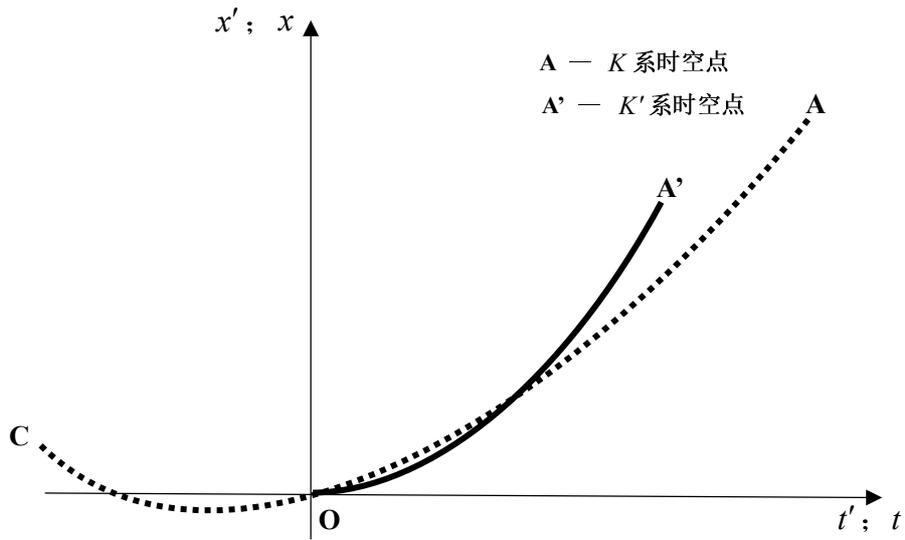
$$\left\{ \begin{array}{l} t = \left(1 + \frac{u}{c}\right) t' \\ x(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) [x'(t') + ut'] = \left(1 + \frac{u}{c}\right) (kt'^2 + ut') \\ \quad = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \left[k \left(\frac{t}{1 + \frac{u}{c}} \right)^2 + u \frac{t}{1 + \frac{u}{c}} \right] = \frac{c}{c+u} kt^2 + ut \\ y(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) at'^2 = \left(1 + \frac{u}{c}\right) at^2 \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} at^2 \\ z(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) bt' = bt \end{array} \right.$$

‘逆’变换：将 $x(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) (kt'^2 + ut')$, $y(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) at'^2$, $z(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right) bt'$, 代入 ‘逆’

变换式，得：

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} t \\ x'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \left(1 + \frac{u}{c}\right) (kt'^2 + ut') - ut' = kt'^2 \\ y'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} y(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \left(1 + \frac{u}{c}\right) at'^2 = at'^2 \\ z'(t') = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} z(t) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)^{-1} \left(1 + \frac{u}{c}\right) bt' = bt' \end{array} \right.$$

在 x 轴方向上的 K' 系时空轨迹 $x' = kt'^2$ 与相应的 K 系时空轨迹 $x = \frac{c}{c+u} kt^2 + ut$ 示于图 19。



K 系时空轨迹: $x = \frac{c}{c+u} kt^2 + ut$ (曲线 COA — 带斜轴的抛物线)

K' 系时空轨迹: $x' = kt'^2$ (曲线 OA' — 抛物线)

图 19 x 轴方向上的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

Z 变换在 x 轴、 y 轴、 z 轴方向上的 K 系时空轨迹示于图 20、图 21、图 22。

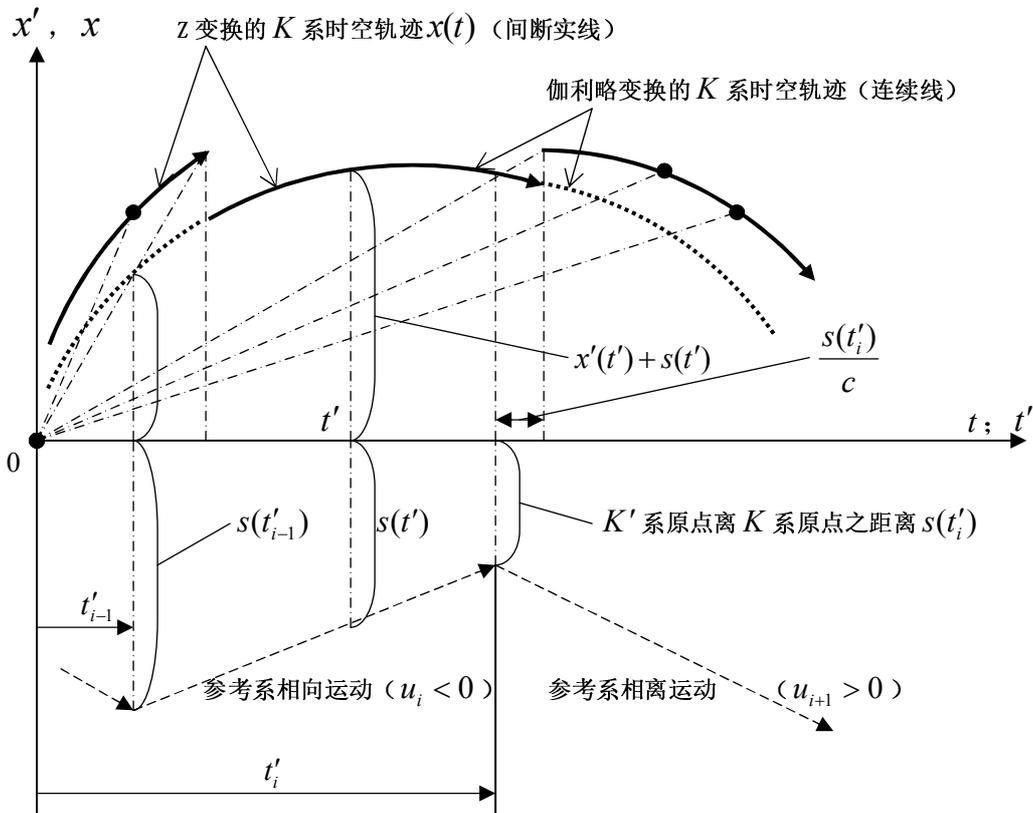


图 20 Z 变换在 x 轴方向上的 K 系时空轨迹

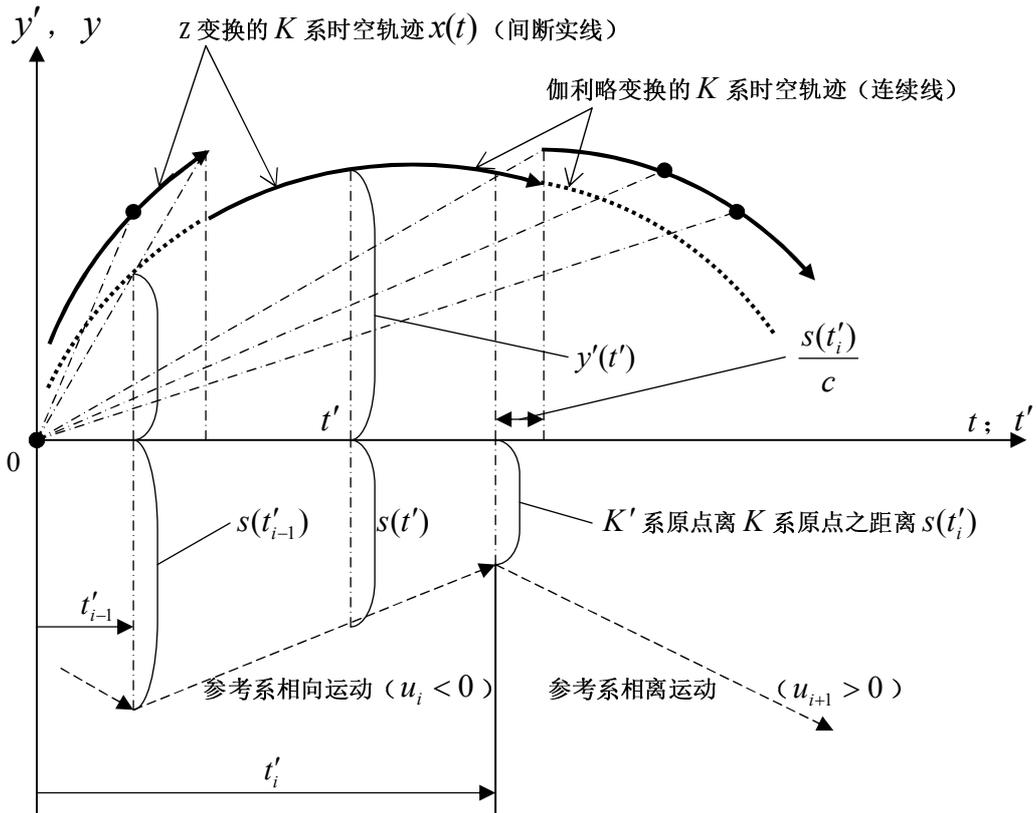


图 21 Z 变换在 y 轴方向上的 K 系时空轨迹

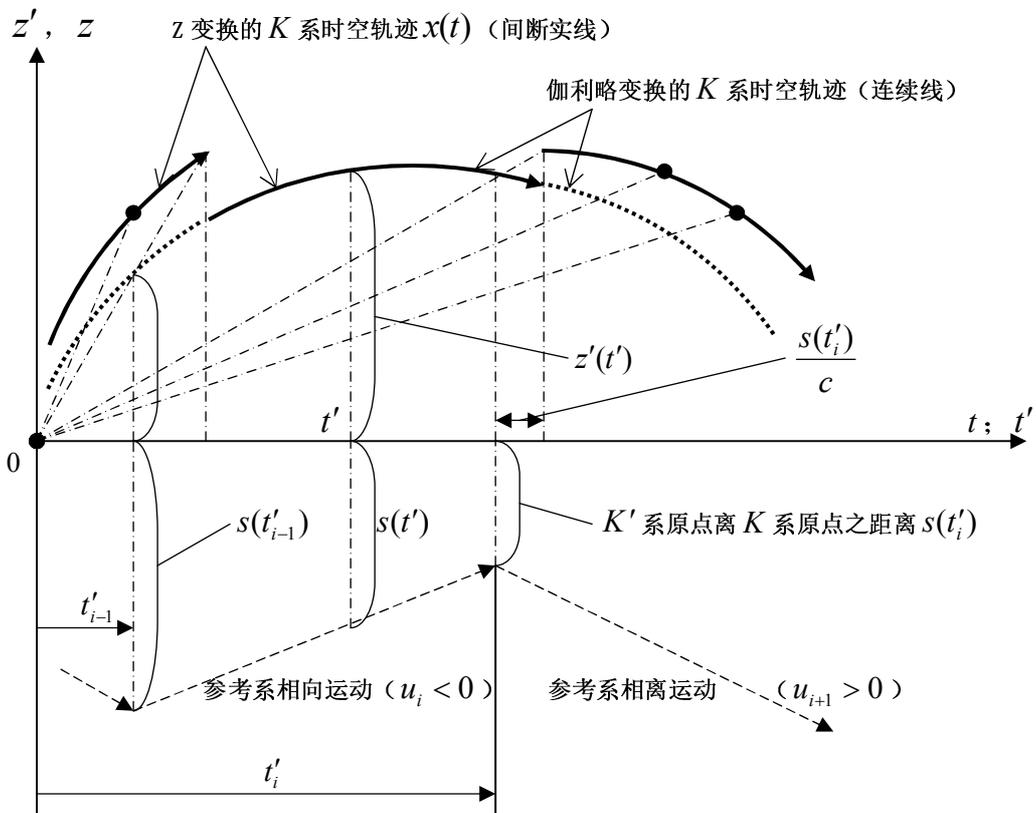


图 22 Z 变换在 z 轴方向上的 K 系时空轨迹

(3) 相对速度为函数 $u(t')$ 的相对运动

相对速度为函数 $u(t')$ ，因此时刻 t' 时 K' 系原点（ K' 系观测者）离 K 系原点（ K 系观测者）之距离 $s(t')$ 为：

$$s(t') = \int_0^{t'} u(\tau) d\tau$$

K 系观测者与 K' 系观测者对同一运动质点进行观测时，由于 K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移相对运动且光速为有限值，故 K 系观测者要在 K' 系观测者见到该运动质点的时刻 t' 之后的时刻 t 才可以见到该运动质点。所以，有：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c}$$

将 $s(t') = \int_0^{t'} u(\tau) d\tau$ 代入此式，得：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c} = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right] t' = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right] t'$$

这就是 Z 变换的时间变换式。根据这种表达形式的时间变换式相应地可得 Z 变换的空间变换式：

$$\begin{cases} x(t) = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right] [x'(t') + s(t')] = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right] \left[x'(t') + \int_0^{t'} u(\tau) d\tau \right] \\ y(t) = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right] y'(t') \\ z(t) = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right] z'(t') \end{cases}$$

Z 变换之逆变换为:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right]^{-1} t \\ x'(t') = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right]^{-1} x(t) - \int_0^{t'} u(\tau) d\tau \\ y'(t') = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right]^{-1} y(t) \\ z'(t') = \left[1 + \frac{\int_0^{t'} u(\tau) d\tau}{ct'} \right]^{-1} z(t) \end{array} \right.$$

一般地, 在 K' 系原点 (K' 系观测者) 离 K 系原点 (K 系观测者) 之距离为任意函数 $s(t')$

的场合下, Z 变换 (周方变换) 为:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t' + \frac{s(t')}{c} = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right] t' \\ x(t) = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right] [x'(t') + s(t')] \\ y(t) = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right] y'(t') \\ z(t) = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right] z'(t') \end{array} \right.$$

Z 变换之逆变换为:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right]^{-1} t \\ x'(t') = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right]^{-1} x(t) - s(t') \\ y'(t') = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right]^{-1} y(t) \\ z'(t') = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'} \right]^{-1} z(t) \end{array} \right.$$

三. “哈勃定律” (Hubble’s Law) 的理论表达式

1929 年，美国天文物理学家哈勃 (E. P. Hubble) 发现河外星系视向退行速度与距离成正比，即距离越远，视向退行速度越大。“哈勃定律”的陈述是：来自遥远星系光线的红移与他们的距离成正比。这条定律是哈勃在约十年的观测之后，于 1929 年首先提出的。

“哈勃定律”中速度和距离都是间接观测得到的物理量。“速度 — 距离”关系和“速度 — 视星”关系，是建立在观测“红移 — 视星”等关系及一些理论假设前提上的。“哈勃定律”原来由对正常星系观测而得，现今已应用到类星体或其他特殊星系上。“哈勃定律”通常被用来推算遥远星系的距离。可是，“哈勃定律”至今从未得到理论上的解释。本书笔者十分简捷地首次给出了“哈勃定律”的理论表达式。实际上，从笔者首次发现的“两坐标系有相对运动且真空中光速为有限值”情况下唯一存在的时空变换 — Z 变换 (周方变换) — 的时间变换式即可直接推导出“哈勃定律”的理论表达式。

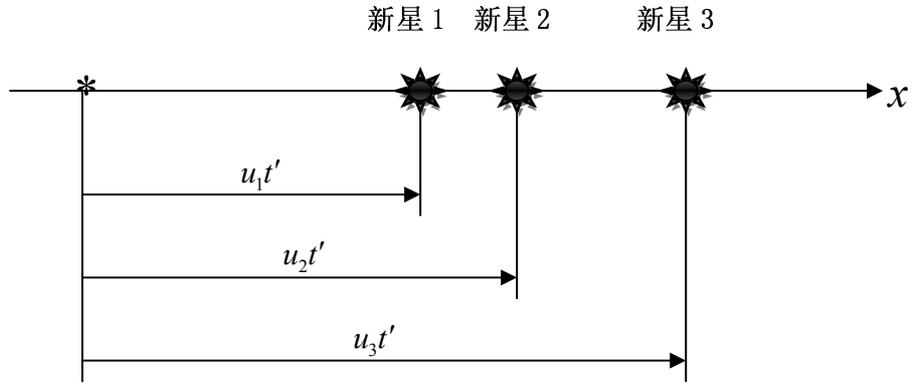
“哈勃定律”：

“在任何一个星系上，都能观测到其他星系在作远离该星系的退行运动，而且距离越远的星系退行速度越大。”

“对宇宙中的任何两个星系来说，它们都在彼此互相远离，而且星系间的距离越远，相互远离的速度也越大。”

“遥远天体的红移（即退行运动）的大小与天体的距离成正比。”

设：在某时刻 t' ，三颗新星相对于地面观测者* 分别以匀速 u_1 、 u_2 、 u_3 远离而去，示于图 23。



(* 为地面观测者； u_1 、 u_2 、 u_3 为新星退行速度； $u_1 < u_2 < u_3$)

图 23 在时刻 t' 三颗新星分别以匀速 u_1 、 u_2 、 u_3 离观测者* 而远去

在时刻 t' ，三新星离地面观测者* 的视向距离分别为 $u_1 t'$ 、 $u_2 t'$ 、 $u_3 t'$ （见图 23）。由于光的传播速度为有限值（ c ），故地面观测者* 在时刻 t' 尚看不到新星。直到时刻 $t_1 = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)t'$ 、时刻 $t_2 = \left(1 + \frac{u_2}{c}\right)t'$ 及时刻 $t_3 = \left(1 + \frac{u_3}{c}\right)t'$ ，地面观测者* 才先后见到新星，

三新星离地面观测者* 的视向距离分别为 x_1 、 x_2 及 x_3 ，示于图 24。

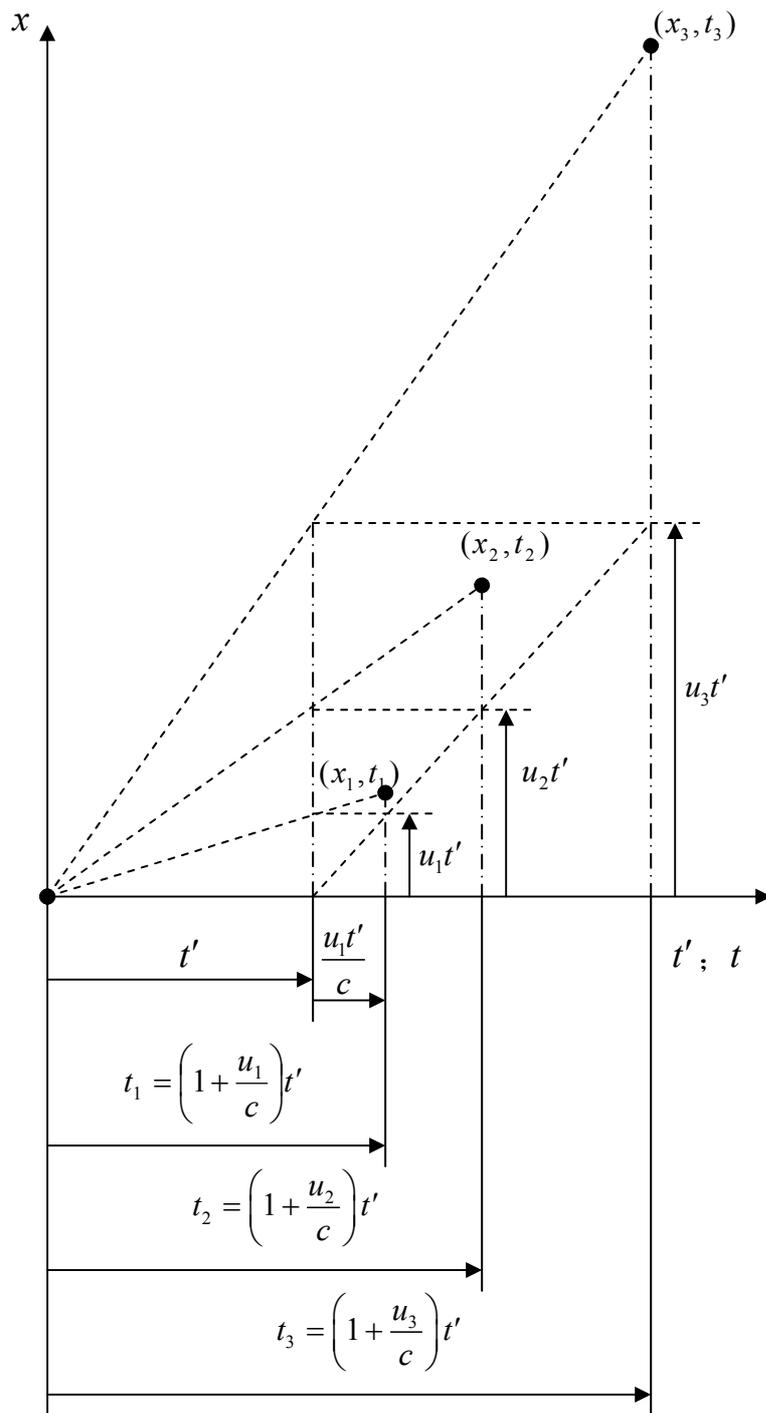
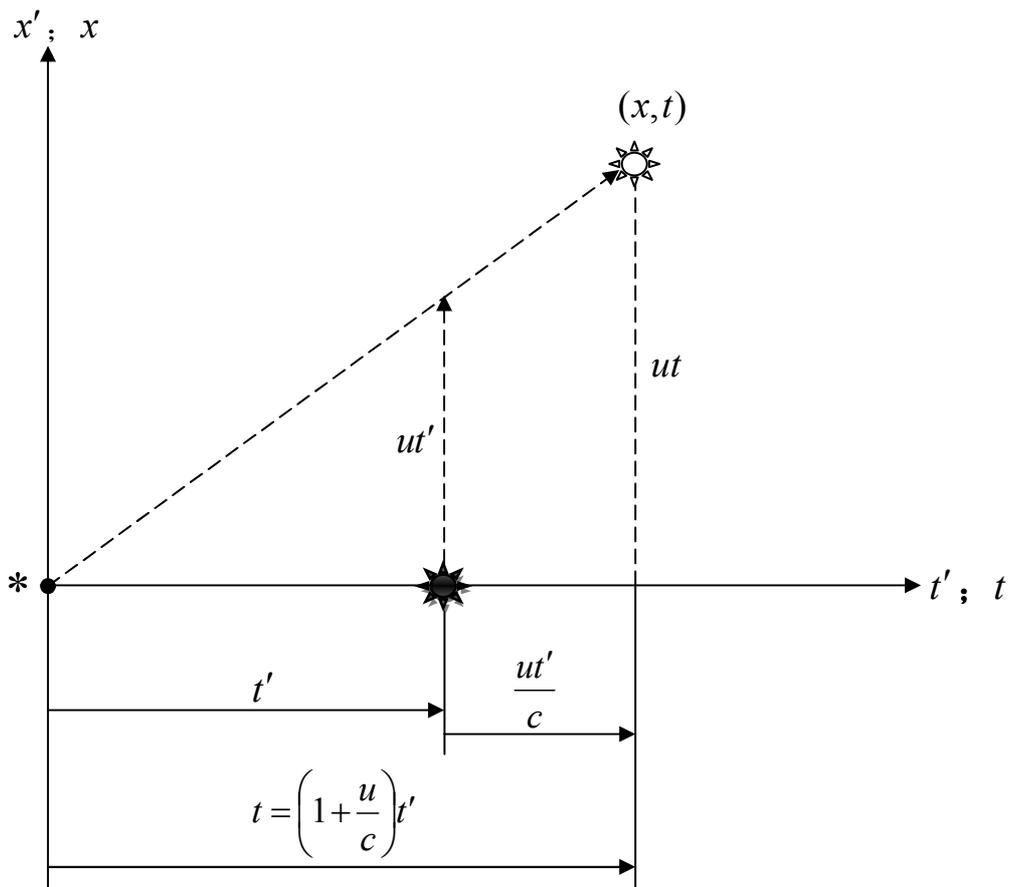


图 24 时刻 t' 爆发的三颗新星

设：在某时刻 t' ，一颗新星 \star 相对于地面观测者* 以匀速 u 远离而去，示于图 25。在时刻 t' ，新星离地面观测者* 的视向距离为 ut' 。由于光的传播速度为有限值 (c)，故地面观测者* 在此时刻 t' 尚看不到新星。直到时刻 $t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ ，地面观测者* 才能够见到新星 \star ，这时新星离地面观测者* 的视向距离为 $x = ut$ ，参看图 25。



(* 为地面观测者; u 为新星退行速度; c 为光速)

图 25 在时刻 t' 一颗新星以匀速 u 离观测者 * 而远去

参看图 25: 地面观测者 * 在时刻 t 才见到新星  这时新星离地面观测者 * 的视向距离为 $x = ut$ 。图 25 中的关系式 $t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ 就是 Z 变换 (周方变换) 的时间变换式。将关

系式 $t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$ 代入 $x = ut$, 得 $x = ut = \left(1 + \frac{u}{c}\right)ut'$, 即 $x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)ut' = \frac{t'}{c}u^2 + t'u$,

将此式写成:

$$x = ct' \frac{u^2}{c^2} + ct' \frac{u}{c} = ct' \left[\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \left(\frac{u}{c}\right) \right]$$

$$\bar{x}_H = \bar{u}^2 + \bar{u}$$

式中 $\bar{x}_H = \frac{x}{ct'}$ 称为“哈勃距离”; $\bar{u} = \frac{u}{c}$, c 为光速。

这就是“哈勃定律”的理论表达式:

$$\bar{x}_H = \bar{u}^2 + \bar{u}$$

$$(\bar{u} > 0)$$

“哈勃定律”理论表达式曲线示于图 26。

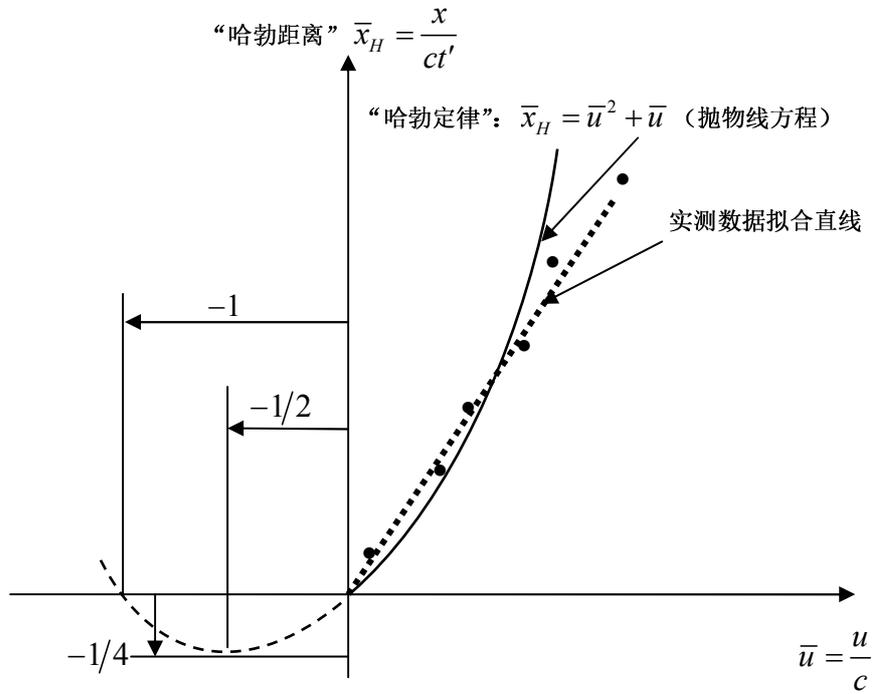


图 26 “哈勃定律”

或者将与 $\bar{x}_H = \bar{u}^2 + \bar{u}$ 等价的 $x = \left(1 + \frac{u}{c}\right) ut' = \frac{t'}{c} u^2 + t'u$ 即：

$$x = \frac{t'}{c} u^2 + t'u$$

$$(u > 0)$$

示于图 27。

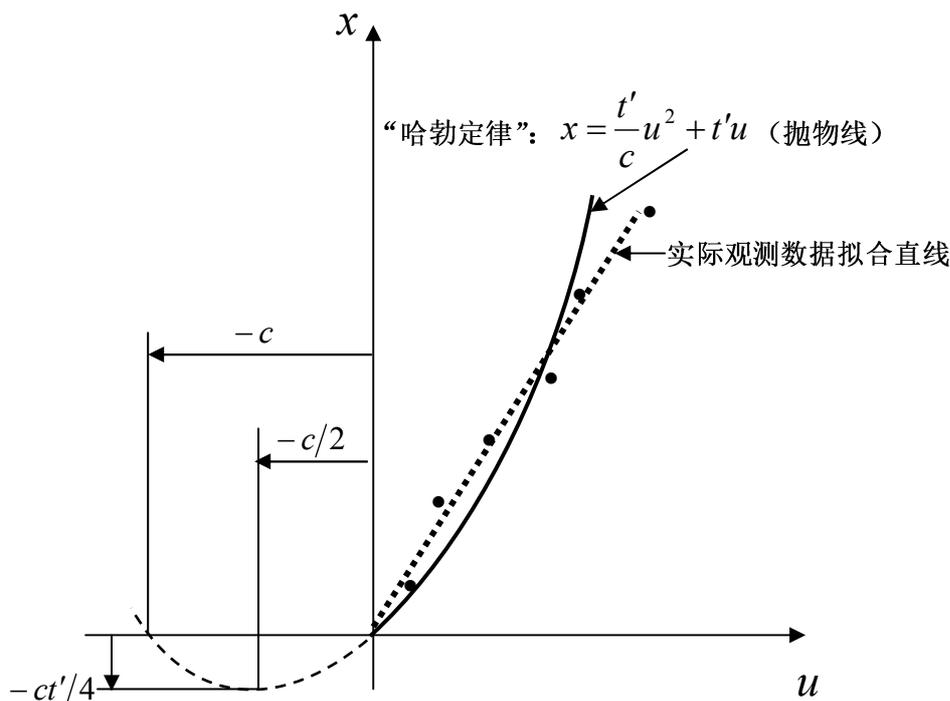


图 27 “哈勃定律”

附录

时空变换满足“相对性原理”之充分必要条件

(一) “相对性原理”的意义及内涵

建立科学理论，其目的都是为了认识客观事物的自然规律。这种理论必须使不同的观测者在各自的坐标系内都能观测到相同的物理规律，这样的物理理论才有实际价值。

爱因斯坦在论文《论动体的电动力学》中将“相对性原理”（the principle of relativity）用文字表述为：

“The laws governing the changes of the state of any physical system do not depend on which one of two coordinate systems in uniform translational motion relative to each other these changes of the state are referred to” (Einstein, 1987 年版); 译成：“物理体系的状态据以变化的定律，同描述这些状态变化时所参照的坐标系究竟是用两个在互相匀速移动着的坐标系中的哪一个并无关系。”（爱因斯坦，2006 年版）

“表述客观物理定律的数学方程在互作匀速直线平移相对运动的各坐标系内具有相同的形式”，即通常所称的“相对性原理”，对于我们探索与认识客观事物的自然规律具有特别重要的意义。这里应当指出，“相对性原理”所要求的是物理定律的数学方程在各坐标系内保持相同的“形式”，而并不要求数学方程所描述的客观事物在各坐标系内表现为相同的“规模”，因此“相对性原理”实际上应当准确地称为“相似性原理”（the principle of similarity）。各种各样的物理模拟实验，如飞机及导弹的风洞空气动力实验、水利系统的室内模拟实验等等，就是依据“相似性原理”进行设计的。

为了推导出时空变换的数学表达式，就必须在数学推导过程中实际运用“相对性原理”（“相似性原理”），为此我们必须运用数学语言来表述“相对性原理”（“相似性原理”），找到变换方程组满足“相对性原理”（“相似性原理”）的充分必要条件，并将此条件引入数学推导之中，以确定变换方程组中的各项系数。

关于“相对性原理”（the principle of relativity），爱因斯坦仅仅只做过文字表述，从未用数理工具进行严格推导，从未通过数学语言准确、完整表述“相对性原理”。

下面我们就来讨论变换方程组满足“相对性原理”（“相似性原理”）的充分必要条件。

现有时间变换式 $t' = Ax + Ct$ 与空间变换式 $x' = B(x - ut)$ 组成的变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

式中 u 为坐标系相对速度。

这个联立方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = Bx - But \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

联立方程组的矩阵 T 为：

$$T = \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix}$$

矩阵 T 为可逆矩阵，故必有 $\det T = BC + ABu \neq 0$ 。这时，必存在方程组的逆矩阵 T_{inv} ：

$$T_{inv} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}$$

容易验证，联立方程组的矩阵 T 与逆矩阵 T_{inv} 总能满足以下恒等式：

$$T_{inv}T = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即：

$$T_{inv}T = \frac{1}{BC + ABu} \begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在上式中，将 C 替换为 B ，上面这个恒等式仍然成立，即：

$$\frac{1}{B^2 + ABu} \begin{bmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(二) 变换方程组满足“相对性原理”之充分必要条件

现设：某变换方程组为

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ax + Bt \end{cases}$$

方程组的变换矩阵为 $S = \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{bmatrix}$ ，且 $\det S = B^2 + ABu = k \neq 0$ 。

方程组的逆变换矩阵为 $S_{inv} = \frac{1}{\det S} \begin{bmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}$ 。

显然，这个变换方程组具有以下两项性质：

- (a) 变换方程组的变换矩阵 S 为可逆矩阵；
- (b) 两观测者观测到的同一‘物理定律’当两观测者互换“静系地位”时保持不变，故变换方程组的变换矩阵 S 与逆变换矩阵 S_{inv} 具有相同的张量形式。

由于 $\det S$ 的值不必为 1，故“相对性原理”应恰当地改称为“相似性原理”。

我们说，具有 (a)、(b) 两项性质的变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ax + Bt \end{cases}$$

满足“相对性原理”（“相似性原理”）。

由此可得：时间变换式 $t' = Ax + Ct$ 与空间变换式 $x' = B(x - ut)$ 组成的变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

满足“相对性原理”（“相似性原理”）之充分必要条件可表为如下联立方程组：

$$\begin{cases} B = C \\ BC + ABu = k \neq 0 \end{cases}$$

由于 k ($k \neq 0$) 可以是任何实数，所以必须利用“相对性原理”（“相似性原理”）以外的其它条件给出数值 k ($k \neq 0$) 及 A （或 B ，或 C ），才能够确定变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

的各项系数。

对于具有如下特殊形式（时间变换式中不含‘ x ’项）的变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

“相对性原理”（“相似性原理”）的充分必要条件则很简单，就只有：

$$B = C$$

在这种情况下，只需采用在物理上正确的合理的数学模型推导出时间变换式 $t' = Ct$ ，就可惟一地确定变换方程组：

$$\begin{cases} x' = C(x - ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

可以看出，这是一个“伽利略型”的变换方程组。

容易证明：“伽利略型”的变换方程组

$$\begin{cases} x' = C(x - ut) \\ t' = Ct \end{cases} \quad (C > 0)$$

能够满足“相对性原理”（“相似性原理”）。

设时空变换式为：

$$\begin{cases} x' = C(x - ut), \\ y' = Cy, \\ z' = Cz, \\ t' = Ct \end{cases}$$

可以表为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & -Cu \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的变换矩阵 Φ 为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & -Cu \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵 Φ^{-1} 为:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{C^4} \begin{bmatrix} C^3 & 0 & 0 & C^3 u \\ 0 & C^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见, 变换矩阵 Φ 与逆变换矩阵 Φ^{-1} 具有完全相同的张量形式。而且, 有:

$$\begin{aligned} \Phi \times \Phi^{-1} &= C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{C} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以, 时空变换式

$$\begin{cases} x' = C(x - ut), \\ y' = Cy, \\ z' = Cz, \\ t' = Ct \end{cases}$$

满足“相对性原理”（“相似性原理”）。

验证毕。

参 考 文 献

- [1] 《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》，周方/著 经济科学出版社 2014年版
- [2] 《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》，（第二版），周方/著 经济科学出版社 2016年版
- [3] 周方：《新牛顿力学时空变换—周方变换（广义的伽利略变换）》
(The Transformation of Space-time for the Neo-Newtonian Mechanics)
<http://www.vixra.org/pdf/1209.0089v1.pdf>
- [4] A . Einstein: 《On the Electrodynamics of Moving Bodies》，The Collected Papers of Albert Einstein, Edit. John Stachel, Vol.2, pp. 140-171, The Princeton University Press, 1987.
- [5] 爱因斯坦：《狭义与广义相对论浅说》，杨润殷译，北京大学出版社 2006年版

Zhoufang Transformation (Z- Transformation) and Theoretical Interpretation for Hubble’s Law

Zhoufang

(Chinese Academy of Social Sciences)

Abstract The only objectively existing in nature transformation of space and time for the case of observers’ mutual uniform translatory motion and limited light velocity is first revealed in the article. The discovered transformation, referred to as Zhoufang Transformation (Z-Transformation), is logically derived, using in derivation the concepts of both the principle of relativity and the postulate of constant light velocity. The Z-Transformation takes the typical form of Galilean Transformation. Moreover, a theoretical interpretation for Hubble’s Law is given firstly by the author as well, utilizing the Z-Transformation revealed.