M. W. KALINOWSKI

Podstawy mechaniki kwantowej

Spis treści

Wstęp

W pracy rozpatrujemy podstawy mechaniki kwantowej w języku logik kwantowych w zastosowaniu do teorii parametrów ukrytych i możliwych uogólnień mechaniki kwantowej.

Podamy teraz szkicowy schemat całej pracy.

W rozdziale 1 omawiamy związek mechaniki kwantowej z logikami wielowartościowymi.

W rozdziale 2 podajemy pewne niezbędne pojęcia matematyczne. Z uwagi na niedostatek miejsca zostały podane odnośniki do ogólnie dostępnej literatury matematycznej.

W rozdziale 3 zostaje wprowadzony system aksjomatyczny Mackeya-Mączyńskiego i podane jest podstawowe twierdzenie tego systemu.

W czwartym rozdziale podamy ogólne własności obserwabli przygotowując grunt pod rozdział 5, gdzie rozpatrywane są reprezentacje boolowskie obserwabli. Pod koniec 5 rozdziału podajemy logikę dla mechaniki klasycznej. W miarę możliwości interpretowane są definicje, twierdzenia i aksjomaty.

W rozdziale 6 z aksjomatu QM wyprowadzamy podstawowe postulaty mechaniki kwantowej, wprowadzamy również pojęcie selektora dla zinterpretowania niektórych wyników.

Rozdział 7 omawia hipotezę o parametrach ukrytych i dyskusję, jaka się jeszcze na ich temat toczy. Omawiany jest tam paradoks EPR (Einsteina-Podolskiego-Rosena) oraz nierówność Bella.

1. Logiki wielowartościowe a mechanika kwantowa

Badania aksjomatyczne odgrywają istotną rolę w całej matematyce, gdzie każda teoria ma zbiór aksjomatów i zadaniem badacza jest znalezienie związków między nimi tj. dowodzenie twierdzeń.

Wszelkie modele matematyczne rzeczywistości przyrodniczej posiadają także podobny zbiór aksjomatów. Nieraz jednak nie potrafimy sobie uzmysłowić co w istocie zostało założone. Jest to wywołane w dużym stopniu zbyt małą ścisłością modelu i nieformalnym podejściem. Dlatego też badania aksjomatyczne mogą być prowadzone tylko w modelach o dostatecznej ścisłości.

Wiele teorii fizycznych jest już na tym stopniu rozwoju, że staje się możliwe zbadanie tego problemu. Jest to problem pierwszoplanowy z uwagi na możliwości uogólnienia.

Można podać wiele przykładów z historii fizyki, że tego typu podejście było owocne. Weźmy choćby rozwój pojęcia układu inercjonalnego na przykładzie szczególnej i ogólnej teorii względności, czy też pojęcia czasu i przestrzeni na przykładzie mechaniki newtonowskiej i relatywistycznej. W przypadku jednak mechaniki klasycznej i kwantowej problem jest znacznie głębszy (w istocie podane przykłady zawsze operowały aksjomatem ciągłości przejść) i potrzebny jest do niego subtelniejszy aparat matematyczny od klasycznej analizy i geometrii różniczkowej. Aparat ten tj. teoria krat i logika matematyczna leży u podstaw współczesnej matematyki. Dlatego też wymagana jest precyzja matematyczna daleko wyższa niż w innych przypadkach przy jednoczesnym uważnym śledzeniu wyników wraz z ich interpretacją. Droga tego typu, jak postaramy się wykazać jest celowa z uwagi na możliwość uzyskania uogólnień mechaniki kwantowej, co być może zostanie dokonane w przyszłości. Problemem aksjomatyzacji założeń mechaniki kwantowej zajmowano się już od chwili jej powstania. Pierwszy sposób polegał na wprowadzeniu aparatu logiki matematycznej, teorii krat, algebr Boole'a bezpośrednio do formalizmu mechaniki kwantowej. Według drugiego próbowano zbadać zależności między twierdzeniami mechaniki kwantowej na gruncie pewnej logiki nieklasycznej.

Pierwszy sposób jest omawiany w tej pracy w miarę możliwości szczegółowo, drugi zaś opiszemy pokrótce niżej. Na samym początku zacytujemy słowa Finkelsteina i Jaucha [1] „... geometria euklidesowa jest słuszna tylko w przybliżeniu, geometryczne prawa podlegają zaburzeniu od punktu do punktu zmieniając się. Bardziej podstawowymi niż prawa geometrii są prawa logiki wyrażone w rachunku zdań. W wyniku przejścia od mechaniki klasycznej do kwantowej widzimy, że prawa logiki mają tylko przybliżoną wartość z uwagi na komplementarność ...". Zatem prawdziwe prawa logiki mogłyby podlegać zaburzeniom i zmieniać się od punktu do punktu. Rozpatrzmy teraz dość pobieżnie system logiczny Reichenbacha [2] jako najprostszy i oddający dostatecznie jasno ideowy kierunek badań tego rodzaju.

Logika Reichenbacha jest logiką trójwartościową podobną do logiki Posta [3] dla $n = 3$. Metajęzyk tej logiki oparty jest na logice dwuwartościowej, tzn. wyrażenie typu „ x przyjmuje wartość logiczną i" jest dwuwartościowym. Definiowane funktory rozważa się jako uogólnienia funktorów logiki dwuwartościowej. Większość funktorów, które wprowadza Reichenbach, była już wprowadzona przez Posta z wyjątkiem pełnej negacji, alternatywnej implikacji, quasi-implikacji i alternatywnej równoważności. Funktory powyższe są wprowadzone dla celów mechaniki kwantowej. Stosując zapis Łukasiewicza (patrz np. [4]) zapiszemy funktory Reichenbacha.

N^1x — cykliczna negacja x

N^2x — diametralna negacja x

N^3x — pełna negacja x

Kxy — koniunkcja

Axy — alternatywa
C^1xy — standardowa implikacja
C^2xy — alternatywna implikacja
C^3xy — quasi-implikacja
R^1xy — standardowa równoważność
R^2xy — alternatywna równoważność
$1, 2, 3$ — odpowiednio: prawda, fałsz, nieokreśloność.
Powyższe funkcje określone są przy pomocy tabel wartości logicznych.

x	N^1x	N^2x	N^3x
1	2	3	2
2	3	2	1
3	1	1	1

x	y	Kxy	Axy	C^1xy	C^2xy	C^3xy	R^1xy	R^2xy
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	2	3	2	2	3
1	3	3	1	3	3	3	3	3
2	1	2	1	1	1	2	2	3
2	2	2	2	1	1	2	1	1
2	3	3	2	3	1	2	2	3
3	1	3	1	1	1	2	3	3
3	2	3	2	1	1	2	2	3
3	3	3	3	1	1	2	1	1

Twierdzeniami są zdania przyjmujące wartość 1 dla dowolnych argumentów (zdań pierwotnych). Chcąc powiedzieć, że zdanie posiada wartość różną od 1 używa się negacji np. N^1N^1x znaczy, że x jest nieokreślone, N^1x — że x jest fałszywe, N^2x — że x jest fałszywe. Wśród zdań (formuł) zbudowanych przy pomocy wprowadzonych wyżej funktorów znajduje się zdanie zawsze prawdziwe, zawsze nieokreślone, prawdziwe lub fałszywe, mogące przybierać wszystkie trzy wartości itp.

Należy zauważyć, że zbiór zdań logiki trójwartościowej zawiera podzbiór zdań mających dwuwartościowy charakter logiki klasycznej tj. będących prawdziwymi lub fałszywymi dla dowolnych wartości argumentów. Według Reichenbacha prawa mechaniki kwantowej są zawarte właśnie w klasie zdań prawdziwych lub fałszywych. Jak widać sytuacja jest dość oryginalna: prawa mechaniki kwantowej są dwuwartościowe, ale rozumowania ich dotyczące podlegają logice trójwartościowej. System Reichenbacha zawiera następujące tautologie (prawa).

R^1xx

$R^1xN^2N^2x$

$R^1xN^1N^1N^1x$

$R^1N^3xN^3N^3N^3x$

$R^1N^3xAN^1xN^1N^1x$ itd.

Prawo wyłączonego środka nie zachodzi dla negacji diametralnej.

Dla negacji cyklicznej jest słuszne prawo wykluczonego czwartego przypadku:

$AAxN^1xN^1N^1x$,

$R^1AxN^1N^1xN^3x$

Prawo niesprzeczności zostaje zachowane w następujących postaciach:

N^3KxN^3x

N^3KxN^1x

N^3KxN^2x

Prawa de Morgana zachowują słuszność tylko w postaci następującej:

$N^2Kxy = AN^2xN^2y$

$N^2Axy = KN^2xN^2y$

Prawa rozdzielczości są słuszne tak, jak w logice dwuwartościowej.

Prawo kontrapozycji jest słuszne w dwóch postaciach:

$R^1C^1N^2xyC^1N^2yx$ oraz $R^1C^2N^3xyC^2N^3yx$.

Rozkład równoważności na implikacje zachodzi odpowiednio w następującej postaci:

$R^1R^1xyKCxyCyx$

$R^2R^2xyKKC^2xyC^2yxKC^2N^2xN^2yC^2N^2yN^2x$

Rozkład implikacji (zastąpienie implikacji przez negację i alternatywę) zachodzi w postaci:

$R^1C^2xyN^1N^2AN^3xy$

Sprowadzenie do niedorzeczności występuje w postaci:

$C^1C^1xN^3xN^3x$ oraz $C^2C^2xN^3xN^3x$.

Dla wyrażeń przyjmujących tylko wartości prawdy [5] i fałszu [6] prawo wyłączonego środka pozostaje prawdziwe przy negacji diametralnej: jeśli x jest takim zdaniem prawdziwym lub fałszywym, to AxN^2x jest tautologią.

Dwa zdania x i y nazywa się dopełniającymi, jeśli spełniają związek: $R^2AxN^1xN^1N^1y$. Ponieważ AxN^1x jest prawdziwe wtedy, gdy x jest prawdziwe i wtedy, gdy x jest fałszywe, przeto N^1N^1y winno być prawdziwe. To zaś ma miejsce wtedy, gdy y jest nieokreślone. Wobec tego x i y dopełniają się wzajemnie, gdy spełniony jest następujący związek: jeśli x jest prawdziwe lub fałszywe, to y jest nieokreślone. Dalej dowodzi się, że jeśli x i y są dopełniającymi się zdaniami, to $R^2AyN^1yN^1N^1x$, tzn. warunek dopełniania się jest symetryczny względem x i y. Warunek ten można sformułować dla trzech i więcej zdań. Ma on postać: $R^2AxN^1xN^1N^1y$ i $R^2AxN^1yN^1N^1z$.

Według Reichenbacha księga zjawisk kwantowych jest napisana w języku logiki trójwartościowej. Reichenbach sądzi, że ma się prawo mówić o prawdziwości lub fałszywości zdania tylko wtedy, gdy można zrealizować sprawdzenie. Jeśli jest to niemożliwe, tzn. jeśli nie można zweryfikować lub sfalsyfikować zdania, to należy mu przyznać trzecią wartość: nieokreśloność. Zdaniem Reichenbacha tego typu interpretacja nie doprowadzi nigdy do tzw. „anomalii przyczynowych".

Przytoczmy przykład zastosowania logiki trójwartościowej. Reichenbach używa pojęcia dopełniania się do opisu zjawisk związanych z pomiarem obserwabli, którym odpowiadają operatory kanonicznie sprzężone.

$$C^2A\big((e^1,t)=u\big)N^1\big((e^1,t)=u\big)N^1N^1\big((e^2,t)=v\big)$$

co czyta się w następujący sposób: jeżeli jest słuszne lub niesłuszne, że wartość e^1 w chwili t jest u, to wypowiedź, że wartość e^2 w chwili t jest v, jest nieokreślone.

Podobne logiki stworzyli G. Birkhoff i J. von Neumann [7], [8], G. Birkhoff [9], Destouches-Fèvrier [10].

2. Preliminaria matematyczne

Pojęcia matematyczne stosowane w tej pracy wraz z odpowiednimi, cytowanymi twierdzeniami znajdują się w pracach: [5], [11], [6], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [4], [18]. Tutaj podamy tylko najniezbędniejsze.

Definicja 1. Zbiór częściowo uporządkowany P nazywamy zbiorem z ortouzupełnieniem, jeśli istnieje funkcja $a \to a^\perp$, $\perp\colon P \to P$ spełniająca aksjomaty:

1) $(a^\perp)^\perp = a$
2) jeśli $a_1 \le a_2$, to $a_2^\perp \le a_1^\perp$
3) jeśli $a_1, a_2, \ldots \in P$ i $a_i \le a_j^\perp, i \ne j$, to istnieje $a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots$
4) $V = a \cup a^\perp = b \cup b^\perp \quad \bigwedge\limits_{a,b\in P}$
5) jeśli $a \le b$, to $b = a \cup (b^\perp \cup a)^\perp$ (słaba modularność)

Jeśli $a \le b^\perp$, to piszemy $a \perp b$. Z 1) i 2) widać, że $a \le b^\perp$ jest równoważne $b \le a^\perp$. Warunek 3) mówi, że jeśli $a_1, a_2, \ldots$ są parami ortogonalne, to w P istnieje kres górny $a = a_1 \cup a_2 \cup \cdots$ i oznaczmy go $a = a_1 + a_2 + \cdots$.

Będziemy używać oznaczenia $b - a = b \cap a^\perp$, jeśli $a \le b$.

Definicja 2. P-miarą μ na $B(R)$ (ciało zbiorów borelowskich na prostej) będziemy nazywać funkcję $\mu : B(R) \to P$, jeśli:

$$E \cap F = \emptyset \Rightarrow \mu(E) \perp \mu(F), \quad E, F \in B(R)$$

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \mu(E_1) \cup \mu(E_2) \cup \cdots \quad \text{jeśli } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j \text{ oraz } E_i \in B(R).$$

Definicja 3. Mówimy, że rodzina $\{\mu(t)\}_{t\in T}$ P-miar wyczerpuje P, jeśli dla każdego $a \in P$ istnieją takie $t \in T$ i $E \in B(R)$, że $\mu_t(E) = a$.

Definicja 4. Niech $\varphi : P \to [0, 1]$ będzie funkcją określoną na P o wartościach z $[0, 1]$. Mówimy, że funkcja φ jest miarą prawdopodobieństwa na P, jeżeli:

$$\varphi(V) = 1, \qquad \varphi(\lambda) = 0$$

$$\varphi(a_1 \cup a_2 \cup \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(a_k), \quad \text{jeżeli } a_i \perp a_j \text{ dla } i \neq j.$$

Widzimy, że $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ dla $a \leq b$.

Definicja 5. Mówimy, że rodzina miar prawdopodobieństwa $(\varphi_t), t \in T$ jest pełna, jeżeli dla każdego t $\varphi_t(a) \leq \varphi_t(b)$ pociąga $a \leq b$.

Zdanie $a \neq b$ jest tu równoważne temu, że istnieje $t' \in T$ takie, że $\varphi_{t'}(a) \neq \varphi_{t'}(b)$. Szerzej na temat pełnych rodzin miar prawdopodobieństwa pisze Mączyński [19]. Ciekawym jest, jak wykazał M. K. Bonnet [20], że nie wszystkie zbiory z ortouzupełnieniami posiadają pełną rodzinę miar prawdopodobieństwa. Więcej wiadomości na temat zbiorów z ortouzupełnieniami znajduje się u Varadarajane'a [21].

Przykładami zbiorów z ortouzupełnieniami jest oczywiście algebra Boole'a oraz wprowadzona dalej tzw. logika przestrzeni Hilberta (Logic of Hilbert space) L(H).

$\leq$ jest tu zawieraniem się domkniętych podprzestrzeni nieskończenie wymiarowej, ośrodkowej przestrzeni Hilberta. $\perp$ oznacza uzupełnienie ortogonalne podprzestrzeni.

3. Aksjomatyka Mackeya-Mączyńskiego ogólnego układu fizcznego

Na wstępie wprowadzimy pewne oznaczenia i definicje. Przez O będziemy rozumieli abstrakcyjny zbiór wielkości mierzalnych fizycznie tzw. obserwabli, S oznacza tu zbiór stanów fizycznych, zaś $B(R)$ δ-algebrę Boole'a zbiorów borelowskich na prostej rzeczywistej.

Definicja 1. Funkcją prawdopodobieństwa będziemy nazywali funkcję $p: O \times S \times B(R) \to [0,1]$ spełniającą następujące aksjomaty:

1.a) $p(A, \alpha, \emptyset) = 0, \quad p(A, \alpha, R) = 1$, dla każdego $A \in O$ i dla każdego $\alpha \in S$.

b) dla każdego E_j należącego do $B(R), j = 1, 2, 3, \ldots$, dla każdego A należącego do O i dla każdego α należącgo do S są prawdziwe związki:

$$p(A, \alpha, \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p(A, \alpha, E_j).$$

2.a) Jeśli $p(A, \alpha, E) = p(A', \alpha, E)$ dla każdego E należącego do $B(R)$ i dla każdego α należącego do S, to $A = A'$.

b) Jeżeli $p(A, \alpha, E) = p(A, \alpha', E)$ dla każdego A należącego do O i dla każdego E należącego do $B(R)$, to $\alpha = \alpha'$.

3. Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ należą do O i $E_1, E_2, \ldots$ należą do $B(R)$ oraz dla $i \neq j, p(A_1, \alpha, E_i) + p(A_j, \alpha, E_j) \leq 1$ dla wszystkich α należących do S, to istnieją: B należące do O i F należące do $B(R)$ takie, że

$$p(B, \alpha, F) = \sum_{j=1}^{\infty} p(A_j, \alpha, E_j).$$

Definicja 2. Logiką systemu fizycznego będziemy nazywali zbiór L wraz z odpowiednią strukturą narzuconą przez p:

$$L = O \times B(R) / \sim,$$

$\sim$ oznacza relację równoważności wprowadzoną w sposób następujący $(A, E) \sim (B, F)$ jest równoważne, że dla każdego należącego do S zachodzi formuła: $p(A, \alpha, E) = p(B, \alpha, F)$.

Twierdzenie 1. *Zbiór L jest zbiorem częściowo uporządkowanym z ortouzupełnieniem.*

D o w ó d. Niech $[(A, E)] \leq [(B, F)]$ oznacza, że dla każdego należącego do S zachodzi: $p(A, \alpha, E) \leq p(B, \alpha, F)$ i $[(A, E)]^{\perp} = [A, R - E]$. Udowodnimy, że „$\leq$" jest relacją częściowo porządkującą L, a „$\perp$" jest ortouzupełnieniem.

Pierwsza część dowodu wynika natychmiast z określenia relacji. Dwie pierwsze własności ortouzupełnienia też są oczywiste. Będziemy więc dowodzić pozostałe trzy własności.

Niech $a_1 = [(A_1, E_1)], a_2 = [(A_2, E_2)], \dots$ będzie ciągiem elementów zbioru L ortogonalnych między sobą.

Jeśli istnieje jakiś element b należący do L, $b = [(B, F)]$ taki, że $p(B, \alpha, F) = \sum_{j=1}^{\infty} p(A_j, \alpha, E_j)$ dla wszystkich α należących do zbioru S, to będziemy wtedy pisać $b = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Na podstawie trzeciej własności funkcji p taki element istnieje. Udowodnimy, że b jest kresem górnym (supremum) zbioru elementów $a_1, a_2, a_3, \dots$ w kracie L, $b = a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup \cdots$. Znaczy to, że b jest najmniejszym elementem L zawierającym wszystkie $a_1, a_2, a_3, \dots$. Dowód tego warunku przeprowadzimy przez indukcję. Pokażemy najpierw, że jeżeli dla jakichkolwiek elementów $b = [(B, F)], a_1 = [(A_1, E_1)], a_2 = [(A_2, E_2)]$ ze zbioru L mamy b prostopadłe do a_1, b prostopadłe do a_2, a_1 prostopadłe do a_2, to b prostopadłe do $a_1 + a_2$. Wtedy dla każdego α należącego do zbioru S zachodzi

$$p(B, \alpha, F) + p(A_1, \alpha, E_1) + p(A_2, \alpha, E_2) \leq 1.$$

Zatem $p(A_1, \alpha, E_1) + p(A_2, \alpha, E_2) \leq 1 - p(B, \alpha, F)$.

Niech $a_1 + a_2 = d = [(D, H)] \leq [(B, F)]^{\perp}$, co oznacza, że d prostopadłe do b czyli $a_1 + a_2$ prostopadłe do b.

Przez indukcję łatwo pokazać, że ogólnie jeśli b prostopadłe do $a_j, j + 1, 2, 3, \dots, n$, a_j prostopadłe do $a_i, i = 1, 2, \dots, n, i \neq j$, to b prostopadłe do $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Niech jakieś $c = [(C, G)]$ należy do L i zawiera wszystkie $a_j = [(A_j, E_j)]$, to $a_j \leq c$. Stąd $c^{\perp}$ prostopadłe do a_j. Ponieważ a_i prostopadłe do a_j dla $i \neq j$, więc stosując poprzedni wynik otrzymujemy $c^{\perp}$ prostopadłe do $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ dla wszystkich n naturalnych. Zatem $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq c$. Stąd mamy $\sum_{j=1}^{n} p(A_j, \alpha, E_j) \leq p(C, \alpha, G)$ dla wszyskich α należących do S i wszystkich n naturalnych. Przechodząc z n do nieskończoności otrzymamy $\sum_{j=1}^{n} p(A_j, \alpha, E_j) \leq p(C, \alpha, G)$ dla wszystkich α należących do S, co oznacza, że $a_1 + a_2 + \cdots \leq c$ czyli $b \leq c$ i jest najmniejszym elementem zawierającym wszystkie a_j. Zatem $a_1 + a_2 + \cdots = a_1 \cup a_2 \cup \cdots$, jeśli a_i prostopadłe do a_j dla $i \neq j$. To wszystko oznacza, że warunek trzeci jest spełniony.

Sprawdzamy dalej warunek czwarty. Ponieważ $[(A, E)]$ prostopadłe do $[(A, R - E)]$, to w L istnieje $[(A, E)] \cup [(A, R - E)]$. Niech $[(A, E)] \cup [(A, R - E)] = [(B, F)]$. Zatem dla każdego α należącego do zbioru S mamy $p(B, \alpha, F) = p(A, \alpha, E) + p(A, \alpha, R - E) = p(A, \alpha, R) = 1$. Ponieważ $[(A, R)] = [(B, R)]$, gdzie A, B należy do O. Oznaczmy $[(A, R)] = V$ i widzimy, że $[(A, E)] \cup [(A, E)]^{\perp} = V$, dla każdego A należącego do O i dla każdego E należącego do $B(R)$, to znaczy $a \cup a^{\perp} = V$ (a dowolne). Zachodzi więc warunek czwarty.

W końcu jeśli $a = [(A, E)], b = [(B, F)]$ i $a \leq b$, to $b^{\perp}$ prostopadłe do a, a prostopadłe do $(b^{\perp} \cup a)^{\perp}$ i $a \cup (b^{\perp} \cup a)^{\perp}$ istnieje w L. Niech $[(C, H)] = a \cup (b^{\perp} \cup a)^{\perp}$. Dla dowolnego α mamy

$$p(C, \alpha, H) = p(A, \alpha, E) + \left[1 - [1 - p(B, \alpha, F)]\right] + p(A, \alpha, E) = p(B, \alpha, F),$$

co oznacza $[(C,H)] = [(B,F)] = b$ i $b = a \cup (b^{\perp} \cup a)^{\perp}$. To zaś kończy dowód twierdzenia.

c.b.d.o.

Wprowadzimy nowe oznaczenia. Niech dla każdego A należącego do O μ_A oznacza odwzorowanie $E \to [(A,E)]$, $B(R)$ w L. Z aksjomatu pierwszego wynika, że μ_A jest L-miarą na $B(R)$. Dla każdego α należącego do S p_α oznacza odwzorowanie $[(A,E)] \to p(A,\alpha,E)$ logiki L w przedział $[0,1]$. Jest to dobrze zdefiniowana funkcja i z aksjomatów pierwszego i trzeciego wynika, że to jest miara prawdopodobieństwa na L. Aksjomat drugi pokazuje, że $A \neq B$ wtedy, gdy $\mu_A \neq \mu_B$, oraz $\alpha \neq \alpha'$ wtedy i tylko wtedy gdy $p_\alpha \neq p_{\alpha'}$. Widzimy, że $p(A,\alpha,E) = p_\alpha \mu_A(E)$. Rodzina $\{\mu_A\}$, (A należy do O) wyczerpuje zbiór L i rodzina $\{p_\alpha\}$ $\alpha \in S$ jest pełna.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie G. Mackeya. *Niech P będzie dowolnym częściowo uporządkowanym zbiorem z ortouzupełnieniem $\perp$. Niech M oznacza jakąkolwiek rodzinę P-miar na $B(R)$ wyczerpującą zbiór. Niech Y oznacza dowolną pełną rodzinę miar prawdopodobieństwa na P. Dla każdej trójki (μ,φ,E) należącej do zbioru $M \times Y \times B(R)$ niech $p(\mu,\varphi,E) = \varphi\mu(E)$. Wtedy $p(\mu,\varphi,E)$ spełnia aksjomaty 1–3 i przyporządkowanie $[(\mu,E)] \to \mu(E)$ jest izomorfizmem pomiędzy logiką L funkcji prawdopodobieństwa p i zbiorem częściowo uporządkowanych z ortouzupełnieniem P.*

D o w ó d. Aksjomat 1 oczywiście zachodzi. Niech $\varphi\mu(E) = \varphi\mu'(E)$ dla każdego φ należącego do Y i E należącego do $B(R)$. Jeśli $\mu \neq \mu'$, to istnieje E należące do $B(R)$ takie, że $\mu(E) \neq \mu'(E)$. Ponieważ Y jest rodziną pełną, istnieje φ należące do Y takie, że $\varphi\mu(E) \neq \varphi\mu'(E)$. Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem $\mu = \mu'$.

Podobnie pokazujemy, że jeśli $\varphi'\mu(E) = \varphi\mu(E)$, dla wszystkich E i μ, to $\varphi = \varphi'$. Zatem aksjomat drugi zachodzi. Jeżeli a_1, a_2 należą do P, $\varphi(e_1)+\varphi(e_2) \leq 1$ dla wszystkich φ, to $\varphi(e_1) \leq 1 - \varphi(e_2)$, a stąd $e_1 \leq e_2^{\perp}$ czyli e_1 prostopadłe do e_2. Teraz łatwo się przekonać, że aksjomat trzeci również zachodzi. Ponieważ $[(\mu_1,E)] = [(\mu_2,E)]$ oznacza, że $\varphi\mu_1(E_1) = \varphi\mu_2(E_2)$ dla wszystkich φ, zatem wtedy gdy $\mu_1(E_1) = \mu_2(E_2)$. Rodzina Y jest pełna i odwzorowanie $[(\mu,E)] \to \mu(E)$ jest dobrze zdefiniowane. Łatwo sprawdzić korzystając z twierdzenia 1, że to jest rzeczywiście izomorfizm częściowo uporządkowanych zbiorów z ortouzupełnieniem L i P.

c.b.d.o.

Widzimy więc, że dzięki twierdzeniu G. Mackeya możemy utożsamiać każdą obserwablę A z odpowiadającą jej L-miarą μ_A i możemy utożsamiać każdy stan α z odpowiadającą mu miarą prawdopodobieństwa p_α na L.

Przyjmiemy jeszcze następujący postulat dotyczący zbioru O.

4. Niech $\mu : B(R) \to L$ będzie L-miarą. Istnieje obserwabla A należąca do O taka, że $\mu = \mu_A$.

Trzy postulaty występujące w definicji 2 i powyższy czwarty tworzą układ aksjomatów Mackeya zmodyfikowany przez Mączyńskiego.

Podamy teraz interpretację wprowadzonych pojęć, aksjomatów i udowodnionych twierdzeń. Pierwsze dwa aksjomaty mają głębokie podłoże filozoficzne o charakterze neopozytywistycznym. Mianowicie możemy rozróżnić wielkości fizyczne (obserwable) i stany fizyczne tylko przy pomocy pomiarów. Jest to związane z interpretacją funkcji p, które określa nam prawdopodobieństwo, że pomiar wielkości A w stanie α da nam wartość ze zbioru borelowskiego E. W praktyce doświadczalnej E jest przedziałem na prostej. Z uwagi jednak na elegancję matematyczną teorii przyjęto, że E należy do $B(R)$. Elementy zbioru $X = O \times B(R)$ będziemy nazywać „zdaniami eksperymentalnymi". Każde zdanie eksperymentalne (A, E) czytać będziemy: pomiar obserwabli A da wynik w E. Zatem zdania eksperymentalne mogą być interpretowane jako hipotezy o wyniku pomiaru dokonanego w układzie fizycznym. Przed aktualnym wykonaniem pomiaru nie wiemy, czy zdanie (A, E) jest fałszywe czy nie. Operujemy tu tylko pojęciem prawdopodobieństwa i dlatego za wartość logiczną zdania będziemy uważać dla każdego α, $p(A, \alpha, E)$. Znaczy to, że w stanie α wartość logiczna (A, E) wynosi $p(A, \alpha, E)$. Widzimy więc, że bez sprecyzowania p „logika" L będzie w ogólności miała kontinuum wartości. Jeśli $p(A, \alpha, E) + p(B, \alpha, F) \leq 1$ dla wszystkich α należących do S, to umawiamy się mówić, że (A, E) i (B, F) są sprzeczne (porównaj przypadek, gdy p przyjmuje tylko wartości 0 i 1). W naszej interpretacji oznacza to, że w każdym stanie suma wartości logicznych zdań (A, E) i (B, F) jest znowu wartością logiczną. Znaczy to, że należy do przedziału $[0, 1]$, np. jeśli $E \cap F = \emptyset$, to (A, E) i (A, F) są sprzeczne. Teraz widzimy, że aksjomat 3 mówi,że dla ciągu $(A_1, E_1), (A_2, E_2), \ldots$ parami sprzecznych zdań eksperymentalnych istnieje zdanie eksperymentalne (B, F), którego wartość logiczna jest sumą wartości logicznych podanego ciągu zdań. W tym sensie zdanie (B, F) jest równoważne zdaniu: „(A_1, E_1) lub (A_2, E_2) lub (A_3, E_3) lub $\ldots$". Widzimy więc, że aksjomat 3 postuluje pewien rodzaj pełności logicznej naszego systemu zdań eksperymentalnych. Jego podłoże ma również charakter filozoficzny, stwierdza bowiem on, że obserwable należące do tego samego systemu fizycznego są ze sobą związane (co wydaje się słuszne).

Wprowadzimy teraz pewną relację $\underset{p}{\Rightarrow}$ (tzw. p-implikację) na zbiorze zdań eksperymentalnych: X : $(A, E) \underset{p}{\Rightarrow} (B, F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p(A, \alpha, E) \leq p(B, \alpha, F)$ dla wszystkich α należących do S.

P-implikacja posiada identyczne formalne własności co zwykła implikacja; jest przechodnia i zwrotna. Zatem zdanie $(A,E)\underset{p}{\Rightarrow}(B,F)$ oznacza więc: prawdopodobieństwo, że (B,F) jest prawdziwe, w każdym stanie α jest nie mniejsze niż prawdopodobieństwo, że (A,E) jest prawdziwe. W tym sensie jest to implikacja. W przypadku, gdy $A=B$ i $E\subset F$ $(A,E)\underset{p}{\Rightarrow}(A,F)$ jest zwykłą implikacją. Niech $-(A,E)=(A,R-E)$. Funkcja $-$ ma własności negacji w zbiorze zdań eksperymentalnych: jeśli (A,E) jest prawdziwe, to $-(A,E)$ jest fałszywe oraz $-(-(A,E))=(A,E)$. Zbiór zdań eksperymentalnych X razem z p-implikacją i negacją $-$, gdzie p spełnia aksjomaty 1–3 tworzy rodzaj formalnego systemu logicznego. Relacja równoważności $\sim$ wprowadza w X rodzaj identyfikacji dwóch zdań eksperymentalnych o tej samej wartości logicznej w tym samym stanie: $(A<e)\sim(B,F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(A,E)\underset{p}{\Rightarrow}(B,F)$ i $(B,F)\underset{p}{\Leftarrow}(A,E)$. Idąc za G. Birkhoffem i J. von Neumannem możemy powiedzieć, że klasa abstrakcji $[(A,e)]$ reprezentuje „jakość fizyczną". Identyfikowanie logiczne równoważnych zdań w teorii sformalizowanej T jest często stosowane w logice matematycznej i matematyce [22]. Rezultatem takiej identyfikacji jest tzw. algebra Lindenbauma-Tarskiego teorii T. Tak więc logika $(L,\leq,\perp)$ skonstruowana dla X może być interpretowana jako rodzaj „algebry" Lindenbauma-Tarskiego dla formalnego systemu zdań eksperymentalnych.

Wiadomo, że jeśli teoria T pozwala na stworzenie zdań typu: „p lub q" oraz „p i q" spełniających prawa klasycznego rachunku zdań, to algebra Lindenbauma-Tarskiego jest algebrą Boole'a [22]. W przypadku naszego systemu X zdanie „(A,E) lub (B,F)" ma sens fizyczny (tzn. możemy określić w każdym stanie prawdopodobieństwo, że takie zdanie jest prawdziwe), gdy (A,E) i (B,F) są wzajemnie sprzeczne (aksjomat 3). Nie żądamy, aby zdanie „(A,E) lub (B,F)" miało sens fizyczny dla wszystkich (A,E) i (B,F). Dlatego ogólnie biorąc logika L systemu fizycznego nie jest algebrą Boole'a. W mechanice klasycznej zdania „(A,E) lub (B,F)" oraz „(A,E) i (B,F)" mają zawsze sens fizyczny i dlatego w przypadku systemu fizycznego podlegającego prawom mechaniki klasycznej logika L jest algebrą Boole'a. Natomiast podstawowym wnioskiem mechaniki kwantowej jest, że zdania „(A,E) lub $)B,F)$" oraz „(A,E) i (B,F)" nie zawsze mają sens fizyczny (zasada nieoznaczoności Heisenberga). Wobec tego dla układu mechaniki kwantowej L będzie zbiorem częściowo uporządkowanym z ortouzupełnieniem, który nie jest algebrą Boole'a. Na koniec tych rozważań zajmiemy się interpretacją postulatu 4. Przypuśćmy najpierw, że ten aksjomat nie zachodzi. Niech O_l będzie zbiorem wszystkich L-miar dla każdego μ należącego do O_l, każdego α należącego do S oraz każdego E borelowskiego na prostej niech $p_l(\mu,\alpha,E)=\alpha\mu(E)$. Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowane p_l spełnia aksjomaty 1–3 oraz aksjomat 4. Ponadto jeśli zidentyfikujemy każde A należące do O z μ_A należącym do O_l, to O stanie się w tym sensie częścią O_l i p_l ograniczone do O będzie identyczne z p. Tak więc zawsze możemy spełnić postulat 4 rozszerzając zbiór O. Fizyczne znaczenie tego rozszerzenia jest następujące: jeżeli mamy zbiór zdań eksperymentalnych $|Q|_\varepsilon$ należący do X (jedno zdanie eksperymentalne przyporządkowane zbiorowi Borela w R w sposób taki, że $E \to [Q_E]$ jest L-miarą), to możemy zdefiniować obserwablę jako wielkość fizyczną odpowiadającą tym zdaniom eksperymentalnym. Widać, że obserwabla A jest wyznaczona jednoznacznie. Zauważmy, że rozszerzenie zbioru O o obserwable odpowiadające nowym zdaniom eksperymentalnym jest właściwie rozwojem całej fizyki. Widzimy również, że w dalszym ciągu będziemy mogli utożsamiać zbiór wszystkich obserwabli O ze zbiorem wszystkich L-miar. Będzie miało to bardzo poważne konsekwencje.

Uwaga 1. Aksjomatyka dowolnego systemu fizycznego F podana w tym rozdziale różni się cokolwiek od klasycznej aksjomatyki Mackeya. G. Mackey [23] używał w swojej teorii sześciu aksjomatów i zmuszony był do posługiwania się specjalnym pomocniczym rodzajem obserwabli tzw. kwestiami. Jego teoria nie miała również tak jasnego logicznie charakteru jak teoria oparta na aksjomatach zmodyfikowanych przez Mączyńskiego [14].

Uwaga 2. Z uwagi na daleko idącą ogólność przedstawionego tu ujęcia możliwe będzie zapewne w przyszłości stworzenie odpowiednich logik dla wszystkich znanych obecnie mechanik. W obecnym stadium tej teorii istnieją logiki dla mechaniki klasycznej i nierelatywistycznej mechaniki kwantowej.

4. Ogólne własności obserwabli

Definicja 1. Jeśli A, B należą do O i f jest funkcją Borela $f : R \to R$, wtedy mówimy, że $A = f(B)(\mu_A = f(\mu_B))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p(A, \alpha, E) = p(B, \alpha, f^{-1}(E))$ dla wszystkich α należących do S i wszystkich E borelowskich na prostej rzeczywistej. Widać, że jest to równoważne zapisowi $\mu_A = \mu_B f^{-1}$.

Definicja 2. Zakresem obserwabli A należącej do O nazywamy zbiór $L_A = \{[(A, E)], E \in B(R)\}$.

Twierdzenie 1. *Zakres obserwabli A należącej do O jest σ-podalgebrą Boole'a w L.*

D o w ó d. Musimy wykazać wszystkie własności σ-podalgebry Boole'a w L. Niech $a = \mu_A(E), [(A, E)] \overset{\text{df}}{=} \mu_A(E), b = \mu_A(F)$. Zbiory borelowskie $E_1 = E \cap F, E_2 = E - E \cap F, E_3 = F - E \cap F$ są wzajemnie rozłączne i $E = E_1 \cup E_2, F = E_1 \cup E_3$. Ponieważ μ_a jest L-miarą więc $\mu_A(E) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_2), \mu_A(F) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_3)$ i elementy $\mu_A(E_1), \mu_A(E_2), \mu_A(E_3)$ są wzajemnie ortogonalne. Zatem istnieje $c = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_2) + \mu_A(E_3) = \mu_A(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ i c należy do L_A. Mamy poza tym $c = (\mu_A(E_1) \cup \mu_A(E_2)) \cup (\mu_A(E_1) \cup \mu_A(E_3)) = \mu_A(E) \cup \mu_A(F) = a \cup b$. Zatem c jest kresem górnym a i b. Zauważmy, że dla dowolnych E i F należących do $B(R)$ $\mu_A(E \cup F) = \mu_A(E) \cup \mu_A(F)$. Jeżeli $a = \mu_A(E)$ należy do

L_A, to $a^\perp = \mu_A(R - E)$ należy do L_A. Zatem jeśli a, b należą do L_A, to $(a^\perp \cup b^\perp)^\perp$ istnieje i należy do L_A. Łatwo pokazać, że $(a^\perp \cup b^\perp)^\perp$ jest największym elementem L zawartym w a i b tzn. że istnieje i należy do L_A. Jeżeli $a = \mu_A(E), b = \mu_A(F), c = \mu_A(G)$, to $(a \cap b) \cup (a \cap c) = (\mu_A(E) \cap \mu_A(F)) \cup (\mu_A(E) \cap \mu_A(G)) = \mu_A((E \cap F) \cup (E \cap G)) = \mu_A(E \cap (F \cup G)) = \mu_A(E) \cap (\mu_A(F) \cup \mu_A(G)) = a \cap (b \cup c)$. Mamy: $\mu_A(E)$ prostopadłe do $\mu_A(F)$ co jest równoważne $E \cap F = \emptyset$ z powyższego i z tego, że μ_A jest L-miarą wynika, że jeżeli a_i należy do $L_A, i = 1, 2, 3 \ldots, a_i \perp a_j, i \neq j$, to $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ należy do L_A. To kończy dowód twierdzenia. Zauważmy jeszcze, że z dowodu wynika fakt, że funkcja $E \to \mu_A(E)$ jest σ-homomorfizmem algebry Boole'a $B(R)$ na L_A.

c.b.d.o.

Definicja 3. Mówimy, że logika L jest σ-generowalna jeśli każda jej σ-podalgebra Boole'a jest σ-generowalna.

Twierdzenie 2. *Niech L będzie logiką, która jest σ-generowalna. Podzbiór X zawarty w L jest σ-podalgebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obserwabla A należąca do O taka że*

$$X = L_A = \{\mu_A(E), \quad E \in B(R)\}.$$

D o w ó d. Należy udowodnić część „tylko wtedy" twierdzenia. Niech X zawiera się w L i będzie σ-podalgebrą w L. Zatem istnieje przeliczalny zbiór σ-generatorów $Z = \{a_n, n \in N_l\}$ oraz Z zawiera się w X. Ponieważ $B(R)$ jest σ-generowalną, wolną σ-algebrą Boole'a σ-generowalną przez przeliczalny zbiór generatorów, więc istnieje przeliczalny zbiór $\{E_n, n \in N_l\}$ wolnych σ-generatorów. Funkcja $\mu^o : E_n \to a_n$ da się rozszerzyć do σ-homomorfizmu $\mu : B(R) \underset{\text{na}}{\to} X$. Jest to oczywiście L-miara i na mocy aksjomatu 4 istnieje takie A należące do O, że $\mu = \mu_A$.

c.b.d.o.

W dalszym ciągu będziemy milcząco zakładać, że L jest σ-generowalną.

Definicja 4. Mówimy, że X zawarty w L jest zgodny, symbolicznie $Zg(X)$, jeśli istnieje σ-podalgebra Boole'a Y zawarte w L taka, że X zawiera się w Y. Jeżeli $X = \{(a, b)\}$ to zamiast $Zg(X)$ piszemy $a \leftrightarrow b$. Zauważmy, że jeśli X jest zgodny, to istnieje najmniejsza σ-podalgebra Boole'a w L zawierająca X (jest to oczywiście przecięcie się wszystkich σ-podalgebr Boole'a zawierających X). Jeżeli $\{(A_i, E_i), i \in T\}$ jest zbiorem zdań eksperymentalnych, to mówimy, że zbiór ten jest zgodny, jeśli klasy abstrakcji $[(A_i, E_i)], i \in T$, tworzą w L zbiór zgodny. Mamy następujące kryterium zgodności:

Twierdzenie 3. *$a \leftrightarrow b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją a_1, b_1, c należące do L takie, że a_1 prostopadłe do b_1, a_1 prostopadłe do c, b_1 prostopadłe do c i $a = a_1 + c, b = b_1 + c$.*

D o w ó d. [5]

Definicja 5. Mówimy, że zbiór obserwabli $\{A_t, t \in T\}$ jest zgodny jeśli istnieje σ-podalgebra Boole'a U zawierająca się w L w skład której wchodzą wszystkie zakresy obserwabli $A_t, t \in T$.

Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Zbiór obserwabli $\{A_t, t \in T\}$ jest zgodny wtedy i tylko wtedy jeśli: istnieje obserwabla B i zbiór rzeczywistych funkcji Borela $\{f_t, t \in T\}$ taki, że $A_t = f_t(B)$ dla wszystkich t należących do T.*

D o w ó d. Jeśli $A_t = f_t(B)$ dla każdego $t \in T$, wtedy $L_{A_t} = L_B$ dla wszystkich t. Ponieważ L_B jest σ-podalgebrą Boole'a oznacza to na podstawie definicji, że $\{A_t, t \in T\}$ są zgodne. Załóżmy teraz, że $\{A_t, t \in T\}$ jest zgodne i niech U będzie σ-podalgebrą zawierającą $\bigcup\limits_{t \in T} L_t$. Ponieważ L jest σ-generowalna zatem na mocy twierdzenia 2 mamy takie B należące do O, że $U = \{\mu_B(E), E \in B(R)\}$. Mamy teraz następującą sytuację:

$$\begin{tikzcd} B(R) \arrow[d, "h_t"] \arrow[dr, "\mu_{A_t}"] & \\ B(R) \arrow[r, "\text{na}", "\mu_B"'] & U \end{tikzcd}$$

Ponieważ $B(R)$ jest wolną σ-algebrą Boole'a więc istnieje σ-homomorfizm $h_t : B(R) \to B(R)$ takie, że $\mu_t = \mu_B \circ h_t$. Aby określić h_t, weźmy zbiór wolnych σ-generatorów dla $B(R) : \{E_1, E_2, \ldots\}$. Niech F_n należy do $B(R)$ tak, aby $\mu_B(F_n) = \mu_{A_t}(E_n)$. Odwzorowanie $E_n \to F_n$ można rozszerzyć do σ-homomorfizmu $h_t : B(R) \to B(R)$ tak, że $h_t(E_n) = F_n$. To implikuje $\mu_{A_t}(E_n) = \mu_B(F_n) = \mu_B \circ h_t(E_n)$. Ponieważ ostatnie równanie spełnia się w przypadku wolnych generatorów mamy: $\mu_{A_t} = \mu_B \circ h_t$. σ-homomorfizm $h_t : B(R) \to B(R)$ jest wyprowadzony przy pomocy punktowego odwzorowania f_t (patrz [6]). W ten sposób istnieje $f_t : R \to R$ takie, że $h_t(E) = f_t^{-1}(E)$ dla wszystkich E borelowskich. Stąd $\mu_{A_t} = \mu_B \circ f_t^{-1}$ i w konsekwencji $A_t = f_t(B)$ dla dowolnego t.

c.b.d.o

Powyższe twierdzenie zostało udowodnione przez Varadarajana [25] i Ramsaya [26], ale definicja zgodności była inna niż wprowadzona tutaj. Mianowicie mówiono, że zbiór obserwabli $\{A_t, t \in T\}$ jest zgodny jeśli $[(A_t, E)] \leftrightarrow [(A_t, F)]$ dla wszystkich E, F borelowskich i wszystkich t, t' należących do T. Jeśli zbiór obserwabli jest zgodny według definicji Mączyńskiego, to jest również zgodny w rozumieniu Varadarajana, ale nie odwrotnie. Dowód powyższego twierdzenia wymaga wtedy dodatkowego założenia co do własności logiki L. Twierdzenie to bez dodatkowych założeń prawdziwe jest tylko dla $\overline{\overline{T}} \leq 2$. Gudder [27] zakładając, że dla wszystkich a, b, c należących do L takich, że $a \leftrightarrow b, b \leftrightarrow c, a \leftrightarrow c$ mamy $a \leftrightarrow b \cup c$ otrzymał to twierdzenie w ogólnej postaci.

Definicja przyjęta przez Mączyńskiego wydaje się bardziej naturalna i wyraźniej odbijająca związek tego pojęcia z klasyczną mechaniką. W istocie jeżeli wszystkie algebry Lindenbauma-Tarskiego L_{A_t} tworzą w L algebrę Boole'a, to po prostu oznacza to wg naszej interpretacji, że możemy zajmować się eksperymentalnymi hipotezami utworzonymi z obserwabli $A_t, t \in T$ tak jak w klasycznej mechanice (np. możemy dokonywać równoczesnych pomiarów). Co więcej zgodność zbioru obserwabli jest własnością tego zbioru jako całości i nie ma powodu zakładać, że zbiór obserwabli jest zgodny jeśli każda para obserwabli z tego zbioru jest zgodna (łatwo pojąć, że możemy dokonać równoczesnych pomiarów każdej pary obserwabli ale nie możemy zmierzyć równocześnie całego zbioru obserwabli). W jakimkolwiek przypadku, jeśli L jest logiką przestrzenną Borela, lub logiką przestrzeni Hilberta, wtedy obydwie definicje są równoważne.

Definicja 3. Mówimy, że A jest maksymalną obserwablą, jeśli jego zakres jest σ-podalgebrą Boole'a (maksymalną) logiki L. Stosując lemat Kuratowskiego-Zerna [5] widzimy, że dla każdej obserwabli A istnieje maksymalna obserwabla B tak, że $L_A \subseteq L_B$. Np. $A = f(B)$ dla pewnej funkcji Borela f.

Definicja 7. Zasadą superselekcji nazywamy obserwablę, której zakres jest zawarty w centrum logiki L (centrum jest to oczywiście przecięcie wszystkich maksymalnych σ-podalgebr Boole'a logiki L).

Jest jasne, że A jest zasadą superselekcji wtedy i tylko wtedy, jeśli A jest funkcją każdej maksymalnej obserwabli. Zdefiniujemy teraz widmo obserwabli A.

Jeśli $\mu_A : B(R) \to L$ jest obserwablą, to mówimy, że E należące do $B(R)$ jest zerowym zbiorem A, jeśli $\mu_A(E) = \Lambda$. Łatwo zauważyć, że E jest zerowym zbiorem wtedy i tylko wtedy, jeśli $p(A, \alpha, E) = 0$ dla każdego α należącego do S. Sumę wszystkich otwartych, zerowych zbiorów A nazywamy rezolwentą A — $r(A)$. Widmem obserwabli A nazywamy dopełnienie rezolwenty $s(A) = R - r(A)$, jest on oczywiście zbiorem domkniętym. Możemy wprowadzić widmo punktowe i widmo ciągłe. Zbiór $s_p(A) = (\lambda \in R, \mu_A(\{\lambda\}) \neq \Lambda)$ nazywamy widmem punktowym A, zaś $s_c(A) = s(A) - s_p(A)$ nazywamy widmem ciagłym. Gdy $s(A) = s_c(A)$ mówimy o widmie czysto ciągłym. Największe znaczenie mają obserwable, które posiadają czysto punktowe widmo przeliczalne. Niech A ma przeliczalne widmo punktowe $s(A) = s_p(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, to mamy $a_i = \mu_A(\{\lambda_i\})$ i a_i prostopadłe do a_j jeśli $i \neq j$ (zakładamy oczywiście, że elementy widm nie powtarzają się) oraz dla jakiegokolwiek zbioru Borela $E \in B(R)$

$$\mu_A(E) = \mu_A(\{\lambda_{k_1}\}) + \mu_A(\{\lambda_{k_2}\}) + \cdots = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots.$$

$X = \{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots\} = E \cap \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ (jeżeli $X = \emptyset$, to $\mu_A(E) = \Lambda$).

Powyższe własności są natychmiastowymi konsekwencjami definicji widma i własności L-miary.

5. Reprezentacje obserwabli według Boole'a

Definicja 1. Niech P zawarte w O będzie zbiorem obserwabli opartych na logice L. Para $(B, \{r_A\}, A \in P)$ jest reprezentacją według Boole'a dla P jeśli:

1. B jest σ-zupełną algebrą Boole'a i dla każdego A należącego do P, r_A jest σ-homomorfizmem z $B(R)$ w B tak, że połączenie zakresu r_A (A należy do P) wytwarza B.
2. Dla każdego A należącego do P odworowanie $h_A : [(A, E)] \to r_A(E)$ jest σ-homomorfizmem L_A w B.
3. Jeśli dla A, B wziętych z P i borelowskiej funkcji f mamy $A = f(B)$, wtedy $r_A = f(r_B)$, tj. $r_A = r_b \circ f^{-1}$. Jeśli istnieje reprezentacja według Boole'a dla P, to mówimy, że P jest reprezentowane po boolowsku. Jeśli $(B, \{r_a\}, A \in P)$ jest reprezentacją Boole'a dla P, $a : B \to B'$ jest σ-homomorfizmem w σ-zupełną algebrą Boole'a, wówczas $(B', \{h o r_A\}, A \in P)$ jest także reprezentacją Boole'a dla P. Jeśli reprezentacja Boole'a $(B, \{r_A\}, A \in P)$ posiada własność.
4. Dla każdej reprezentacji Boole'a $(B^1, \{r_A\}, A \in P)$ mamy σ-homomorfizm $h : B \to B^1$ takie, że $h \circ r_A = r_A$ dla każdego A należącego do P, wtedy $(B, \{r_A\}, A \in P)$ jest maksymalną reprezentacją Boole'a dla P.

   Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Zbiór obserwabli O jest reprezentowany według Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje σ-homomorfizm h z L w σ-algebrę Boole'a.*

D o w ó d. Jeśli $h : L \to B$ jest σ-homomorfizmem z L w σ-zupełną algebrę Boole'a B wtedy łatwo zobaczyć, że $(B, \{r_A\}, A \in P)$, gdzie $r_A = h \circ \mu_A$ jest reprezentacją Boole'a dla O. (Możemy zawsze przyjąć, że B jest σ-wytworzone przez $h(L)$). W istocie warunek jeden jest oczywisty dla każdego A należącego do O, $h_A = h|L_A$ jest σ-homomorfizmem. Również warunek drugi jest oczywisty. Jeśli $A = f(B)$, wtedy $\mu_A = \mu_B \circ f^{-1}$, tj. $r_A = f(r_B)$. W ten sposób zachodzi również i 3. Załóżmy teraz, że $(B, \{r_A\}, A \in O)$ jest reprezentacją Boole'a dla O. Definiujemy odwzorowanie $h : L \underset{w}{\to} B, h([(A, E)]) = r_A(E)$, dla wszystkich A należących do O i E borelowskich. Musimy wykazać, że to odwzorowanie jest dobrze zdefiniowane tj. $[(A, E)] = [(B, E)]$ implikuje $r_A(F) = r_B(F)$. Niech L_A i L_B będą zakresami odpowiednio μ_A i μ_B, i niech $a = [(A, E)] = [(B, F)]$. Czteroelementowa algebra Boole'a utworzona przez a, $U = (a, a^{\perp}, V, \Lambda)$ jest zawarta w L_A i L_B. Niech C będzie obserwablą taką, że $\mu_C : B(R) \to U$ i niech dalej H będzie zbiorem borelowskim spełniającym własność $\mu_C(H) = a$ w dalszym ciągu niech y_1 i y_2 będą izomorfizmami U do $(\emptyset, E, -F, R)$ i do $(\emptyset, I, -F, R)$, gdzie $y_1(a) = E, y_2(a) = F$. Wtedy $y_1 \circ \mu_C$ i $y_2 \circ \mu_C$ są σ-homomorfizmzmi z $B(R)$ do $B(R)$, a $\mu_A \circ y_1 \circ \mu_C = \mu_B \circ y_2 \circ \mu_C = \mu_C$.

Niech f i g będą funkcjami Borela tworzącymi odpowiednio $y_1 \circ \mu_C$ i $y_2 \circ \mu_C$. Mamy $y_1 \circ \mu_C(X) = f^{-1}(X), y_2 \circ \mu_C(X) = g^{-1}(X)$ dla każdego X borelowskiego. Ponieważ $\mu_A \circ y_1 \circ \mu_C = \mu_C$, mamy $\mu_A \circ f^{-1} = \mu_C$ tj. $C = f(A), C = f(B)$ to implikuje $r_C = f(r_A)$ i $r_C = g(r_B)$ tj. $r_C = r_A \circ f$ i $r_C = r_B \circ g^{-1}$. Mamy teraz $r_C(H) = r_A \circ f(H) = r_A \circ y_1 \circ \mu_C(H) = r_A \circ y_1(A) = r_A(E)$ oraz $r_C(H) = r_B \circ g^{-1}(H) = r_B \circ y_2 \circ \mu_C(H) = r_B \circ y_2(A) = r_B(F)$. Stąd $r_A(E) = r_B(F)$ i h jest dobrze określone.

Wykażemy teraz, że h jest σ-homomorfizmem. Jeśli obserwabla A o zasięgu $(a, a^\perp, V, \Lambda)$ i $-h(a) = -r_A(E) = r_A(R - E) = h(a^\perp)$(zauważmy, że $\Lambda = [(A, \emptyset)]$). Niech $a_1, a_2, \ldots$ należą do L tak, że są parami ortogonalne. Niech $a_0 = (a_1 + a_2 + \cdots)^\perp$. Niech U będzie najmniejszą σ-podalgebrą Boole'a w L zawierającą zbiór $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_0\}$. Ta algebra Boole'a jest izomorficzna z algebrą Boole'a wszystkich podzbiorów X. Niech $\{l_0, l_1, l_2, \ldots\}$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi i niech A będzie obserwablą oznaczoną przez $\mu_A(E) = \mu_A(\{l_{k_1}\}) + \mu_A(\{l_{K-2}\}) + \cdots$, gdzie $\{l_{k_1}, l_{k_2}, \ldots\} = E \cap \{l_0, l_1, l_2, \ldots\}$. Jeśli ostatni zbiór jest pusty, wtedy $\mu_A(E) = \Lambda$. W ten sposób zakresem A jest U i mamy: $h(a_1 + a_2 + \cdots) = h(a_0^\perp) = -h(a_0) = -r_A(\{l_0\}) = r_A(R - \{l_0\}) = r_A(\{l_1\}) = r_A(\{l_2\}) + \cdots = h(a_1) + h(a_2) + \cdots$ (zauważmy, że $a_i = [(a, \{l_i\}], i = 0, 1, 2, \ldots)$ zatem H jest σ-addytywne. To kończy dowód twierdzenia.

c.b.d.o.

Zagadnienie czy istnieje homomorfizm logiki L w algebrę Boole'a było badane przez Zierlera i Schlessingera [28]. Wykazali oni, że zawsze istnieje σ-homomorfizm L w algebrę Boole'a, który zachowuje uporządkowanie tj. jeśli $a \leq b$, to $c(a) \leq c(b)$. Jednakże nie może być żadnego zachowującego porządek odwzorowania, które spełnia również: $c(a + b) = c(a) + c(b)$ dla ortogonalnych a i b. W rzeczywistości jeśli $L = L(H)$ jest częściowo uporządkowanym zbiorem z ortouzupełnieniem wszystkich domkniętych podprzestrzeni przestrzeni Hilberta (logika przestrzeni Hilberta) wtedy istnienie takiego odwzorowania c implikowałoby istnienie homomorfizmu h w dwuelementową algebrę Boole'a, a więc istnienie dwuwartościowej miary na $L(H)$, o której wiadomo, że nie istnieje [29]. Stąd widzimy na podstawie powyższego twierdzenia, że zbiór wszystkich obserwabli opartych na logice przestrzeni Hilberta jest niemożliwy do przedstawienia według Boole'a. Wprowadzimy teraz pojęcie bezpośredniej granicy częściowo uporządkowanego zbioru algebr Boole'a. Bezpośrednie granice algebr Boole'a były badane przez Ph. Dwingera [30].

Częściowo uporządkowany zbiór σ-algebr Boole'a jest zbiorem $\{B_l, y_{lk} : l, k \in Z\}$, gdzie Z jest częściowo uporządkowanym zbiorem i gdzie dla każdego l należącego do Z,

B_l jest algebrą Boole'a oraz dla $l \leq k, y_{lk} : B_l \to B_k$ jest σ-homomorfizmem tak, że y_{ll} jest tożsamościowym odwzorowaniem dla każdego l należącego do Z i $y_{lj} \circ y_{jk} = y_{lk}$ kiedykolwiek $l \leq j \leq k$.

Bezpośrednia granica (direct limit) $\{B_l, y_{lk} : l, k \in Z\}$ jest parą $(B, \{i_l\}, l \in Z)$ gdzie B jest σ-algebrą Boole'a i gdzie dla każdego $l \in Z, i_l : B_l \to B$ jest σ-homomorfizmem tak, że

1. $i_k \circ y_{lk} = i_k$ gdy $k \leq l$.
2. dla każdej pary $(G, \{h_l\}, l \in Z)$ gdzie G jest σ-algebrą Boole'a i gdzie dla każdego l należącego do Z, $h_l : B \to G$ jest σ-homomorfizmem, tam istnieje jednolity σ-homomorfizm $h : B \to G$ tak, że $h \circ i_l = h_l$ dla każdego l należącego do Z.

Bezpośrednia granica $(\{B_l\}, y_{lk}, l, k \in Z)$ może być uzyskana w następujący sposób. Niech B będzie wolnym σ-produktem B_l (utożsamiamy B_l z jego izomorficzną kopią w B). Niech K będzie σ-ideałem B, σ-wytworzonym przez elementy $u = x \div y_{lk}(x)$, x należy do B_l gdzie $l \leq k$ ($\div$ oznacza symetryczną różnicę).

Niech $y : B \to B/K$ będzie naturalnym σ-homomorfizmem i niech $i_l = y/B_l$ dla każdego l należącego do Z. Łatwo wykazać, że $(B/K, \{i_l\}, l \in Z)$ jest bezpośrednią granicą $(B_l, \{y_{lk}, \ l, k \in Z)$ (patrz [30]). Widzimy z powyższej konstrukcji, że bezpośrednia granica jest niezwyrodniałą algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy gdy ideał K jest właściwy. Jeśli L jest logiką dla jakiegokolwiek zbioru obserwabli P, zbiór sub-σ-algebr Boole'a odpowiadających A należących do P, $\{L_A, A \in P\}$ może być uważany za częściowo uporządkowany relacją inkluzji. Jeśli $L_A \subseteq L_B$, wtedy $y_{AB} : L_A \to L_B$ jest włożeniem. Zauważmy, że biorąc zbiór $Z = P/r$ gdzie r jest relacją równoważności określoną: ArB wtedy i tylko wtedy, jeśli $L_A = L_B$ i porządkując zbiór Z będziemy mogli stosować twierdzenie o bezpośredniej granicy.

Udowodnimy teraz następujące kryterium o reprezentacji według Boole'a zbioru obserwabli.

Twierdzenie 2. *Zbiór obserwabli P jest możliwy do przedstawienia według Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy bezpośrednia granica częściowo uporządkowanego zbioru $\{L_A, A \in P\}$ jest niezdegenerowana. Jeśli $(B, \{i_A\}, A \in P)$ jest bezpośrednią granicą $\{L_A, A \in P\}$ wtedy $(B, \{i_A \circ \mu_A\}, A \in P)$ jest maksymalną reprezentacją Boole'a dla P. Identyfikujemy zbiory Z i P, aby nie komplikować zapisów.*

D o w ó d. Załóżmy, że P jest możliwy do przedstawienia według Boole'a. Niech $(B, \{r_A\}, A \in P)$ będzie reprezentacją według Boole'a dla P. Niech h_A dla A należącym do P będzie σ-homomorfizmem opisanym w 2.def.1. Wykażemy, że h_A posiada następujące własności: jeśli L_A zawiera się w L_B, wtedy $h_B \mid L_A = h_A$. Niech $[(A, E)]$ należy do L_A. Wtedy dla niektórych F borelowskich mamy: $[(A, E)] = [(B, F)]$ stosując tę samą metodę, co w dowodzie twierdzenia 1 tego rozdziału wykazujemy, że z $[(A, E)] = [(B, F)]$ wynika $r_A(E) = r_B(F)$.

Lecz to oznacza $h_B([(A,E)]) = h_B([(B,F)]) = r_B(F) = r_A(E) = h_A([(A,E)])$. To znaczy, że $h_b \mid L_A = h_A$. Zatem $(B, \{h_A\}, A \in P)$ posiada własności postulowane w 2. W następstwie jeśli $(B, \{i_A\}, A \in P)$ jest bezpośrednią granicą $\{L_A, A \in P\}$, istnieje σ-homomorfizm $h : B \to B'$ tak, że $h \circ i_A = h_A$. Ponieważ B' jest niezdegenerowane, więc B musi być również niezdegenerowane. Niech $(B, \{i_A\}, A \in P)$ będzie teraz niezdegenerowaną bezpośrednią granicą $\{L_A, A \in P\}$. Wykażemy, że $(B, \{r_A\}, A \in P)$ gdzie $r_A = i_A \circ \mu_A$ jest maksymalną reprezentacją Boole'a dla P.

Warunki 1 i 2 w definicji 1 tego rozdziału są łatwo spełnione. Jeśli $A = f(B)$ dla A, B należących do P i funkcji Borela f, wtedy $\mu_A = \mu_B \circ f^{-1}$, L_A zawiera się w L_B. Stąd $r_A = i_A \circ \mu_A = i_A \circ \mu_B = i_B \circ \mu_A = i_B \circ \mu_B \circ f^{-1}$ i mamy warunek 3.

W ten sposób $(B, \{r_A\}, A \in P)$ jest reprezentacją według Boole'a. Ta reprezentacja jest maksymalną ponieważ jeśli $(B, \{r_A\}, A \in P)$ jest inną reprezentacją Boole'a wtedy przy pomocy pierwszej części dowodu $(B', \{h'_A\}, A \in P)$ spełnia założenie 2 oraz istnieje σ-homomorfizm $h : B \to B'$ tak, że $h \circ i_A = h_A$. Tzn., że $h \circ i_A \circ \mu_A = h_A \circ \mu_A$ to zaś pociąga $h \circ r_A = r_A$. To kończy dowód.

c.b.d.o.

Zastosujemy udowodnione twierdzenie do podania pewnych zbiorów obserwabli reprezentowanych według Boole'a.

Twierdzenie 3. *Jakikolwiek zbiór zgodnych obserwabli jest możliwy do przedstawienia według Boole'a.*

D o w ó d. Jeśli P jest zbiorem zgodnych obserwabli, wtedy jak wynika z definicji istnieje najmniejsza sub-σ-algebra Boole'a B zawarta w L zawierająca połączenie wszystkich zasięgów obserwabli A z P. Jest wtedy jasne, że $(B, \{\mu_A\}, A \in P)$ jest reprezentacją według Boole'a dla P.

c.b.d.o.

Wiemy już na podstawie twierdzenia 1, że w $L(H)$ (logika przestrzeni Hilberta) nie ma mowy o przedstawieniu według Boole'a całego zbioru obserwabli O. Jednak dwa twierdzenia podane przez Mączyńskiego i wykorzystujące powyższe kryterium dają nam dwa podzbiory zbioru O reprezentowane według zasady Boole'a. Twierdzenia te zostały sformułowane i udowodnione w zasadzie dla dowolnej logiki L.

Twierdzenie 4. *Zbiór M wszystkich maksymalnych obserwabli jest możliwy do przedstawienia według zasady Boole'a.*

D o w ó d. Skorzystamy z twierdzenia 3. Musimy więc udowodnić, że bezpośrednia granica zbioru $\{L_A : A \in M\}$ jest niezwyrodniała. Zauważmy, że dla A, B należących do M, $A = f(B)$ implikuje $L_A = L_B$.

W istocie, ponieważ wszystkie L_A są maksymalnymi sub-σ-algebrami Boole'a w L, zawieranie się L_A w L_B pociąga za sobą równość tych zbiorów. W ten sposób jedyną relacją inkluzji utrzymującą się między elementami zbioru zakresów obserwabli maksymalnych jest równość. To zaś oznacza, że rodzina $\{L_A, A \in M\}$ jest całkowicie nieuporządkowana, a bezpośrednia granica jej jest wolnym σ-produktem różnych członów L_A, który jest niezdegenerowany [6]. W ten sposób M jest do przedstawienia według Boole'a. W tym wypadku wszystkie i_A są monomorfizmami.

c.b.d.o.

Twierdzenie 5. *Niech M będzie zbiorem wszystkich maksymalnych obserwabli i niech S oznacza zasadę superselekcji z przeliczalnym widmem. Zbiór $P = M \cup \{S\}$, jest przedstawiany według Boole'a.*

D o w ó d. Z definicji wynika, że zakres L_S zasady superselekcji S jest zawarty w każdej maksymalnej σ-algebrze L_A, A należy do M. Zatem L_S jest σ-podalgebrą Boole'a dla każdej L_A. Nie ma żadnych innych inkluzji (oprócz tożsamości) między członami zbioru $\{L_A, A \in P\}$. Wykażemy teraz, że:

a) L_S jest atomowa, a w konsekwencji σ-dystrybutywna,

b) L_S jest regularną σ-podalgebrą L_A, dla każdego A należącego do L.

Niech $\{l_1, l_2, \ldots\}$ będzie widmem S (zakładamy, że $l_i \neq l_j, i \neq j$). Niech $\mu_S(\{l_j\}) = a_j$. Mamy $a_i \neq a_j$ i a_i prostopadłe do $a_j, i \neq j$, oraz $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = V$. W ten sposób zakres L_S z μ_S jest izomorficzny do ciała wszystkich podzbiorów zbioru $X = \{_1, a_2, \ldots\}$. To wskazuje, że L_S jest atomowe i atomami są elementy zbioru X. Niech teraz $c = \bigcup\limits_{t \in T} c_t$ (w L_S) i niech y będzie włożeniem $y : L_S \to L_A$ (σ-monomorfizm). Musimy wykazać, że $y(c) = \bigcup\limits_{t \in T} y(c_t)$. Ponieważ dla każdego t należącego do T, c_t może być przedstawione jako: $c_t = \bigcup\limits_{n \in N_t} a_n$, gdzie $N_t xx N_1$, dla każdego t, co otrzymujemy z uwagi na atomowość L_S. Niech $K = \bigcup\limits_{t \in T} N_t$, wtedy $c = \bigcup\limits_{n \in K} a_n = \bigcup\limits_{t \in T} \bigcup\limits_{n \in N_t} a_n$. W konsekwencji otrzymamy: $y(c) = \bigcup\limits_{n \in K} y(a_n) = \bigcup\limits_{t \in T} \bigcup\limits_{n \in N_t} y(a_n) = \bigcup\limits_{t \in T} y(c_t)$, co wskazuje, że L_S jest regularną podalgebrą L_A. Teraz na podstawie twierdzenia o amalgamacji a-dystrybutywnych algebr Boole'a [31] istnieje bezpośrednia granica częściowo uporządkowanego zbioru $L_S \subseteq L_A$, gdzie A należy do P i jest niezwyrodniała. Uściślając, jeśli $(B, \{i_A\}, A \in P)$ jest bezpośrednią granicą P, wtedy jest to uogólniony wolny produkt σ-zupełnej algebry Boole'a z σ-amalgamowaną podalgebrą L_S Boole'a i wszystkie i_A są monomorfizmami (twierdzenie odnosi się do sformułowania, że uogólniony wolny σ-produkt istnieje jeśli L_S jest σ-dystrybutywne, zaś L_S jest regularną podalgebrą każdego L_A). Stąd mamy tezę twierdzenia.

c.b.d.o.

Aby zrozumieć wagę znajdowania podzbioru zbioru O reprezentowanych według zasady Boole'a i to, zarówno w ogólnym przypadku dowolnej logiki L, jak i logiki L_A, zwróćmy uwagę jakiej logice odpowiada mechanika klasyczna. W tym celu rozpatrujemy przestrzeń R^{6n} tj. przestrzeń fazową cząstek. Weźmy $B(R^{6n})$ tj. ciało podzbiorów borelowskich tej przestrzeni. Jest ono algebrą Boole'a i to σ-zupełną. Zażądajmy izomorfizmu między L a $B(R^{6n})$. Widzimy, że założenia twierdzenia 1 są spełnione. Zatem w mechanice klasycznej wszystkie obserwable są reprezentowane według Boole'a. Widzimy więc, że znajdując podzbiory $P \subset O$ zbioru obserwabli w danej mechanice opartej na logice L reprezentowane według Boole'a znajdujemy równocześnie pewne podmechaniki, które zachowują się w sposób analogiczny do mechaniki klasycznej. Możemy powiedzieć, że tworzą one fragmenty klasyczne w mechanice opartej na logice L. W następnym rozdziale dokładnie zdefiniujemy pojęcie fragmentu klasycznego.

Biorąc pod uwagę rozważania przeprowadzone przy końcu rozdziału 2 widzimy, że algebra Lindenbauma-Tarskiego jest w tym przypadku σ-zupełną algebrą Boole'a i mogą zatem istnieć dla dowolnych zdań eksperymentalnych p, q zdania „p lub q" oraz „p i q". Na zakończenie tego rozdziału zbadamy czym są obserwable w mechanice klasycznej. Nie będziemy dokładnie rozważać tego problemu, podając tylko szkic dowodu. W myśl ogólnej teorii każda obserwabla jest reprezentowana przez L-miarę $\mu : B(R) \to L$. Tutaj $L = B(R^{6n})$. Istnieje wtedy funkcja borelowska $f : R^{6n} \to R$ (patrz np. [6]) taka, że $\mu(E) = f^{-1}(E)$, E należy do $B(R)$. Odpowiedniość ta jest jednoznaczna. Zatem każda obserwabla dla przykładu n cząstek w przestrzeni fazowej jest postaci $f(\bar{x}), \bar{x}$ należy do R^{6n}, $\bar{x} = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}, p_{x_2}, p_{y_2}, p_{z_2}, \ldots\}$. Łatwo wykazać, że widmem obserwabli jest wtedy $s = \{f(\bar{x}), \bar{x} \in R^{6n}\}$. Jeżeli $s = \{\lambda\}$ to mówimy, że obserwabla jest stałą fizyczną. Widzimy więc, że obserwable w mechanice klasycznej są funkcjami borelowskimi $f : r^{6n} \to R$.

Można również wykazać, że $p(A, \alpha, E) = p_\alpha \mu_A(E) = p_\alpha[f^{-1}A(E)] = \int_{E^d} \mu_A^\alpha$, gdzie $\mu_A^\alpha : E \to p_\alpha[f^{-1}A(E)]$ jest miarą prawdopodobieństwa na prostej. Na zakończenie zauważmy, że każdy zbiór obserwabli, jeżeli da się reprezentować według Boole'a wyklucza komplementarność wśród zdań eksperymentalnych odpowiadających mu.

6. Postult QM mechaniki kwantowej

Jak wiemy z ogólnej teorii przytoczonej w rozdziale 3 musimy zażądać pewnego izomorfizmu między logiką L ogólnego systemu fizycznego a pewną określoną logiką. Dla mechniki kwantowej opartej na przestrzeni Hilberta przyjmujemy:

Postulat QM. *Logika L dla układu mechaniki kwantowej jest izomorficzna z częściowo uporządkowanym zbiorem $L(H)$ wszystkich domkniętych podprzestrzeni pewnej ośrodkowej, nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta H.*

Z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedna przestrzeń Hilberta ośrodkowa. Jest to oczywiście przestrzeń z przeliczalną bazą (baza Schaudera). W zastosowaniach przyjmujemy najczęściej przestrzenie L^2 i l^2 (w zależności od sposobu przedstawienia operacji liniowych).

Logika $L(H)$ jest częściowo uporządkowana relacją inkluzji, zaś ortouzupełnienie jest uzupełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni. $L(H)$ jest oczywiście σ-generowalna (ośrodkowość H). Łatwo jest zauważyć, że w ten sposób określona logika $L(H)$ jest izomorficzna z kratą operatorów projekcji na odpowiednie podprzestrzenie H uporządkowanych przy pomocy relacji $\leq$, co znaczy z definicji: $P_1 \leq P_2$ jest równoważne $(P_1x, x) \leq (P_2x, x)$ dla każdego x. Z uwagi na twierdzenie o operacjach rzutowych (patrz np. [2]) mamy: $P_1 \leq P_2$ jest równoważne $P_1(H) \subset P_2(H)$ i $P_i(H)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni H, niezmienniczą względem P_i.

Mamy również $x = P_1x + y$, P_1x prostopadłe do y. Jest to tak zwany jednoznaczny rozkład ortogonalny. Oznaczając $y = P_1^{\perp}x$ mamy: $P_1^{\perp} = I - P_1$, gdzie I jest operacją tożsamościową. Po rozpatrzeniu powyższych uwag izomorfizm ten jest oczywisty. Krata $L(H)$ ma jeszcze pewne specyficzne własności, mianowicie nie jest ona dystrybutywna tj.: jeżeli $a, b, c \in I(H)$, to w ogólności nie zachodzi $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$. W przypadku gdyby aksjomat rozdzielności był spełniony niemożliwa by była komplementarność, $L(H)$ stałoby się algebrą Boole'a.

Wiemy jednak na podstawie rozważań z rozdziału 5, że jest to niemożliwe. Działania kratowe w przypdku $L(H)$ oznaczają: $a \cap b$ — iloczyn mnogościowy dwóch podprzestrzeni a i b, $a \cup b$ — domknięcie otoczki liniowej a i b. Krata $L(H)$ jest zaś kratą modularną tj. spełnia aksjomat: $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$ gdy $a \leq c$, co wynika z aksjomatu rozdzielności przy założeniu $a \leq c$. Posługując się kratą operatorów rzutowych będziemy mogli podać kilka interesujących formalnych własności „logiki kwantowej". Wprowadzimy w tym celu następującą definicję.

Definicja 1. Podzbiór $Z \subset L$ nazwiemy fragmentem klasycznym, jeżeli krata rozpięta przez Z jest dystrybutywna.

Mamy stąd twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Krata X z ortouzupełnieniem jest dystrybutywna wtedy i tylko wtedy, gdy każda para $x, y \in X$ stanowi fragment klasyczny.*

D o w ó d. Konieczność warunku jest oczywista. Dowiedziemy dostateczności. W tym celu sprawdzimy dwa lematy.

Lemat 1. *Jeśli $x = (x \cap y) \cup (x \cap y^{\perp})$, x, y należy do X, to mamy: $x \cap y = \Lambda$ i $x \cap z = \Lambda$. Pociąga to $x \cap (y \cup z) = \Lambda$. Mamy: $y = (y \cap x) \cup (y \cap x^{\perp}) \leq x^{\perp}$. Podobnie $z \leq x^{\perp}$ stąd $(y \cup z) \leq x^{\perp}$, więc $x \cap (y \cup z) \leq x \cap x^{\perp} = \Lambda$.*

Lemat 2. *Przy tym samym założeniu co w lemacie 1 krata X musi być dystrybutywna.*

Niech x, y, z należy do X, oznaczmy $s = (x \cap y) \cup (x \cap z)$, $S = x \cap (y \cup z)$. Oczywiście $x \cap y \leq x \cap (y \cup z)$ i $x \cap z \leq x \cap (y \cup z)$, skąd $s \leq S$. Udowodnimy teraz przeciwną nierówność. Rozpatrzmy element $s^{\perp} \cap S$. Wykażemy, że ma on znikające przecięcie z dwoma elementami: $x \cap y$ i $x^{\perp} \cap y$ tj. $(s^{\perp} \cap S) \cap (x \cap y) = \Lambda$, bo działanie $\cap$ jest łączne. Poza tym mamy również $s^{\perp} \cap (x \cap y) = \Lambda$, bo $x \cap y \leq s$. Dalej: $(s^{\perp} \cap S) \cap (x \cap y) = \Lambda$, wskutek łączności $\cap$ i tego, że $S \cap x^{\perp} = (x \cap (y \cup z)) \cap x^{\perp} = (x \cap x^{\perp}) \cap (y \cup z) = \Lambda$. Ale w myśl założenia lematu 1: $(x \cap y) \cup (x^{\perp} \cap y) = y$. Wobec tego $s^{\perp} \cap S$ musi mieć również znikające przecięcie z y tj. $(s^{\perp} \cap S) \cap y = \Lambda$. Zupełnie podobnie wykażemy, że $(s^{\perp} \cap S) \cap z = \Lambda$. Wnioskujemy również: $(s^{\perp} \cap S) \cap (y \cap z) = \Lambda$. Jednakże $(s^{\perp} \cap S) \cap (y \cup z) = s^{\perp} \cap (S \cap (y \cup z)) = s^{\perp} \cap S$. Zatem $s^{\perp} \cap S = \Lambda$, więc na mocy założenia lematu 1 mamy: $S = (s \cap S) \cup (s^{\perp} \cap S) = s \cap S \leq s$. Dowód twierdzenia 1 kończy się uwagą, że jeżeli para x, y należy do X jest częścią kraty dystrybutywnej, to ma miejsce założenie lematu 1. Widzimy więc (co wiemy również z poprzednich rozważań), że krata L nie może być dystrybutywna. L nie może być algebrą Boole'a.

c.b.d.o.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie Pirona. *Jeżeli $x \leq a$, to para (x, a) jest fragmentem klasycznym i odwrotnie.*

D o w ó d. Należy zbudować kratę $X = (a, a^{\perp}, x, x^{\perp}, \Lambda, V)$ i stosując własność modularności sprawdzić, że jest to algebra Boole'a.

c.b.d.o.

Niech a, b należy do $L(H)$. Korzystając z izomorfizmu między $L(H)$ a kratą operatorów rzutowych H mamy $a \overset{\text{iz}}{=} P_1, b \overset{\text{iz}}{=} P_2$, gdzie P_1 i P_2 są operatorami rzutowymi. Jeżeli a prostopadłe do b (w sensie kraty $L(H)$), to $P_1 P_2 = 0$. Jeżeli $a \leq b$ (w sensie kraty $L(H)$), to $P_1P_2 = P_1$. Oczywiście mamy również $P_1^2 = P_1$. Wszystkie te własności wynikają z własności operatorów rzutowych przestrzeni Hilberta H (patrz np. [11]). Podamy teraz inną interpretację algebry Lindenbauma-Tarskiego zdań eksperymentalnych w przypadku mechaniki kwantowej. Ujęcie to ma szersze uogólnienia np. [32, 33]. Będziemy uważać $L(H)$ za zbiór zdań eksperymentalnych typu tak-nie (yes-no experiment) (Jauch i Piron [32]). Elementy zbioru $L(H)$ będziemy również nazywać selektorami. Co one selekcjonują okaże się w dalszym ciągu. Wprowadzimy teraz jeszcze nowe definicje.

Definicja 2. Będziemy mówić, że selektor a pokrywa selektor b, jeżeli $b < a$ (tj. $b \leq a$ i $b \neq a$) i jeżeli nie istnieje taki element x należący do $L(H)$, że $b < x < a$. Powiadamy również, że a jest punktem jeśli pokrywa podprzestrzeń zerową lub co jest równoważne — zerowy operator rzutowy. Będziemy wtedy nazywać a selektorem maksymalnym.

Widzimy również, że dla każdego a należącego do $L(H)$ mamy b należące do $L(H)$-maksymalne tak, że zawiera b. Jest oczywiste, że przy podanej odpowiedniości między operatorami rzutowymi a elementami a i b mamy: $P_1P_2 = P_2$, gdzie $a = P_1, b = P_2$.

Proces selekcji da się zawęzić do maksymalnego. Zbadamy terz powiązanie między fragmentami klasycznymi i zgodnością selektorów (a i b są zgodne, jeśli $\{a, b\}$ jest fragmentem klasycznym). Można udowodnić posługując się twierdzeniem Pirona, że trzy następujące warunki są równoważne:

1) warunek zgodności a i b $\{a, b \in L(H)$
2) $a \cup (b \cap a^{\perp}) = b \cup (a \cap b^{\perp})$
3) $V = (a \cap b) \cup (a^{\perp} \cap b) \cup (a \cap b^{\perp}) \cup (a^{\perp} \cap b^{\perp})$.

Jauch i Piron uważają, że selektory a i b odpowiadają tym eksperymentom tak-nie, które dadzą się równocześnie wykonać. Podamy teraz interpretację stanów i obserwabli na gruncie przestrzeni Hilberta. Wyprowadzimy więc formalizm mechaniki kwantowej z postulatu QM. Jak wiemy z ogólnej teorii każdemu stanowi należącemu do S odpowiada jednoznacznie pewna miara prawdopodobieństwa p na $L(H)$. Jeżeli g należy do H jest unormowane do jedności, $\|g\| = 1$, to przykładem miary prawdopodobieństwa na $L(H)$ jest $p_g(M) = (P_M g, g)$, gdzie P_M jest operatorem rzutowym na podprzestrzeń domkniętą M przestrzeni H. Dalsze przykłady miar prawdopodobieństwa na $L(H)$ można otrzymać przez wzięcie wypukłych, liniowych kombinacji miar: $P_{g_i}, i = 1, 2, \ldots$ $l_1P_{g_1} + l_2P_{g_2} + l_3P_{g_3} + \cdots$, gdzie $l_i \geq 0$ i $\sum\limits_{l=1}^{\infty} l_i = 1$ oraz $\|g_i\| = 1$. Oczywiście w tym wypadku $\leq$ jest zwykłą nierównością liczb rzeczywistych. G. Mackey [23] opierając się na twierdzeniu A. M. Gleasona [29] udowodnił, że każda miara prawdopodobieństwa na $L(H)$ jest tej postaci. Inaczej mówiąc, każdemu stanowi α należącemu do S w mechanice kwantowej odpowiada pewna wypukła kombinacja liniowa wektorów jednostkowych $\sum\limits_{i=1}^{\infty} l_i g_i$ należących do H. Wtedy

$p_\alpha(M) = \sum_{i=1}^{\infty} l_i(P_M g_i, g_i)$, gdzie g_i jest unormowane do jedności i $\sum_{i=1}^{\infty} l_i = 1, l_i \geq 0$. Jeżeli $p_\alpha(M) = (P_M g, g)$, to α nazywamy stanem super czystym. Identyfikując dwa elementy g i $e^{ix}g, \|g\| = 1$, g należy do H otrzymujemy jednoznaczne przyporządkowanie między stanami czystymi a elementami sfery jednostkowej przestrzeni Hilberta. Każdy stan jest wypukłą kombinacją liniową stanów super czystych. Przyjmujemy również, że jest i na odwrót. Zatem każdej wypukłej kombinacji liniowej wektorów jednostkowych w H odpowiada stan α należący do S i odwrotnie. Już w tej chwili będziemy mogli podać szersze uzasadnienie dla wprowadzonej uprzednio nazwy „selektor" i odpowiedzieć na pytanie, na czym polega proces selekcji.

Widzimy, że operator rzutowy P_M należący do $L(H)$ rzutuje na pewną podprzestrzeń stanów M przestrzeni Hilberta H. Biorąc na przykład strumień cząstek opisanych przy pomocy pewnego podzbioru K zbioru S i poddając selekcji tj. przepuszczając tylko te, których stany należą do podprzestrzeni M otrzymujemy odpowiedź na pytanie, czy w wiązce znajdowały się cząstki o stanach z przestrzeni M. Jest to właśnie eksperyment typu tak-nie. Widzimy, że naturalnym materialnym odpowiednikiem operatora rzutowego przestrzeni Hilberta H są: różnego rodzaju polaryzatory, doświadczenia typu Sterna-Gerlacha, selektory kwadrupolowe w maserze z NH_3, różnego rodzaju spektometry masowe, ładunkowe, aparaty przepuszczające cząstki tylko o ustalonych wartościach pewnych liczb kwantowych. Widzimy, że iloczynowi operatorów rzutowych odpowiada złożenie selektorów materialnych. Najpierw przepuszczamy cząstki przez jeden selektor, a potem przez drugi. Równość $P_1P_2 = P_1$ oznacza to, że proces selekcji P_1 jest węższy od P_2. Dopełnieniem ortogonalnym $P_1^\perp$ (traktowanym jako realizacja materialna) będzie selektor, który działa wprost przeciwnie tj. przepuszcza to, co P_1 zatrzymał i odwrotnie. Zachowuje się więc jak jego negatyw. Równość $P_1^2 = P_1$ jest oczywista i zrozumiała (idempotentność selekcji). Weźmy jeszcze pod uwagę zależność $P_1P_2 = 0$ oznacza to, że $L_1 = P_1(H), L_2 = P_2(H)$ są ortogonalne, czyli złożenie dwóch tego typu selektorów nie przepuszcza ani jednej cząstki (stany ortogonalne). Np. dwa nikole o prostopadłych płaszczyznach polaryzacji. Łatwo możemy zinterpretować na tym gruncie selektor maksymalny $P_1 \cup P_2$. Jest to operator rzutowy na podprzestrzeń będącą domknięciem sumy liniowej podprzestrzeni L_1 i L_2. Widzimy, że tutaj proces selekcji polega na rzutowaniu na najszerszą podprzestrzeń stanów obejmującą stany faworyzowane przez P_1 i przez P_2. $P_1 \cap P_2 = P_1P_2$ (o ile istnieje projekcja P_1P_2). Ostatnia równość nie wymaga interpretacji. Widzimy posługując się odnośnym twierdzeniem z teorii przestrzeni Hilberta [2], że $P_1P_2 = P_2P_1$ jest równoważne temu, że P_1P_2 jest projekcją.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Niech a, b należy do $L(H)$ i jeden z nich jest maksymalny, to a i b są zgodne wtedy i tylko wtedy, gdy a i b są przemienne.*

D o w ó d. (a i b są oczywiście operacjami rzutowymi, jednak wygodniej jest stosować czasami formalizm kratowy, nie wnikając w znaczenie elementów). Niech a będzie maksymalne. Zauważmy, że a i b są zgodne. Wówczas $a = (a \cap b)^{\perp} \cup (a \cap b^{\perp})$, gdyż a i b należą do dystrybutywnej podkraty kraty $L(H)$. Dalej ponieważ a jest maksymalny, więc albo $a \cap b = \Lambda$, wtedy $a = a \cap b^{\perp} \leq b^{\perp}$, więc $ab = \Lambda$ i a, b są przemienne ponieważ $ba = \Lambda$, albo $a \cap b = a$, więc $a \leq b$, skąd dalej $ab = ba = a$ (patrz poprzednie rozważania). Załóżmy z kolei, że a i b są przemienne (zatem ab jest operatorem rzutowym). Mamy wówczas $\Lambda \leq ab = a \cap b = a$. Ale a jest maksymalne, zatem istnieją dwie możliwości albo $ab = a$, wówczas $a \leq b$, więc a i b są zgodne na mocy twierdzenia Pirona, albo też $ab = \Lambda$, wówczas $a \leq b^{\perp}$ i wobec twierdzenia Pirona a jest zgodne z $b^{\perp}$. Oznacza to, że podkrata rozpięta przez parę $\{a, b^{\perp}\}$ jest dystrybutywna, to zaś pociąga dystrybutywność podkraty zbudowanej z $\{a, b\}$ identycznej z wyżej wymienioną.

c.b.d.o.

Widzimy więc, że może istnieć selektor i to nawet maksymalny, który nie komutuje ze wszystkimi selektorami. Ma to pierwszorzędne znaczenie dla mechaniki kwantowej. Wyobraźmy sobie bowiem dwa niekomutujące selektory realizowane w H przez P_1, P_2. Ich iloczyn (złożenie selekcji) nie jest więc selekcją. Zatem nie istnieje podprzestrzeń stanów na którą byłyby rzutowane stany np. wiązki cząstek. Nie można więc wyselekcjonować ze względu na kryterium P_1 i P_2 równocześnie. Stanowi to treść zasady nieoznaczoności. Odpowiednie zinterpretowanie materialne P_1 i P_2 nie przedstawia najmniejszej trudności. Widzimy więc już w chwili obecnej, że kwantowość zjawisk związana jest integralnie z niedystrybutywnością kraty $L(H)$. Możemy również rozpatrywać zbiór każdej skończonej ilości selektorów komutujących ze sobą i maksymalnych. Będą one tworzyły podmechanikę klasyczną w obrębie mechaniki kwantowej. Twierdzenie podane wyżej ma szersze zastosowanie. Może być ono zastosowane także w przypadku innej „logiki kwantowej" niż $L(H)$. W przypadku $L(H)$ twierdzenie może być wzmocnione przez odrzucenie założenia o maksymalności a. W całej znanej obecnie mechanice kwntowej pojęcie przemienności zawsze jest związane z pojęciem zgodności. Gdybyśmy uogólnili rozważania na niehilbertowskie mechaniki kwantowe powyższy związek nie musiałby w ogólności zachodzić. Podajmy jeszcze konkretny przykład składania selekcji, szukania elementu maksymalnego i minimalnego selektorów.

Niech P_1 będzie nikolem 1, a P_2 będzie nikolem 2 o płaszczyznach polaryzacji tworzących kąt α. Wtedy $P_1 \cup P_2 = I, P_1 \cap P_2 = 0, P_1 P_2 \neq P_2 P_1$. Abstrahujmy na chwilę od przyjętego formalizmu przestrzeni Hilberta. Gdyby udało się wytworzyć taką wiązkę fotonów, która w całości przechodziłaby przez nikol 1 i nikol 2, to rozważania przeprowadzone w tym rozdziale nie sprawdziłyby się w doświadczeniu. Należałoby poszukać innej logiki L. W tym miejscu jest już jasne, jak potężnym aparatem formalnym w przypadku tworzenia nowych mechanik jest formalizm przedstawiony w tej pracy. W dalszych rozważaniach zwrócimy uwagę, że selekcja maksymalna znaczy to, że dalsze zawężenie jej daje już zero. Przejdźmy wreszcie po tej przydługiej cokolwiek interpretacji do dalszych rozważań formalnych. Znajdziemy teraz realizację obserwabli w przestrzeni Hilberta H. Jak wynika z twierdzenia w rozdziale 1 każdej obserwabli A należącej do O odpowiada w sposób jednoznaczny L-miara μ_A. Jeżeli $L = L(H)$, to widzimy, że μ_A jest rodziną spektralną w H. Spełnia ona bowiem wszystkie postulaty definicji rodziny spektralnej np. [2]. Niech tą rodziną spektralną będzie $\{E_\lambda\}$, λ należących do R. Gdyby zdarzyło się, że istniałoby takie α, że $E_\lambda x = 0$ dla $\lambda < \alpha$ oraz takie β, że $E_\lambda x = x$ dla $\beta < \alpha$. Wtedy biorąc $m = \sup \alpha, M = \inf \beta$, otrzymamy: $Ax = \int\limits_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda x$ i A jest operacją samosprzężoną i ograniczoną. Gdyby to nie zachodziło (A jest nieograniczone) mamy: $\bar{A}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda x$. α i β oznaczają tutaj liczby rzeczywiste. Widzimy więc, że obserwabli A odpowiada operacja samosprzężona w H (ograniczona lub nie). Biorąc $P_n = E_n - E_{n-1}$ widzimy bezpośrednio, że P_n są rzutowe i $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} P_n = I$, oraz $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n$ (suma ortogonalna), $H_n = P_n(H)$. Zatem $Ax = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} AP_n x = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_n x$, A_n — symetryczny. Sprawdzimy, co znaczy zależność $B = f(A)$ w przypadku obserwabli przeniesiona na $L(H)$. Mamy zgodnie z definicją $\mu_{f(A)} = \mu_A \circ f$. Zatem $f(\bar{A}) = \bar{B} = \int f(\lambda) \, dE_\lambda$, zgodnie z interpretacją tego wzoru. Podamy za pracą [11] klasyfikację punktów widma operacji $\bar{A}$ i jej związek z miarą spektralną. Mamy zatem: (λ należy do R)

1. λ regularny punkt A jest równoważne, że λ punkt stałości E_λ
2. λ — wartość własna $\bar{A}$ jest równoważne, że λ — punkt skoku E_λ
3. λ — wartość z widma ciągłego jest równoważne, że λ — punkt ciągłego wzrostu.

Gdy mamy punkt skoku w punkcie λ, to $E_{\lambda-0} f_0 \neq E_\lambda f_0$, f_0 należy do H. Niech $x_0 = (E_\lambda - E_{\lambda-0}) f_0$ dla każdego f_0 należącego do H. x_0 jest elementem własnym operacji $\bar{A}\lambda$, zaś wartością własną, czyli: Kładąc $E_\lambda = \mu_A(\{\lambda\})$ mamy, że $E_\lambda x_0 = x_0$ (operacja rzutowa). Zatem $\mu_A^\lambda \neq \Lambda$, czyli λ należy do $s_p(A)$ zgodnie z definicjami przyjętymi w poprzednich rozdziałach. Widzimy więc, że w tym miejscu pokrywają się definicje widma punktowego obserwabli i operacji symetrycznej. Niech $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\} = s_p(A)$. Znaczy to, że gdy ε należące do $B(R)$ nie zawiera żadnego λ_i, to $p(A, \alpha, \varepsilon) = 0$ dla każdego stanu ze zbioru S. Również mamy $p(A, \alpha, \{\lambda_i\}) \neq 0$ dla pewnego stanu α z S. Obliczymy $p(A, x_0, \{\lambda_i\}) = p_{x_0} \mu_A = (\mu_A^\lambda x_0^i, x_0^i) = (x_0^i, x_0^i) = 1$. Zatem pomiar obserwabli A w stanie x_0^i daje wartość λ_i prawdopodobieństwem 1 i $\|x\| = 1$.

Otrzymaliśmy więc:

1) dowolnemu stanowi α należącemu do S odpowiada x należące do H unormowane do jedności.

2) Dowolnej obserwabli A należącej do O odpowiada operator samosprzężony w H tak, by μ_A było jego rodziną spektralną.

3) Prawdopodobieństwo zmierzenia w stanie własnym operacji A wartości własnej wynosi 1.

Stosując pojęcie wartości oczekiwanej otrzymamy wartość oczekiwaną z pomiaru $\lambda_{ocz} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p(A, \alpha, \lambda_i), \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |l_i|^2 \cdot \alpha$ — stan czysty z wagami l_i. Traktując energię jako element O otrzymamy rozwój funkcji falowej w czasie. Mamy więc wszystkie postulaty mechaniki kwantowej. Wynikły one z postulatu QM. W chwili obecnej istnieje wiele sposobów wprowadzania uogólnień logiki $L(H)$. Najbardziej naturalnym byłoby szukanie $L(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha. J. von Neumann i S. Kakutani udowodnili, że gdy założymy, że $L(X)$ będące kratą wszystkich podprzestrzeni domkniętych przestrzeni Banacha X posiada ortouzupełnienie, to wtedy w X istnieje taka norma równoważna normie wyjściowej, że jest ona generowalna przez pewien iloczyn skalarny. To twierdzenie w wyraźny sposób zawęża poszukiwania.

7. Parametry ukryte, EPR i nierówność Bella

Zanim sformułujemy hipotezy o parametrach ukrytych i przedstawimy pewne fakty świadczące przeciwko nim rozpatrzmy pewne znane doświadczenie. Polega ono na wykazaniu własności falowych elektronów o dostatecznie dużej energii. Jest to dyfrakcja fal elektronowych na krysztale. Otrzymujemy tu klasyczne prążki interferencyjne, a zatem nie możemy stwierdzić, gdzie dany konkretnie elektron uderzy w ekran fluorescencyjny. W chwili obecnej w znakomitej większości cały świat fizyków uważa, że jest to wywołane specyficznymi własnościami mikroświata. Możliwe jest jednak zupełnie inne podejście. Mianowicie stan początkowy elektronu nie został określony w sposób należyty, zabrakło pewnych wielkości, które nazwiemy ukrytymi parametrami. Wielkości te wymknęły się naszym rozważaniom z uwagi na zbyt powierzchowne potraktowanie problemu. Uśrednienie po parametrach ukrytych wywołało własności falowe. Sformułujemy teraz hipotezę o istnieniu parametrów ukrytych posługując się pojęciem selektora. Weźmy dwa selektory a, b należące do L takie, że $ab \neq ba$. Wtedy hipoteza o istnieniu parametrów ukrytych miałaby postać: dla każdych nieprzemiennych selektorów z L istnieje taki selektor niezerowy x, że $x \leq a, x \leq b$. Parametry ukryte pozwoliłyby na dokładniejszą selekcję bez względu na stan początkowy. Można jednak sformułować tę hipotezę mocniej (tak zwana mocna hipoteza o parametrach ukrytych) mianowicie:

dla każdego a, b należącego do L istnieje takie x, y należące do L, że $x \leq b, y \leq b^{\perp}, a = x \cup y$. Jest to równoważne temu, że $a = (a \cap b) \cup (a \cap b^{\perp})$. Znaczy to, że biorąc pod uwagę ukryte zmienne można by po procesie selekcji dokonanym przez a rozdzielić np. wiązki cząstek na taką która przechodzi przez b i na taką, która nie przechodzi. W pracy [34] J. von Neumann podaje swój dowód o nieistnieniu parametrów ukrytych. W [9] podany jest również bardzo podobny wynik. Są one oparte o formalizm przestrzeni Hilberta. Tutaj zajmiemy się tym problemem posługując się pojęciami kratowymi. Jauch i Piron [20] dowodzą, że istnienie parametrów ukrytych prowadzi do dystrybutywności kraty L. Zatem (patrz np. [18]) wynika stąd, że L jest algebrą Boole'a co jest niemożliwe, jak wynika z rozważań z poprzednich rozdziałów. Możemy jednak jeszcze postąpić inaczej traktując L jako podkratę pewnej algebry Boole'a. Wtedy hipoteza o parametrach ukrytych miałaby rację bytu jako, że być może w przyszłości dokonano by postulowanego rozszerzenia. Teraz przejdziemy do głębszej analizy zagadnienia parametrów ukrytych posługując się twierdzeniami dowiedzionymi w poprzednich rozdziałach. Traktujemy teorię parametrów ukrytych jako przyleganie pewnej zmiennej ξ do stanu α systemu mechaniki kwantowej tak, że para (ξ, α) całkowicie definiuje system. To oznacza, że znajomość (ξ, α) pozwala przewidzieć dokładnie wyniki jakiegokolwiek pojedynczego pomiaru, a przeciętna wartość ξ daje zwykły stan kwantowy m. Ten pogląd doprowadził S. Guddera [35] do definicji teorii ukrytych zmiennych jako wmontowanie zespołu wszystkich maksymalnych σ-algebr Boole'a L w przestrzeń prawdopodobieństwa (Ω, F, μ) w taki sposób, że wszystkie statystyczne wartości stanów są zachowane. Dowodzi on [35], że takie wmontowanie jest zawsze możliwe. Jednakże tego typu operacja ogólnie biorąc nie zachowuje wszystkich funkcyjnych związków utrzymujących się między obserwablami. Ponieważ zakres jakiejkolwiek obserwabli może być zawarty w różnych maksymalnych σ-podalgebrach Boole'a to może być ona przedstawiona w różny sposób w zależności, która z maksymalnych obserwabli została obrana, może to zakłócić związek między A i B typu $A = f(B)$ (mogą być np. niezależne).

Kochen i Spoker [36] definiują parametry ukryte cokolwiek inaczej. W tym miejscu powołajmy się na ustęp rozdziału 4 mówiący o logice L dla mechaniki klasycznej. Jest nią algebra Boole'a $B(R^{6n})$. Autorzy ci wmontowują logikę L właśnie w $B(R^{6n})$. Wykazują oni, że takie wmontowanie ogólnie biorąc nie istnieje. Jest to oczywiście zgodne z odpowiednim twierdzeniem rozdziału 4.

Turner [37] formułuje teorię ukrytych parametrów w terminach wmontowania L w $B(R^{6n})$ w taki sposób, aby wszystkie statystyczne wartości były zachowane. Odwołując się do wyników Zierlera i Schlesingera [28] wykazuje, że takie wmontowanie jest możliwe.

Mimo wielu różnic formułowania teorii parametrów ukrytych na gruncie formalizmu logiki kwantowej $L(H)$ widzimy, że sprowadzają się one do zbadania możliwości homomorficznego odwzorowania σ-logiki L w σ-algebrę Boole'a tak, by statystyka albo funkcyjne związki między obserwablami, albo obydwie razem były zachowane.

Na podstawie wyników wymienionych autorów jest jasne, że dla zbiorów wszystkich obserwabli takie wbudowanie nie jest możliwe, wobec tego teoria ukrytej zmiennej przy żądaniu zachowania równocześnie statystyki i funkcyjnego związku między obserwablami jest fałszywa. Gdybyśmy żądali mniej tj. nie brali pod uwagę całej logiki systemu kwantowego L, a jej jakąś podkratę, wtedy w pewnych przypadkach prawdziwa byłaby teoria parametrów ukrytych (odpowiadałoby to tym zjawiskom, które nie zawierają w sobie komplementarności, ani nieoznaczoności, są więc tłumaczone klasycznie). Ten problem jest zbadany w rozdziale 5, gdzie podany został warunek konieczny i dostateczny istnienia takiej operacji i zostały podane zbiory obserwabli spełniające to. Twierdzenia te należą do Mączyńskiego [38]. Istnienie takiego przedstawienia dla zbioru obserwabli może być interpretowane jako teoria ukrytych parametrów dla tego zbioru. W tym sensie prawdziwa jest teoria ukrytych parametrów dla zbioru obserwabli:

a) zgodnych,

b) maksymalnych — M

c) $m \cup \{S\}$, gdzie S jest zasadą superselekcji o przeliczalnym widmie punktowym.

Jest to oczywiście zgodne z wynikami Guddera [35]. Można jednak cokolwiek inaczej sformułować teorię ukrytej zmiennej. Żądać we wmontowaniu nie homomorfizmu a rozszerzenia. Takie rozszerzenie zachowuje tylko częściowy porządek, nie będzie zachowywało zaś ortouzupełnienia i σ-zupełności oraz zmienią się pojęcia elementów maksymalnych i minimalnych. Takie rozszerzenie jest zawsze możliwe, bowiem możliwe jest zanurzenie każdej kraty w kratę dystrybutywną (patrz np. Birkhoff [12]). Jednak istnieją pewne przesłanki natury empirycznej, które pozwalają tę możliwość traktować jako teoretyczną, nie mającą odbicia w przyrodzie. Mianowicie rozpatrzmy przykład z dwoma nikolami P_1 i P_2 (płaszczyzny polaryzacji tworzą kąt α). Fotony przechodzące przez nikol 1 są częściowo pochłaniane przez nikol 2. Gdyby istniały nieznane nam pewne cechy fotonów (parametry ukryte) i gdyby to one właśnie decydowały, który foton przejdzie przez nikol 2, a który zostanie zatrzymany — wtedy ułamek zatrzymanych fotonów powinien być określony nie przez polaryzację wiązki, lecz raczej przez wartości ukrytych zmiennych. Choć zatem wiązka fotonów przechodząca w całości przez oba nikole mogłaby być przypadkiem rzadkim (do tej pory nie wykrytym), to jednak należałoby oczekiwać, że dla różnych wiązek (o tej samej polaryzacji) różne ułamki fotonów będą ulegały pochłonięciu w zależności od rozkładu parametrów ukrytych. Tymczasem tak nie jest, ułamek ten wynosi niezmiennie dla wszystkich wiązek $\cos^2\alpha$ i to potwierdza doświadczenie. Można podać takie przykłady dla wszystkich selektorów nieprzemiennych tj. a, b należące do L i $ab \neq ba$ (ab nie jest operatorem rzutowym w H) [39] oraz [40–45].

Przejdźmy teraz do paradoksu EPR (Einsteina-Podolskiego-Rosena) [46]. Jest on sformułowany jako doświadczenie myślowe (Gedankenexperiment) w sposób następujący.

Niech będzie układ fizyczny o jednym stopniu swobody i spoczywający na osi x. W pewnym momencie układ rozpada się na dwa podukłady poruszające się wzdłuż osi x w przeciwnych kierunkach tak, że suma pędów obu układów jest równa zeru:

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = 0 \quad \text{lub prościej} \quad p_{1x} + p_{2x} = 0$$

Paradoks polega na następującym doświadczeniu myślowym:

Załóżmy, że dokonujemy następującego pomiaru na obu układach niezależnie. Mierzymy położenie układu pierwszego x_1 i pęd drugiego układu p_{2x}. Nierelatywistyczna mechanika kwantowa pozwala nam zmierzyć współrzędną x_1 z nieskończenie wielką dokładnością zaniedbując pomiar pędu p_{1x}. Równocześnie mierzymy z nieskończenie wielką dokładnością pęd drugiego układu p_{2x} zaniedbując całkowicie pomiar współrzędnej x_2. Nierelatywistyczna mechanika kwantowa zezwala na to. Znamy zatem dla podukładu pierwszego współrzędną x_1 (położenie) nieskończenie dokładnie. Z drugiej strony znamy również pęd, bowiem z zasady zachowania pędu otrzymujemy, że

$$-p_{1x} = p_{2x}$$

Zaś p_{2x} jest znane z nieskończenie wielką dokładnością. Znamy zatem z nieskończenie wielką dokładnością zarówno pęd, jak i położenie podukładu pierwszego. Przeczy to zasadzie nieoznaczoności Heisenberga.

Zanim przejdziemy do następnych rozważań, przedstawimy modyfikację EPR podaną przez D. Bohma [47, 48]. W tym wypadku system składa się z dwóch cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ znajdujących się w stanie singletowym Ψ

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_i^+(1) \otimes u_i^-(2) - u_i^-(1) \otimes u_i^+(2)]$$

gdzie $\sigma \overrightarrow{n} u_i^{\pm}(1) = \pm u_i^{\pm}(1)$ tak, że $u_i^{\pm}(1)$ opisuje stan w którym cząstka 1 ma spin do góry lub do dołu wzdłuż kierunku $\overrightarrow{n}$, $u_i^{\pm}(2)$ ma analogiczne znaczenie dla cząstki 2. Bierzemy jednostkę spinu $\hbar/2$. Niech $A_{\overrightarrow{a}}$ będzie rezultatem pomiaru spinu cząstki 1 wzdłuż kierunku $\overrightarrow{a}$, zaś $B_{\overrightarrow{b}}$ dla cząstki 2 wzdłuż kierunku $\overrightarrow{b}$. Mamy zatem $A_{\overrightarrow{a}}, B_{\overrightarrow{b}} = \pm 1$. Iloczyn $A_{\overrightarrow{a}} \cdot B_{\overrightarrow{b}}$ jest obserwablą dla układu dwóch cząstek. Jest ona reprezentowana przez samosprzężony operator w przestrzeni Hilbert. Łatwo jest policzyć wartość oczekiwaną w stanie Ψ. Mamy:

$$[E(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})]_\Psi = \langle \Psi | \sigma_1 \overrightarrow{a} \sigma_2 \overrightarrow{b} | \Psi \rangle = -\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$$

Jeśli $\overrightarrow{a} \| \overrightarrow{b}$ mamy

$$[E(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})]_\Psi = -1 \quad \text{dla wszystkich} \quad \overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}^2 = 1)$$

Zatem możemy przewidzieć z nieskończoną dokładnością wynik pomiaru B znając rezultat pomiaru A.

Doświadczenie myślowe przeprowadzone teraz będzie dotyczyło pomiaru składowej momentu pędu i wielkości do niej kanonicznie sprzężonej podobnie jak poprzednio. Otrzymamy więc paradoks łamiący jakoby relację nieoznaczoności Heisenberga. Wydawałoby się więc, że istnieje dokładniejszy opis stanu układu niż opis kwantowo-mechaniczny. Niech te dodatkowe stopnie swobody (parametry ukryte) będą oznaczone przez $\lambda \in \Lambda$, gdzie Λ jest przestrzenią tych dodatkowych parametrów. Na tej przestrzeni jest określone σ-ciało zbiorów borelowskich i miara μ tak, że

$$\mu(\Lambda) = \int_{\Lambda} d\mu = 1$$

W proponowanej tu teorii obserwabla $(A_{\vec{a}} \cdot B_{\vec{b}})(\lambda)$ ma zdefiniowaną wartość dla każdego $\lambda \in \Lambda$. Bell [49, 50] definiuje dla tej obserwabli warunek lokalności

$$(A_{\vec{a}} \cdot B_{\vec{b}})(\lambda) = A_{\vec{a}}(\lambda) \cdot B_{\vec{b}}(\lambda)$$

Wartość oczekiwana dla tak określonej obserwabli jest zdefiniowana

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\Lambda} A_{\vec{a}}(\lambda) B_{\vec{b}}(\lambda)\, d\mu$$

Korzystając z wprowadzonych tu wielkości łatwo dowodzimy następującej nierówności zwanej nierównością Bella

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c})$$

Nierówność ta przeczy zależności kwantowo-mechanicznej, co łatwo zauważyć biorąc $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ współpłaszczyznowe tak, aby

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$$

W tym wypadku mamy

$$|[E(\vec{a}, \vec{b})]_{\Psi} - [E(\vec{a}, \vec{c})]_{\Psi}| = 1$$

podczas gdy

$$1 + [E(\vec{b}, \vec{c})] = \frac{1}{2}$$

co przeczy nierówności wypisanej wyżej.

Można wyprowadzić bardziej rozbudowane nierówności np.

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a'}, \vec{b})| + E(\vec{a}, \vec{b'}) + E(\vec{a'}, \vec{b'}) \leq 2$$

Doświadczenie potwierdza łamanie nierówności Bella (patrz [51]) co świadczy o tym, że teoria parametrów ukrytych (tzw. deterministycznych) z warunkiem lokalności nie ma racji bytu.

Literatura

1. D. Finkelstein, J. M. Jauch, S. Schiminowich, D. Speiser: „Some Physical Consequences of General Q-covariable" (zeszyt Inst. Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu w Genewie)
2. H. Reichenbach: „Philosophic Foundations of Quantum Mechanics", Los Angeles 1946
3. F. Post: „Introduction to a General Theory of Elementry Propositions", American Journal of Mathematics v. XLIII N. 3 (1921)
4. A. Grzegorczyk: „Zarys logiki matematycznej", B.M. tom 20, PWN, Warszawa 1969
5. N. Traczyk: „Wstęp do teorii algebr Boole'a", B.M. tom 37, PWN, Warszawa 1970
6. R. Sikorskij: „Bulewy algebry", Izdatielstwo Mir, Moskwa 1969
7. G. Birkhoff and J. von Neumann: „The Logic of Quantum Mechanics", Ann. of Math. v. 37 N. 4 (1936)
8. G. Birkhoff and J. von Neumann: Ann. of Math. 37 (1936) 823–843
9. G. Birkhoff: Ann. of Math. 36 (1935) 743–748
10. P. Destouches-Fèvrier: „La structure des thèories physiques", Paris 1951
11. W. Mlak: „Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta", B.M. tom 35, PWN, Warszawa 1970
12. G. Birkhoff: "Lattice Theory", New York 1948
13. K. Maurin: „Analiza. Część I Elementy", B.M. tom 38, PWN, Warszawa 1971
14. K. Maurin: „Metody przestrzeni Hilberta"
15. A. Alexiewicz: „Analiza funkcjonalna", Monografia matematyczna tom 49, PWN, Warszawa 1969
16. L. A. Lusternik i W. I. Sobolew: „Elementy analizy funkcjonalnej", PWN, Warszawa 1959
17. W. Kołodziej: „Wybrane rozdziały analizy matematycznej", B.M. tom 36, PWN, Warszawa 1970
18. G. Birkhoff: „Tieorija struktur", Moskwa 1952
19. M. J. Mączyński: „Probability Measures on an Boole'an Algebra", Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. et Phys. vol. 19 (1971) 849–852
20. D. E. Catlin: Inter. J. Theor. Phys. 3 (1968) p. 285
21. V. Varadarajan: „Geometry of quantum theory", D. Van Nostrand, Princeton New York 1968
22. H. Rasiowa and R. Sikorski: „The mathematics of mathematics", PWN, Warszawa 1963
23. G. Mackey: „Mathematical foundation of quantum mechanics", New York 1963

24. M. J. Mączyński: „A remark on Mackey's axiom for quantum mechanics", Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. et Phys. vol. 15 (1968) str. 583
25 V. Varadarajan: „Generalized probability theory and a theorem on simultaneous observability", Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962) p. 189
26. A. Ramsey: „A theorem on two commuting observables", J. Math. Mech. 15 (1966) p. 227
27. S. Gudder: „Systems of observables in axiomatic quantum mechanics", J. Math. Phys. 8 (1962) p. 2109
28. M. Zierler and M. Schlesinger: Duke Math. J. 32 (1965) p. 251
29. A. M. J. Gleason: of Rational Mech. and Analysis 6 (1967) p. 885
30. Dwinger: Ph. Inadg. Math. 29 (1967) p. 317
31. M. J. Mączyński: „The amalgamation of an a-distributive a-complete Boole'an algebra", Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. et Phys. vol. 17 (1969) 415–418
32. J. M. Jauch and C. Piron: Helv. Phys. Acta 36 (1963) 827–837
33. C. Piron: Helv. Phys. Acta 37 (1964) 439–468
34. Fon Niejman: „Matiematiczeskije osnowy kwantowoj miechaniki", Izdatielstwo „Nauka", Moskwa 1964
35. S. Gudder: „On hidden variable theories", J. Math. Phys. (1970) 431–436
36. S. Kochen and E. Spaker: J. Math. Mech. 17 (1968) p. 59
37. J. Turner: J. Math. Phys. 3 (1968) p. 1411
38. M. J. Mączyński: „On representing observables in axiomatic quantum mechanics", Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. et Phys. vol. 19 (1971) 335–339
39. B. Mielnik: „Filtry i parametry ukryte", Studia filozoficzne (1968) str. 123
40. M. Born i W. Biem: „Dualizm w teorii kwantów", Postępy fizyki zeszyt 2 (1969) str.145
41. A. J. Achijezer i P. W. Połowin: „Poczemu niewozmożno wwiesti w kwantowuju miechaniku skrytyje paramietry", Usp. Fiz. Nuk tom 107, wypusk 3 jul (1972) 463–487
42. A. Lande: „Foundations of quantum theory", Yale Univ. Press, New Haven 1955
43. A. Lande: „New Foundations of Quantum Mechanics", Cambridge Univ. Press, London 1965
44. A. Lande: „Dualism to Unity in Quantum Physics", Cambridge Univ. Press, London 1960
45. A. Lande: „Dualismus Wissenschaft und Hypothese", Heisenberg-festschrift 1965
46. A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen: Phys. Rev. 47 (1935) p. 777
47. D. Bohm: „Quantum Theory", Prentice Hall Englewood Clifs. N. J. (1951) 614–619
48. „History of the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox" in Quantum Mechanics versus Local Realism ed. by Franco Selleri, Plenum Press Publishing Corp. New York 1992
49. J. S. Bell: „On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox", Physics 1 (1964) p. 195

50. J. F. Clauser, A. Shimony: „Bell's theorem: experimental tests and implications", Rep. Prog. Phys. 41 (1978) . 1881

51. A. Aspect, P. Grangier, G. Roger: „Experimental Realisation of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities", Phys. Rev. Lett. 49 (1982) p. 91