Essai sur l'Hypothèse de Riemann

M. MADANI Bouabdallah

Abstract
J.P. Gram writes p.298 of his paper 'Note sur les zéros de la fonction zéta de Riemann' :
'Mais le résultat le plus intéressant qu'ait donné ce calcul consiste en ce qu'il révèle l'irrégularité qui se trouve dans la série des α. Il est très probable que ces racines sont liées intimement aux nombres premiers.
La recherche de cette dépendance, c'est-à-dire la manière dont une α donnée est exprimée au moyen des nombres premiers sera l'objet d'études ultérieures.'
Also the proof of the Riemann hypothesis is based on the definition of an application between the set $\mathcal{P}$ of the prime numbers and the set $\mathcal{S}$ of the zeros of ζ.

Résumé : Comme la fonction ζ de Riemann est en relation étroite avec la distribution des nombres premiers, la démonstration de l'Hypothèse de Riemann repose sur la définition d'une application entre l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers et l'ensemble $\mathcal{S}$ des zéros de ζ.

Hypothèse de Riemann
Les zéros de la fonction ζ de Riemann appartiennent tous à la droite critique x = $\frac{1}{2}$.

Introduction
Soient les ensembles
$\mathcal{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\ldots\}$,
$\mathcal{S} = \{\ s_j : j \in \mathbb{N}^* \text{ et } \zeta(s_j) = 0\} \subset \mathbb{C}$,
$D = \{c_{jk} = (a_{jk}, b_{jk}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : \sqrt{{a_{jk}}^2 + {b_{jk}}^2} = p_j \in \mathcal{P}\}$,
$E = \{z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : {x_k}^2 + {y_k}^2 > 0\}$,

et les fonctions
$f : D \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $(c_{jk}, z_k) \longmapsto (a_{jk} + \mathrm{i}.b_{jk}).(x_k + \mathrm{i}.y_k)$,
$pr1 : D \times E \longrightarrow D$,
$h : D \longrightarrow \mathcal{P}$ surjective, $c_{jk} \longmapsto \sqrt{{a_{jk}}^2 + {b_{jk}}^2} = p_j$,
$g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S},\ p_j \longmapsto s_j$.

Etude
On suppose que l'Hypothèse de Riemann est fausse alors $\exists$ j $\in \mathbb{N}^*$, $\exists\ s'_j \in \mathcal{S}$,
$\exists\ \delta_j$ vérifiant $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$, $\exists\ t_j \in \mathbb{R}_+^*$ et $\exists\ (a_{jm}, b_{jm}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tels que :

- $s'_j = (\frac{1}{2} + \delta_j) + \mathrm{i}.t_j$,
- $\zeta(s'_j) = 0$,
- ${a_{jm}}^2 + {b_{jm}}^2 = p_j^2$.

Mais $\zeta(s_j') = 2^{s_j'}.\pi^{s_j'-1}.\sin(\frac{\pi s_j'}{2}).\Gamma(1-s_j').\zeta(1-s_j')$ avec $1-s_j' = (\frac{1}{2} - \delta_j) - i.t_j$ et en vertu de la conjugaison des zéros alors :

- $\zeta(s_j'') = \zeta((\frac{1}{2} - \delta_j) + i.t_j) = 0$,
- $a_{jn}{}^2 + b_{jn}{}^2 = p_j^2$ avec $(a_{jn}, b_{jn}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ (1)

Nous obtenons alors les systèmes :

$x_m.a_{jm} - y_m.b_{jm} = \frac{1}{2} + \delta_j$, (2)

$x_m.b_{jm} + y_m.a_{jm} = t_j$ (3)

et

$x_n.a_{jn} - y_n.b_{jn} = \frac{1}{2} - \delta_j$ (4)

$x_n.b_{jn} + y_n.a_{jn} = t_j$ (5)

avec $a_{jm} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_m + t_j.y_m}{x_m{}^2 + y_m{}^2}$, $b_{jm} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).y_m + t_j.x_m}{x_m{}^2 + y_m{}^2}$ et

$a_{jn} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n + t_j.y_n}{x_n{}^2 + y_n{}^2}$, $b_{jn} = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).y_n + t_j.x_n}{x_n{}^2 + y_n{}^2}$.

1) Exploitation des données.

De (3) nous tirons $x_m = \frac{t_j - y_m.a_{jm}}{b_{jm}}$ et que nous reportons dans (2) d'où :

$t_j.a_{jm} - y_m.(a_{jm}{}^2 + b_{jm}{}^2) = (\frac{1}{2} + \delta_j).b_{jm}$,

$t_j = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).b_{jm}}{a_{jm}} + y_m.\frac{p_j^2}{a_{jm}} = x_n.b_{jn} + y_n.a_{jn}$. (6)

De (5) nous tirons $x_n = \frac{t_j - y_n.a_{jn}}{b_{jn}}$ et que nous reportons dans (4) d'où :

$t_j = \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).b_{jn}}{a_{jn}} + y_n.\frac{p_j^2}{a_{jn}} = x_m.b_{jm} + y_m.a_{jm}$. (7)

(6) et (7) donnent $\frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).b_{jn}}{a_{jn}} + y_n.\frac{p_j^2}{a_{jn}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).b_{jm}}{a_{jm}} + y_m.\frac{p_j^2}{a_{jm}}$,

puis $\frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).b_{jm}}{a_{jm}} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).b_{jn}}{a_{jn}} = y_n.\frac{p_j^2}{a_{jn}} - y_m.\frac{p_j^2}{a_{jm}}$,

et enfin $p_j^2 = \frac{(a_{jn}\, b_{jm} - a_{jm}\, b_{jn}) + 2.\delta_j.(a_{jn}\, b_{jm} + a_{jm}\, b_{jn})}{2(a_{jm}.y_n - a_{jn}\, y_m).}$ (8)

Comme $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$ alors $0 < 2.\delta_j < 1$ et (8) donne

$\boldsymbol{p_j^2} < \frac{\mathbf{a_{jn}\, b_{jm}}}{\mathbf{(a_{jm}.y_n - a_{jn}.y_m)}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$ (9)

On remplace dans (9) a_{jm}, b_{jm} et a_{jn} par leurs expressions d'où :

$A = \frac{A'}{(x_m{}^2 + y_m{}^2).((x_n{}^2 + y_n{}^2)}$ où

$$A' = \left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n} + t_j.\mathrm{y_n}\right].\left[-\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{y_m} + t_j.\mathrm{x_m}\right]$$
$$A' = t_j^2.\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + t_j.\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{x_m} - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right] - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m}$$

$B = \frac{B'}{(\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2).((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2)}$ où
$$B' = \left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right].(\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) -$$
$$\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} + t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right].(\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2)$$

Comme $\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}$ et $\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}$ alors B' devient :
$$B' = \left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right].\left(\frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}\right) -$$
$$\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} + t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right].\left(\frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}\right)$$
et $\boldsymbol{p_j^2} < \frac{A}{B} = \frac{p_j^2.A'}{B''}$ avec
$$B'' = \left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right].\left(\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 + t_j^2\right) -$$
$$\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} + t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right].\left(\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2 + t_j^2\right).$$
Alors (9) devient ($B'' < A' \Leftrightarrow 0 < A' - B''$).

Le développement de B'' donne :
$$B'' = \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2.\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).t_j^2.\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2.t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}$$
$$-\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2.\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} - \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).t_j^2.\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2.t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n},$$

$$B'' = \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right).\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m}\right] +$$
$$t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}.\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2\right] = -2.\delta_j.t_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n} +$$
$$t_j^2.\left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} - \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m}\right].$$

Alors $A' - B'' = t_j^2.\left[-\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} + \mathrm{x_m}.\mathrm{y_n}\right] +$
$$+ t_j.\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{x_m} - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n} + 2.\delta_j.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}\right]$$
$$-\left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right).\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} + \mathrm{x_n}.\mathrm{y_m}\right]$$

$$A' - B'' = \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).t_j^2.(\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + \mathrm{x_n}.\mathrm{y_m}) + t_j.\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).(\mathrm{x_m}.\mathrm{x_n} - \mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}) -$$
$$\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right).(\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} - \mathrm{x_n}.\mathrm{y_m}).$$
(9) donne alors :
$$\boldsymbol{0 < t_j^2.(\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + \mathrm{x_n}.\mathrm{y_m}) + t_j.(\mathrm{x_m}.\mathrm{x_n} - \mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}) - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right).(\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} - \mathrm{x_n}.\mathrm{y_m})} \quad (10).$$

L'étude de cette inégalité amène à envisager 2 cas :

a) $x_m.y_n + x_n.y_m = 0$,
b) $x_m.y_n + x_n.y_m \neq 0$.

a) $x_m.y_n + x_n.y_m = 0 \Leftrightarrow x_m.y_n = -x_n.y_m$ et

(10) $\Rightarrow$ $\mathbf{0 < t_j.(x_m.x_n - y_m.y_n) - \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right).2.x_m.y_n.}$

Et $x_m.y_n + x_n.y_m = 0 \Rightarrow \mathbf{x_m.x_n - y_m.y_n = -\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2})}$

Il faut distinguer ici 3 éventualités :

α) $-\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) > 0$,
β) $-\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) < 0$,
γ) $-\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) = 0$.

α) $-\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) > 0 \Leftrightarrow x_m.x_n > y_m.y_n$, il implique :
y_m et y_n de signes contraires donc $y_m.y_n < 0$ et 2 possibilités
$*$ $y_m > 0$ et $y_n < 0$
$x_m.(x_n.y_m) = -x_m^{\,2}.y_n > y_m^{\,2}.y_n \Leftrightarrow 0 > y_n.(x_m^{\,2} + y_m^{\,2}) \Rightarrow (x_m^{\,2} + y_m^{\,2}) > 0$

$*$ $y_n > 0$ et $y_m < 0$
$(x_m.y_n).x_n = -x_n^{\,2}.y_m > y_n^{\,2}.y_m \Leftrightarrow 0 > y_m.(x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) \Rightarrow (x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) > 0$

β) $-\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) < 0 \Leftrightarrow x_m.x_n < y_m.y_n$, il implique
y_m et y_n de même signe donc $y_m.y_n > 0$ et 2 possibilités :
$*$ $y_m < 0$ et $y_n < 0$
$(x_m.y_n).x_n = -x_n^{\,2}.y_m > y_n^{\,2}.y_m \Leftrightarrow 0 > y_m.(x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) \Rightarrow (x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) > 0$
$x_m.(x_n.y_m) = -x_m^{\,2}.y_n > y_m^{\,2}.y_n \Leftrightarrow 0 > y_n.(x_m^{\,2} + y_m^{\,2}) \Rightarrow (x_m^{\,2} + y_m^{\,2}) > 0$

$*$ $y_m > 0$ et $y_n > 0$
$(x_m.y_n).x_n = -x_n^{\,2}.y_m < y_n^{\,2}.y_m \Leftrightarrow 0 < y_m.(x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) \Rightarrow (x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) > 0$
$x_m.(x_n.y_m) = -x_m^{\,2}.y_n < y_m^{\,2}.y_n \Leftrightarrow 0 < y_n.(x_m^{\,2} + y_m^{\,2}) \Rightarrow (x_m^{\,2} + y_m^{\,2}) > 0$

La contraposée des éventualités α) et β) impliquent que $-\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) = 0$.

γ) $-\frac{y_m}{y_n}.((x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) = 0$ induit :
$y_m = 0$ car $(x_n^{\,2} + y_n^{\,2}) \neq 0$,
$-x_n.y_m = x_m.y_n = 0$ d'où $y_n = 0$ car $(x_m^{\,2} + y_m^{\,2}) \neq 0$,
$x_m.x_n - 0 = \frac{0}{0}$,ce qui est impossible.

$\mathbf{x_m.y_n + x_n.y_m = 0 \Rightarrow x_m.x_n = \frac{0}{0}.}$

<u>Lemme 1</u> : $\mathbf{x_m.y_n + x_n.y_m \neq 0.}$

b) $x_m.y_n + x_n.y_m \neq 0$ et
$0 < t_j^2.(x_m.y_n + x_n.y_m) + t_j.(x_m.x_n - y_m.y_n) - \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right).(x_m.y_n - x_n.y_m)$.

$\boldsymbol{\Delta} = (\mathbf{x_m}.\mathbf{x_n} - \mathbf{y_m}.\mathbf{y_n})^2 + \left(\mathbf{1} - \mathbf{4}.\boldsymbol{\delta_j}^2\right).[(\mathbf{x_m}.\mathbf{y_n})^2 - (\mathbf{x_n}.\mathbf{y_m})^2]$.

2 cas possibles :

- $x_m.y_n + x_n.y_m < 0$
- $x_m.y_n + x_n.y_m > 0$.

- $x_m.y_n + x_n.y_m < 0$ implique :

a) $t_j.(y_m.y_n - x_m.x_n) + \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right).(x_m.y_n - x_n.y_m) < t_j^2.(x_m.y_n + x_n.y_m) < 0$

b) $x_m.y_n + x_n.y_m < 0$ (11)

c) $(y_m.y_n - x_m.x_n) < 0$ (12)

d) $(x_m.y_n - x_n.y_m) < 0$ (13)

(11) et (12) $\Rightarrow$ $y_n.(x_m + y_m) < x_n.(x_m - y_m)$

(12) et (13) $\Rightarrow$ $y_n.(x_m + y_m) < x_n.(x_m + y_m)$.

Il y a 2 possibilités :

$x_n.(x_m - y_m) < x_n.(x_m + y_m) \Rightarrow 0 < x_n.y_m$ (14)

ou

$x_n.(x_m + y_m) < x_n.(x_m - y_m) \Rightarrow x_n.y_m < 0$ (15)

(11) et (14) : $\mathbf{0} < \mathbf{x_n}.\mathbf{y_m} \Rightarrow \mathbf{x_m}.\mathbf{y_n} < \mathbf{0}$

(15) : $x_n.y_m < 0$ et supposons que $x_m.y_n > 0$ alors

(13) donne $0 < x_m.y_n < x_n.y_m < 0$ contradiction.

Donc $\mathbf{x_n}.\mathbf{y_m} < \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x_m}.\mathbf{y_n} < \mathbf{0}$.

(14) et (15) induisent donc $\mathbf{x_m}.\mathbf{y_n} < \mathbf{0}$ et la contraposée conduit à $\mathbf{x_n}.\mathbf{y_m} = \mathbf{0}$.

Or $x_n.y_m = \frac{(\mathbf{t_j} - \mathbf{y_n}.\mathbf{a_{jn}}).(\mathbf{t_j} - \mathbf{x_m}.\mathbf{b_{jm}})}{\mathbf{a_{jm}}.\mathbf{b_{jn}}}$

Et donc $\left(t_j - y_n.a_{jn}\right).(t_j - x_m.b_{jm}) = 0$

On pose $t_{j1} = x_m.b_{jm}$ et $t_{j2} = y_n.a_{jn}$

Mais $\boldsymbol{t_{j1}} = \mathbf{x_m}.\mathbf{b_{jm}} \Rightarrow (y_m = 0$ et $0 < x_m.x_n)$

et $\boldsymbol{t_{j2}} = \mathbf{y_n}.\mathbf{a_{jn}} \Rightarrow (x_n = 0$ et $y_m.y_n < 0)$

par identification respectivement de (3) et (5).

En remplaçant $y_m = 0$ dans (10) on obtient :

$-x_m.y_n.\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right)\right] < t_j.x_m.x_n$ avec $x_m.y_n < 0$ et $0 < x_m.x_n$

et comme $\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right)\right] < t_j^2$, il faut envisager 2 possibilités :

$*$ $-x_m.y_n.t_j^2 < t_j.x_m.y_n \Leftrightarrow -x_m.y_n.t_j < x_m.x_n$ (16)

$*$ $t_j.x_m.x_n < -x_m.y_n.t_j^2 \Leftrightarrow x_m.x_n < -x_m.y_n.t_j$ (17)

(16) : $0 < x_m.(x_n + y_n.t_j)$ implique :

a) $x_m > 0$ et $(x_n + y_n.t_j) > 0 \Rightarrow (y_n < 0, x_n > 0$ et $x_n + y_n.t_j > 0)$

$\Rightarrow x_n > -y_n.t_j \Rightarrow \frac{x_n}{-y_n} > t_j$.

b) $x_m < 0$ et $(x_n + y_n.t_j) < 0 \Rightarrow (y_n > 0, x_n < 0$ et $x_n + y_n.t_j < 0)$

$\Rightarrow x_n < -y_n.t_j \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} < -t_j \Rightarrow t_j < -\frac{x_n}{y_n}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j} < -\frac{\mathbf{x_n}}{\mathbf{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{x_m} = \mathbf{0}$

d'où $\boldsymbol{t_{j1}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{0} < \mathbf{0}.\mathbf{x_n}$, ce qui est impossible.

(17) : $x_m.(x_n + y_n.t_j) < 0$ implique :

a) $x_m > 0$ et $(x_n + y_n.t_j) < 0 \implies (y_n < 0$ et $x_n < -y_n.t_j > 0) \Rightarrow t_j > -\frac{x_n}{y_n}$

b) $x_m < 0$ et $(x_n + y_n.t_j) > 0 \implies (y_n > 0$ et $x_n > -\ y_n.t_j < 0) \Rightarrow t_j > -\frac{x_n}{y_n}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j > -\frac{x_n}{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{x_m = 0}$ d'où $\boldsymbol{t_{j1} = 0}$ et $\mathbf{0 < 0.x_n}$, ce qui est impossible.

En remplaçant $x_n = 0$ dans (10) on obtient :

. $y_m.y_n.t_j < x_m.y_n.\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right)\right]$ avec $x_m.y_n < 0$ et $y_m.y_n < 0$

et comme $\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right)\right] < t_j^2$, il faut envisager 2 possibilités :

$*$ $x_m.y_n.t_j^2 < t_j.y_m.y_n \iff x_m.y_n.t_j < y_m.y_n$ (18)

$*$ $t_j.y_m.y_n < x_m.y_n.t_j^2 \iff y_m.y_n < x_m.y_n.t_j$ (19)

(18) : $y_n.(x_m - y_m.t_j) < 0$ implique :

a) $y_n > 0$ et $(x_m.t_j - y_m) < 0 \implies (x_m < 0$ et $x_m.t_j - y_m < 0)$

$\implies -y_m < -x_m.t_j \implies \frac{-y_m}{x_m} < -t_j \iff t_j > \frac{y_m}{x_m}$

b) $y_n < 0$ et $(x_m.t_j - y_m) > 0 \implies (x_m > 0$ et $x_m.t_j - y_m > 0)$

$\Rightarrow x_m.t_j > y_m \Rightarrow t_j > \frac{y_m}{x_m}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j > \frac{x_n}{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{y_n = 0}$ d'où $\boldsymbol{t_{j2} =\ 0}$ et $\mathbf{y_m.0 < 0}$, ce qui est impossible.

(19) : $0 < y_n.(x_m - y_m.t_j)$ implique :

a) $y_n > 0$ et $(x_m.t_j - y_m) > 0 \implies (x_m < 0$ et $x_m.t_j - y_m > 0)$

$\implies x_m.t_j > y_m \implies t_j < \frac{y_m}{x_m}$

b) $y_n < 0$ et $(x_m.t_j - y_m) < 0 \implies (x_m > 0$ et $x_m.t_j - y_m < 0)$

$\Rightarrow t_j < \frac{y_m}{x_m}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j < \frac{x_n}{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{y_n = 0}$ d'où $\boldsymbol{t_{j2} = 0}$ et $\mathbf{y_m.0 < 0}$, ce qui est impossible.

Lemme 2 : $x_m.y_n + x_n.y_m < 0$ est impossible.

- $x_m.y_n + x_n.y_m > 0$.

$\boldsymbol{\Delta = (x_m.x_n - y_m.y_n)^2 + \left(1 - 4.\delta_j{}^2\right).[(x_m.y_n)^2 - (x_n.y_m)^2] \geq 0}$ car $t_j \in \mathbb{R}_+^*$.

α) $\Delta = 0 \implies t_j = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n)}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$.

On a donc $(x_m.x_n - y_m.y_n) \neq 0$ et $(x_m.y_n)^2 - (x_n.y_m)^2 < 0$ qui induisent $x_m.y_n + x_n.y_m > 0$ et $x_m.y_n - x_n.y_m < 0 \Rightarrow (x_m.x_n - y_m.y_n) < 0$.

Comme $t_j = x_m.b_{jm} + y_m.a_{jm} = x_n.b_{jn} + y_n.a_{jn}$ et que $t_j = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n)}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$ l'identification conduit à :

$a_{jm} = \frac{y_n}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_n}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$ et

$a_{jn} = \frac{y_m}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_m}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$.

Or $a_{jm}{}^2 + b_{jm}{}^2 = a_{jn}{}^2 + b_{jn}{}^2 = p_j^2$ et donc
$p_j^2 = \frac{x_n{}^2 + y_n{}^2}{4..(x_m.y_n + x_n.y_m)^2} = \frac{x_m{}^2 + y_m{}^2}{4..(x_m.y_n + x_n.y_m)^2}$ ce qui entraine que
$x_n{}^2 + y_n{}^2 = x_m{}^2 + y_m{}^2$ qui n'est vrai que si $\delta_j = 0$.

Il s'ensuit que $\Delta \neq 0$.

β) $\Delta > 0 \implies t_j = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n) \pm \sqrt{\Delta}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$
$t_{j1} = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n) + \sqrt{\Delta}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$ et $t_{j2} = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n) - \sqrt{\Delta}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$,
$(x_m.x_n - y_m.y_n) < 0$,
$\sqrt{\Delta} < -(x_m.x_n - y_m.y_n)$.

Comme $t_j = x_m.b_{jm} + y_m.a_{jm} = x_n.b_{jn} + y_n.a_{jn}$ alors pour t_{j1}, on obtient
$a_{jm} = \frac{y_n}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_n - \frac{\sqrt{\Delta}}{x_{jm}}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$ et

$a_{jn} = \frac{y_m}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_m - \frac{\sqrt{\Delta}}{x_{jn}}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$
et sachant que $a_{jm}{}^2 + b_{jm}{}^2 = a_{jn}{}^2 + b_{jn}{}^2 = p_j^2$ alors $(\frac{x_n^2 - x_m^2}{x_m.x_n}).(\frac{\Delta}{x_m.x_n} - 2.\sqrt{\Delta}) = 2.\frac{\delta_j}{p_j^2}$.
Le même traitement pour t_{j2} conduit à $(\frac{x_{jn}^2 - x_{jm}^2}{x_{jm}.x_{jn}}).(\frac{\Delta}{x_{jm}.x_{jn}} + 2.\sqrt{\Delta}) = 2.\frac{\delta_j}{p_j^2}$ induisant
$\frac{\Delta}{x_m.x_n} + 2.\sqrt{\Delta} = \frac{\Delta}{x_m.x_n} - 2.\sqrt{\Delta} \iff \sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta} \implies \Delta = 0 \implies \delta_j = 0$ en contradiction avec l'hypothèse $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$.
Ce résultat découle de $p_j^2 < \frac{a_{jn}\, b_{jm}}{(a_{jm}.y_n - a_{jn}\, y_m)}$ venant lui-même de l'application de l'hypothèse $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$.

<u>Lemme 3</u> : $\delta_j = 0$.

<u>Conclusion</u>.

L'exploitation des données conduit dans les 3 cas étudiés résultants de l'inégalité
$\boldsymbol{p_j^2 < \frac{a_{jn}\, b_{jm}}{(a_{jm}.y_n - a_{jn}\, y_m)}}$ à des contradictions avec les hypothèses de l'étude.
Le lemme 3 entraine alors

- $s_j' = s_j'' = \frac{1}{2} + i.t_j$,
- l'application $g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}, p_j \longmapsto s_j = \frac{1}{2} + i.t_j$ est bijective.

<u>Théorème</u> : L'Hypothèse de Riemann est vérifiée.

madanibouabdallah@hotmail.fr.