О некоторых вариантах решений «пифагоровых» и других

более высокого порядка уравнений

(элементарный аспект)

Reuven Tint

Number Theorist, Israel

Email: reuven.tint@gmail.com

www.ferm-tint.blogspot.co.il

Аннотация. Приведены в гл.1 теорема и ее доказательство,дополняющая классическую формулировку ABC-гипотезы,и в гл.2 рассмотрен вопрос о связи эллиптической кривой Фрея с ВТФ.

Глава 1

Теорема. «При данном ε =1 и постоянной K(ε)=1,при которой для любых трех взаимно простых натуральных чисел a,b,c, таких,что $a^2+b^2=c^2$, могут выполняться в бесконечном количестве случаев для соответствующих a= m^2-n^2,b=2mn,c= m^2+n^2 неравенства:
c<rad(abc)$^{1+1}$ и c >rad(abc))$^{1+1}$». (1)

(Классическая формулировка:
«Для каждого ε >0 существует константа K(ε)>0, при которой для любых трех взаимно простых целых чисел a,b,c,таких, что a+b=c, выполняется неравенство max(|a| , |b |,| c|)≤ K(ε).rad(abc)$^{1+ε}$ »).

Доказательство

§1

1.1. Получены, например, следующие равенства для:

1) c^2 >K(1).rad(abc)$^{1+1}$

m=4 n=3 $7^2+24^2=5^4$ $5^4=625$ >K(1).rad(7 .24 . 25)$^{1+1}$=rad(2.3.5.7)=210

m=5 n=4 $9^2+40^2=41^2=1681>rad(2.3.5.41)=1230$

m=8 n=1 $63^2+16^2=65^2=4225>rad(2.3.5.7.13)=2730$

m=11 n=2 $117^2+44^2=125^2$ =15625$>rad(2.3.5.11.13)=4290$

m=19 n=8 297^2+304^2 =$425^2=180625>rad\,(2.3.5.11.17.19)=106590$

m=24 n=7 $527^2 + 336^2 = 5^8 = 625^2 = 390625 > rad(2.3.5.7.17.31) = 110670$

2)c^2 <K(1).rad(abc)$^{1+1}$

m=2   n=1 $3^2 + 4^2 = 5^2 < rad(2.3.5) = 30$

m=3   n=2 $5^2 + 12^2 = 13^2 = 169 < rad(2.3.5.13) = 390$

m=4   n=1 $15^2 + 8^2 = 17^2 = 289 < rad(2.3.5.17) = 510$

m=5   n=2 $21^2 + 20^2$ =$29^2 = 841 < rad(2.3.5.7.29) = 6090$

m=6   n=1 $35^2 + 12^2 = 37^2 = 1369 < rad(2.3.5.7.37) = 7770$

m=7   n=2 $45^2 + 28^2 = 53^2 = 2809 < rad(2.3.5.7.53) = 11130$

1.2. **Утверждение.** «Произвольное пифагорово» уравнение $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$, где $a_1 = m_1^2 - n_1^2$, $b_1 = 2m_1 n_1$, $c_1 = m_1^2 + n_1^2$, $(a_1, b_1, c_1) =$ 1 - взаимно простые), является источником получения «исключительных» троек, таких , что $c_\propto^2 = c_1^{2^\propto} > rad(a_\propto b_\propto c_\propto)2$ в уравнении $a_\propto^2 + b_\propto^2 = c_1^{2^\propto}$ ($\propto = 1,2,3,\ldots$)**,** начиная с некоторого «$\propto$», только если $m_\propto = a_{\propto-1}$, $n_\propto = b_{\propto-1}$, и так рекуррентно до бесконечности».

Доказательство. 1) Всегда на каком-то этапе бесконечного ряда $2^1, 2^2, 2^3, \ldots \ldots 2^\propto$, ... найдется "$\propto$"такое, что $2^\propto > c_1$, поскольку в $b_\propto$ остается при любом "$\propto$" постоянным множитель $2^\propto.(m_1^2 - n_1^2)\, m_1 n_1$ (m_1, n_1- произвольные взаимно простые целые положительные числа).
Очевидно, $c_1^{2^{\propto-1}} > a_\propto$ и $c_1^{2^{\propto-1}} > b_\propto$. Отсюда,$c_\propto^2 = c_1^{2^\propto} > rad(a_\propto b_\propto c_1)$.

2) Число «пифагоровых» чисел бесконечно.

3) Тем самым полностью доказана теорема (1).

Примеры. m_1=2 $n_1 = 1$ $3^2 + 4^2 = 5^2 < rad(3.2.5) = 30$

$m_2 = 3$ $n_2 = 4$ $7^2 + 24^2 = 5^4 > rad(7.2.3.5) = 210$, и т. д.

1.3. Используя принцип,изложенный в «Утверждении»,применим его к произвольным разрешимым в натуральных числах трехчленным уравнениям для получения бесчисленного множества «исключительных» троек,приведя их к «пифагорову» виду.

Например, $13^2 + 7^3 = 2^9$ $rad(13.7.2) = 182 < 512$,   m=7   n=13
a=$7^3 - 13^2$=174 , b=$2.7^{\frac{3}{2}}$.13=$26.7^{\frac{3}{2}}$, c = $7^3 + 13^2 = 2^9$ $174^2 + 26^2.7^3 = 2^{18}$
$87^2 + 13^2.7^3 = 2^{16}$ rad(29.3.2.13.7)=15834<65536 ,и т.д. и т.п.

Глава 2

К вопросу о связи эллиптической кривой Фрея

с «Великой» теоремой Ферма

(элементарный аспект)

Предисловие. Интерес к названной в заглавии проблеме вызван следующими соображениями:
1) Возьмем, к примеру, «пифагорово» уравнение, все взаимно простые решения которого определяются формулами A= a^2- b^2 и B=2ab. Но если мы выберем A≠ a^2- b^2 и B≠2ab как гипотетически «верные» решения этого уравнения, то, наверное, можно будет доказать, что, в этом случае, «пифагорово» уравнение не существует. Но оно действительно не существует для гипотетически выбранных «верных» решений.
2) Уравнение $A^N + B^N = C^N$ и уравнение эллиптической кривой Фрея (как будет показано ниже для предложенного варианта их решения) не совместны.
3) Поэтому, как представляется, выглядит не совсем убедительной связь между уравнением эллиптической кривой Фрея и соответствующим уравнением Ферма.

§1

Рассмотрим следующие уравнения:
1) $A^N + B^N = C^N$ (2), где A^N, B^N - гипотетически «верные» решения уравнения (2) в натуральных числах (A,B)=1,N, соответствующие общему уравнению x^N+ y^N= z^N (1).
2) y^2 + (x- A^N)(x+ B^N) = y^2+ $x^2 - (A^N - B^N)$x - $A^N.B^N$=0 (3). Отсюда, предложенный вариант решения уравнения (3) получается при $A^N > B^N$, x= $A^N - B^N$, y^2= $A^N.B^N$,т.е. при N=2k - четном (возможный вариант предположения) и y= $|A^k B^k|$. Если(3) – эллиптическая Фрея, то она существует.
3) y^2= $x^3 - (A^N - B^N)\,x^2$+ $A^N B^N$ (4). Если (4) - эллиптическая кривая Фрея,то она существует при x= $A^N - B^N$,y= $A^k B^k$ и N=2k – четном. Уравнения (4) и (3) совместны.
4) y^2= x^3+ $(A^N - B^N)\,x^2$_ $A^N B^N$ (5). Очевидно,что (5) и (3),(4) не совместны,а все они не совместны с (1).
5) Пусть a= x^3, b=($A^N - B^N)x^2 - A^N B^N$. Тогда, $a^2 + b^2$ ±2ab= $(a \pm b)^2$=
={ x^3±[($A^N - B^N)x^2$ - $A^N.B^N$] }^{2} (6). Уравнения (4) и (5) связаны между собой элементами «пифагорова» уравнения при произвольных натуральных значениях входящих в них параметров.
6) Связь всех этих уравнений с уравнением (1) представляется не совсем убедительной.

§2

Получено тождество: $[x(x^3 \pm 2y^3)]^3 \mp [y(2x^3 \pm y^3)]^3 \equiv (x^3 \pm y^3)(x^3 \mp y^3)^3$ (7).
Если принять в уравнении $a^n + b^n = c^n$ *для* n=3 $x^3 + y^3 = z^3$ (8), то из (7) получим рекуррентное уравнение, дающее бесчисленное множество гипотетически «верных» решений (такого не может быть, так как тождество остается верным для всех $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$), чего уравнение (8) решений в натуральных числах для n= 3 иметь, как известно, не может. Выходит, что существует уравнение, которое как бы, с одной стороны, при гипотетически «верных» решенниях существовать не может, с другой стороны, при тех же «х» и «у» существует. Следует отметить, что уравнения (7) и (8) совместны.

- Поскольку решение уравнения (8) находится среди натуральных $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$. то проверка правильности решения будет занимать больше времени, чем само решенние. Напоминает проблему Кука-Левина - одна из проблем тысячелетия.

Вообще, тождество (7) - тождество с несколькими интересными свойствами. [1]

Литература.
[1]R.Тинт,”The identities of ordinary which is leading to the extraordinary consequences” (elementary aspect), p.2.6,pp 8/15-12/15. Asian Gournal of mathematics and applications 2013,IDama0031,ISSN 2307-7743 http://scienceasia.asia.

Глава 3

Вышеизложенное в двух главах говорит о том,что некоторые устоявшиеся представления в теории чисел требуют,на наш взгляд,более внимательного рассмотрения и в каких-то случаях корректировки.