Fixed point method , Number pi , Fractals

Edgar Valdebenito

December 2 , 2016

Abstract

In this note we present: Real solutions of the polynomial equations: $x^5 + x^4 + x - 1 = 0$, $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$, via fixed point method., Relations for pi number , Fractal connection.

Keywords: Fixed point method , Polynomial equations , Number pi , Fractals.

1. Introducción. El método del punto fijo.

El método del punto fijo resuelve la ecuación :

$$x = F(x) \tag{1}$$

por la recurrencia

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{2}$$

y converge a una raíz si

$$|F'(x)| < 1 , \ x \in I \tag{3}$$

donde I es un intervalo centrado en $x = r$, y r es la raíz exacta. El valor inicial x_1 debe ser tal que :

$$x_1 \in I \tag{4}$$

El error $e_n = r - x_n$, tiene la propiedad :

$$e_{n+1} \sim F'(r)\, e_n \tag{5}$$

Si $F'(r)$ es cercano a 1 la convergencia es lenta.

2. La ecuación: $x^5 + x^4 + x - 1 = 0$

La ecuación $x^5 + x^4 + x - 1 = 0$ tiene una raíz real : $\alpha = 0.6679607074$ ...

Poniendo $x = 1 - z$, se tiene :

$$z^5 - 6z^4 + 14z^3 - 16z^2 + 10z - 2 = 0 \tag{6}$$

de (6) se tiene :

$$z = \frac{2 + 16z^2 - 14z^3 + 6z^4 - z^5}{10} = \mathrm{F1}(z) \tag{7}$$

$$z = \frac{2}{10 - 16z + 14z^2 - 6z^3 + z^4} = \mathrm{F2}(z) \tag{8}$$

Son válidas las siguientes afirmaciones :

$$z_{n+1} = \mathrm{F1}(z_n),\ z_1 = 0 \Longrightarrow z_n \longrightarrow 1 - \alpha \tag{9}$$

$$z_{n+1} = \mathrm{F2}(z_n),\ z_1 = 0 \Longrightarrow z_n \longrightarrow 1 - \alpha \tag{10}$$

3. La ecuación: $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$

La ecuación : $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ tiene una raíz real : $\beta = 0.6997370221$ ...

Poniendo $x = 1 - z$, se tiene :

$$z^5 - 5z^4 + 11z^3 - 14z^2 + 10z - 2 = 0 \tag{11}$$

de (11) se tiene :

$$z = \frac{2 + 14z^2 - 11z^3 + 5z^4 - z^5}{10} = \mathrm{F3}(z) \tag{12}$$

$$z = \frac{2}{10 - 14z + 11z^2 - 5z^3 + z^4} = \mathrm{F4}(z) \tag{13}$$

Son válidas las siguientes afirmaciones :

$$z_{n+1} = \mathrm{F3}(z_n),\ z_1 = 0 \Longrightarrow z_n \longrightarrow 1 - \beta \tag{14}$$

$$z_{n+1} = \mathrm{F4}(z_n),\ z_1 = 0 \Longrightarrow z_n \longrightarrow 1 - \beta \tag{15}$$

4. El Número pi: π=3.141592...

Las siguientes fórmulas son válidas :

$$\pi = 4\tan^{-1}(\alpha) + 4\tan^{-1}(\alpha^4) \tag{16}$$

$$\pi = 4\tan^{-1}(\beta^2) + 4\tan^{-1}(\beta^3) \tag{17}$$

5. El polinomio p(x)

Sea $p(x)$ definido como :

$$p(x) = (x^5 + x^4 + x - 1)(x^5 + x^3 + x^2 - 1) \tag{18}$$

Poniendo $x = 1 - z$, se tiene :

$$p(z) = 4 - 40\,z + 160\,z^2 - 350\,z^3 + 496\,z^4 - 486\,z^5 + 338\,z^6 - 166\,z^7 + 55\,z^8 - 11\,z^9 + z^{10} \tag{19}$$

Poniendo $p(z) = 0$, podemos escribir :

$$z = \mathrm{F5}(z) \tag{20}$$

$$z = \mathrm{F6}(z) \tag{21}$$

donde

$$\mathrm{F5}(z) = \frac{4 + 160\,z^2 - 350\,z^3 + 496\,z^4 - 486\,z^5 + 338\,z^6 - 166\,z^7 + 55\,z^8 - 11\,z^9 + z^{10}}{40} \tag{22}$$

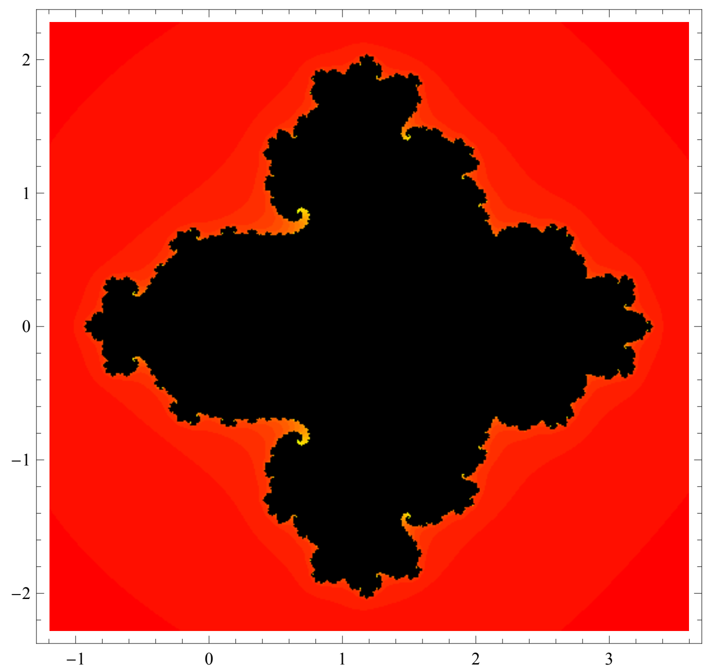
$$\mathrm{F6}(z) = \frac{4}{40 - 160\,z + 350\,z^2 - 496\,z^3 + 486\,z^4 - 338\,z^5 + 166\,z^6 - 55\,z^7 + 11\,z^8 - z^9} \tag{23}$$

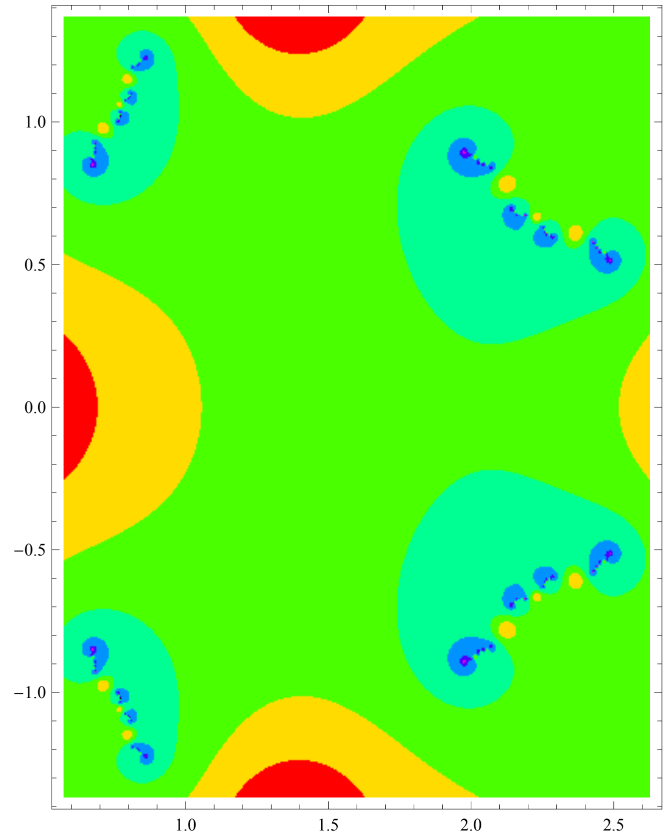
Son válidas las siguientes afirmaciones :

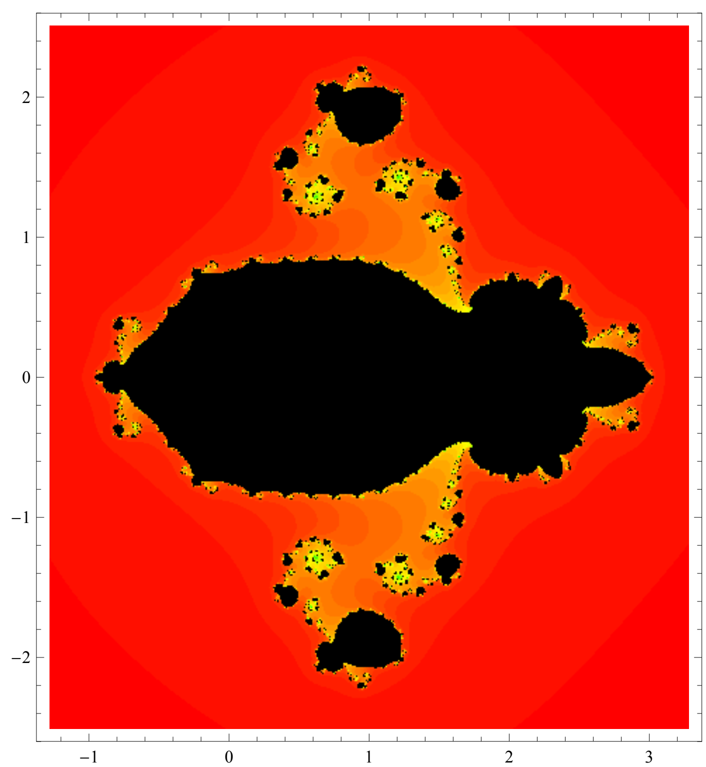
$$z_{n+1} = \mathrm{F5}(z_n)\,,\;\; z_1 = 0 \Longrightarrow z_n \longrightarrow 1 - \beta \tag{24}$$

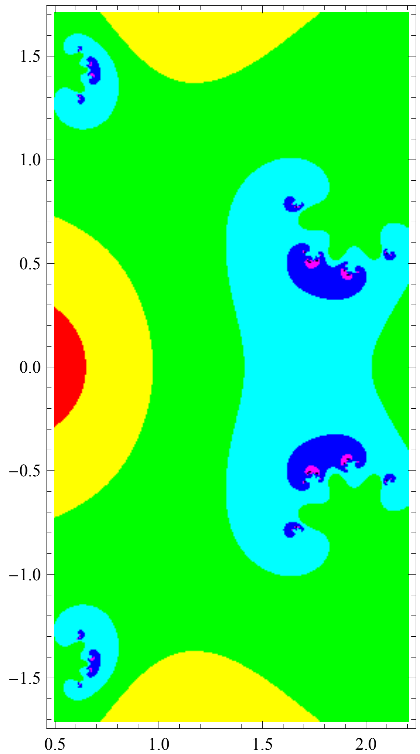
$$z_{n+1} = \mathrm{F6}(z_n)\,,\;\; z_1 = 0 \Longrightarrow z_n \longrightarrow 1 - \beta \tag{25}$$

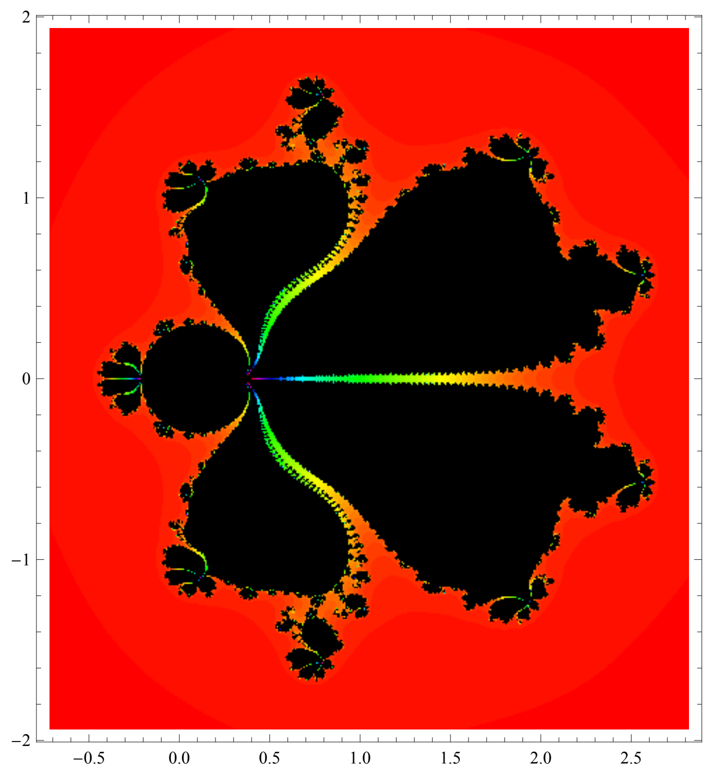
6. Fractales relacionados

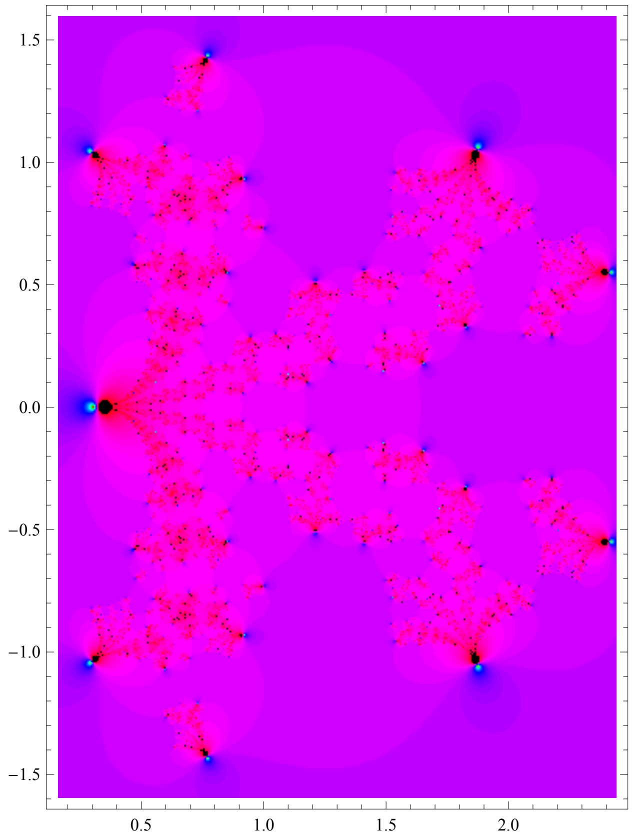



1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
1.0
1.5
2.0
2.5


2
1
0
−1
−2
−1
0
1
2
3


1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0.5
1.0
1.5
2.0


2
1
0
−1
−2
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5



Referencias

A. Valdebenito , E. : The quintic $z^5 + z^4 + z - 1 = 0$, and the pi number , unpublished note , 2016.

B. Valdebenito , E. : The quintic $z^5 + z^3 + z^2 - 1 = 0$, and the pi number , unpublished note , 2016.