Symmetric and asymmetric tensors of the electromagnetic field

Yurii A. Spirichev

It is shown that the canonical antisymmetric tensor of the electromagnetic field can be associated with symmetric and asymmetric tensors, which are derived from decomposition of the antisymmetric tensor of general form into its elements: symmetric and antisymmetric parts. These tensors contain additional information about the electromagnetic field. d'Alembert wave equations for electromagnetic potential and derivatives of Lorenz gauge condition follow from antisymmetric tensor and Navier-Stokes dynamic equation for the electromagnetic potential follow from symmetric tensor. A harmonized system of field equations, including Maxwell's equations, follows from these three tensors.

Keywords: Symmetric tensor, an asymmetric tensor, antisymmetric tensor, electromagnetic field, Maxwell equations, Lorentz calibration.

Симметричный и асимметричный тензоры электромагнитного поля

Ю.А. Спиричев

Показано, что каноническому антисимметричному тензору электромагнитного поля можно сопоставить симметричный и асимметричный тензоры, следующие из разложения асимметричного тензора общего вида на его симметричную и антисимметричную части. Эти тензоры содержат дополнительную информацию об электромагнитном поле. Из асимметричного тензора следуют волновые уравнения Даламбера для электромагнитного потенциала и производные калибровочного условия

Лоренца, а из симметричного тензора следует динамическое уравнение Навье-Стокса для электромагнитного потенциала. Из этих трех тензоров следует согласованная система уравнений поля, включающая уравнения Максвелла.

Содержание

1. Введение

В электродинамике электромагнитное поле (ЭМП) принято описывать каноническим антисимметричным тензором второго ранга [1] $F_{[\nu\mu]}=\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu$, где A_μ – четырехмерный электромагнитный потенциал, а ∂_ν - оператор четырехмерного дифференцирования. Такое описание ЭМП можно дополнить симметричным и асимметричным тензорами, следующими из разложения асимметричного тензора на симметричную и антисимметричную части $F_{\nu\mu}=F_{(\nu\mu)}/2+F_{[\nu\mu]}/2$. На основе этого разложения канонический антисимметричный тензор ЭМП $F_{[\nu\mu]}$ можно записать в виде $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$. Асимметричный $F_{\nu\mu}=\partial_\nu A_\mu$ и симметричный $F_{(\nu\mu)}=\partial_\nu A_\mu+\partial_\mu A_\nu$ тензоры содержат дополнительную информацию, расширяющую знания об ЭМП. Компонентами канонического антисимметричного тензора $F_{[\nu\mu]}$ являются комбинации производных скалярного и векторного потенциалов ЭМП, которые определены как компоненты электрического и магнитного поля. Из этого тензора, в виде его четырехмерной дивергенции, следуют уравнения Максвелла. Компонентами симметричного $F_{(\nu\mu)}$ и асимметричного $F_{\nu\mu}$ тензоров также являются комбинации производных скалярного и векторного потенциалов ЭМП. Из этих тензоров, в виде их четырехмерных дивергенций, также следуют уравнения связи между их компонентами, дополняющие систему уравнений Максвелла, в частности, из симметричного тензора следует уравнение Навье - Стокса для электромагнитного потенциала. Таким образом, введение в электродинамику асимметричного и симметричного тензоров ЭМП расширяет возможности его описания и представляет методический интерес.

Целью настоящей статьи является описание асимметричного $F_{\nu\mu}$ и симметричного $F_{(\nu\mu)}$ тензоров ЭМП и получение из них уравнений поля, дополняющих систему уравнений Максвелла.

ЭМП рассматривается в вакууме. Геометрия пространства-времени принимается в виде псевдоевклидова пространства Минковского (ct, ix, iy, iz) [2]. Четырехмерный электромагнитный потенциал соответственно определен как A_μ (φ/c, iA), где φ и A скалярный и векторный потенциалы ЭМП.

2 Тензоры электромагнитного поля

Асимметричный 4-тензор второго ранга $F_{\nu\mu}$ напряженностей ЭМП получим четырехмерным дифференцированием электромагнитного потенциала $F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu = \partial A_\mu(\varphi/c, iA_k)/\partial r_\nu\,(c\cdot t, i\cdot r_k)$ где r_k- координаты в евклидовом пространстве.

Асимметричный тензор $F_{\nu\mu}$ напряженностей ЭМП в матричном представлении имеет вид:

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_x & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_y & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_x\varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_y\varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_z\varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Операциями альтернирования и симметрирования его можно однозначно разложить на симметричный и антисимметричный тензоры напряженностей ЭМП:

$$F_{\nu\mu} = \frac{1}{2}F_{(\nu\mu)} + \frac{1}{2}F_{[\nu\mu]} = \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \tag{2}$$

В такой форме канонический антисимметричный тензор напряженностей ЭМП в матричном представлении имеет вид

$$F_{[\nu\mu]}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x+\partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y+\partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z+\partial_z\varphi) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x+\partial_x\varphi) & 0 & (\partial_x A_y-\partial_y A_x) & (\partial_x A_z-\partial_z A_x) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y+\partial_y\varphi) & -(\partial_x A_y-\partial_y A_x) & 0_y & (\partial_y A_z-\partial_z A_y) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z+\partial_z\varphi) & -(\partial_x A_z-\partial_z A_x) & -(\partial_y A_z-\partial_z A_y) & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}i\cdot E_x & -\frac{1}{c}i\cdot E_y & -\frac{1}{c}i\cdot E_z \\ \frac{1}{c}i\cdot E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}i\cdot E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}i\cdot E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В этом тензоре напряженность электрического поля E и индукция магнитного поля B выражаются через комбинации производных скалярного φ и векторного A потенциалов ЭМП (в системе СИ) в виде

$$E=-\nabla\varphi-\partial_t A$$

$$B=\nabla\times A=(\partial_y A_z-\partial_z A_y)_x+(\partial_z A_x-\partial_x A_z)_y+(\partial_x A_y-\partial_y A_x)_z$$

Аналогично запишем и симметричный тензор ЭМП $F_{(\nu\mu)}$. Поскольку его компоненты имеют другие комбинации производных φ и A, для сокращения записи введем для этих новых комбинаций производных следующие обозначения:

$$K=-\nabla\varphi+\partial_t A$$

$$L=(\partial_y A_z+\partial_z A_y)_x+(\partial_z A_x+\partial_x A_z)_y+(\partial_x A_y+\partial_y A_x)_z$$

$$G=\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot A=\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\partial_x A_x+\partial_y A_y+\partial_z A_z$$

Тогда симметричный тензор $F_{(\nu\mu)}$ можно записать в матричном виде

$$F_{(\nu\mu)}=\begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x-\partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y-\partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z-\partial_z\varphi) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x-\partial_x\varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y+\partial_y A_x) & (\partial_x A_z+\partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y-\partial_y\varphi) & (\partial_x A_y+\partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z+\partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z-\partial_z\varphi) & (\partial_x A_z+\partial_z A_x) & (\partial_y A_z+\partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2G_t & i\cdot\frac{1}{c}K_x & i\cdot\frac{1}{c}K_y & \frac{1}{c}i\cdot K_z \\ i\cdot\frac{1}{c}K_x & 2G_x & L_z & L_y \\ i\cdot\frac{1}{c}K_y & L_z & 2G_y & L_x \\ i\cdot\frac{1}{c}K_z & L_y & L_x & 2G_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

Канонический антисимметричный тензор ЭМП $F_{[\nu\mu]}$ представляет собой четырехмерный ротор, описывающий четырехмерное вращение ЭМП в пространстве Минковского. Тогда симметричный тензор ЭМП $F_{(\nu\mu)}$, по аналогии с механикой сплошных сред, можно рассматривать как тензор четырехмерной деформации ЭМП.

Разложение (2) асимметричного тензора $F_{\nu\mu}$ можно записать в матричном представлении

$$F_{\nu\mu}=\frac{1}{2}F_{(\nu\mu)}+\frac{1}{2}F_{[\nu\mu]}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot G_t & i\cdot\frac{1}{c}K_x & i\cdot\frac{1}{c}K_y & \frac{1}{c}i\cdot K_z \\ i\cdot\frac{1}{c}K_x & 2\cdot G_x & L_z & L_y \\ i\cdot\frac{1}{c}K_y & L_z & 2\cdot G_y & L_x \\ i\cdot\frac{1}{c}K_z & L_y & L_x & 2\cdot G_z \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}i\cdot E_x & -\frac{1}{c}i\cdot E_y & -\frac{1}{c}i\cdot E_z \\ \frac{1}{c}i\cdot E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}i\cdot E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}i\cdot E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Компоненты тензоров *E*, *B*, *G*, *L*, *K* объединены между собой уравнениями связи, а также тождествами Бьянки и Бельтрами для тензоров второго ранга.

В электродинамике широко применяется калибровочное условие Лоренца $\partial_t\varphi/c^2+\nabla\cdot A=0$, а также калибровочные условия $\nabla\cdot A=0$ и $\partial_t\varphi=0$, но их физическая сущность не определена. Членами этих условий являются диагональные компоненты симметричного тензора (4), описывающие объемную четырехмерную деформацию расширения/сжатия ЭМП. Отсюда следует, что применение этих калибровочных условий, т.е. исключение диагональных членов симметричного тензора (4) из уравнений ЭМП физически означает полное или частичное исключение из этих уравнений описания объемной четырехмерной деформации ЭМП. Поскольку след тензора (4) является его линейным инвариантом, то и калибровочное условие Лоренца является четырехмерным инвариантом.

3. Уравнения электромагнитного поля

Уравнения ЭМП следуют из тензоров напряженностей ЭМП (1), (3) и (4), путем применения к ним процедуры дифференцирования с последующим свертыванием. При этом получаем две группы уравнений для каждого индекса свертывания

$$\partial^{\nu}F_{\nu\mu}=\frac{1}{2}\partial^{\nu}F_{(\nu\mu)}+\frac{1}{2}\partial^{\nu}F_{[\nu\mu]} \quad \text{и} \quad \partial^{\mu}F_{\nu\mu}=\frac{1}{2}\partial^{\mu}F_{(\nu\mu)}+\frac{1}{2}\partial^{\mu}F_{[\nu\mu]}$$

Из асимметричного тензора $F_{\nu\mu}$ следуют уравнения ЭМП, которые с учетом источников поля в виде 4-плотности тока $J_\mu(c\cdot\rho, i\cdot J)$, где ρ и J соответственно плотность электрических зарядов и тока, можно записать в виде

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \qquad (6) \qquad\qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}A - \Delta A = \mu_0\cdot J \qquad (7)$$

$$\partial_t\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot A\right) = 0 \qquad (8) \qquad\qquad -\nabla\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot A\right) = 0 \qquad (9)$$

Уравнения (6) и (7) являются каноническими волновыми уравнениями Даламбера [3] для потенциалов ЭМП, которые часто называют уравнениями Максвелла в калибровке Лоренца. В данном случае эти уравнения без дополнительных условий, в виде калибровки Лоренца, следуют из асимметричного тензора ЭМП (1). Уравнения (8) и (9) являются производными калибровочного условия Лоренца, которые можно рассматривать как уравнения сохранения ЭМП. Обычно введение калибровочного условия Лоренца обосновывают инвариантностью электрического и магнитного поля относительно градиентного преобразования электромагнитного потенциала. Из тензора ЭМП (1) это калибровочное условие следует в виде уравнений (8) и (9) без дополнительных предположений. Из уравнений (8) и (9) следует, что $\partial_t\varphi/c^2+\nabla\cdot A=const$, тогда калибровочное условие Лоренца является частным случаем этого выражения.

Из канонического антисимметричного тензора $F_{[\nu\mu]}$ следуют уравнения Максвелла, описывающие четырехмерное вращение ЭМП в пространстве Минковского,

$$-\partial_t\nabla\cdot A - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \qquad \text{или} \qquad \nabla\cdot E = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}A + \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi + \nabla\times\nabla\times A = \mu_0\cdot J \qquad \text{или} \qquad \mu_0\cdot J + \frac{1}{c^2}\partial_t E = \nabla\times B \qquad (11)$$

Из симметричного тензора $F_{(\nu\mu)}$ следуют уравнения, описывающие четырехмерную деформацию ЭМП в пространстве Минковского,

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t \nabla\cdot A - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}A - \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi - \nabla(\nabla\cdot A) - \Delta A = \mu_0\cdot J \tag{13}$$

Уравнение (13) является электромагнитным аналогом уравнения движения изотропной упругой среды [4], часто называемого динамическим уравнением движения Навье-Стокса (или уравнением Ламе). Здесь это уравнение показывает общность законов движения всех видов материи.

Для первой группы уравнений, при сложении уравнений (10) и (11), соответственно, с (12) и (13) с учетом коэффициента 1/2, получим, соответственно, уравнения (6) и (7). Для второй группы уравнений, при сложении уравнений (10) и (11), соответственно, с (12) и (13) с учетом изменения знаков в уравнениях (10) и (11) и коэффициента 1/2, получим, соответственно, уравнения (8) и (9). Таким образом, уравнения (6) – (13) взаимосвязаны и представляют собой полную согласованную систему уравнений ЭМП. В этой системе уравнения (6), (7), (10) и (11) являются каноническими. Уравнения (8), (9), (12) и (13) являются новыми уравнениями ЭМП.

В каноническую систему уравнений Максвелла, кроме уравнений (10) и (11), входят два дифференциальных тождества (при записи их в потенциалах ЭМП)

$$\nabla\times E = -\partial_t B \quad \text{и} \quad \nabla\cdot B = 0 \tag{14}$$

Эти тождества следуют из выражения для цикла антисимметричного тензора (3) $\partial_\lambda F_{[\mu\nu]} + \partial_\mu F_{[\nu\lambda]} + \partial_\nu F_{[\lambda\mu]} = 0$. Для антисимметричного тензора ЭМП в форме (3) для получения уравнений Максвелла (14) не требуется дополнительного введения «дуального» антисимметричного тензора, как это обычно делается [5]. Полная система уравнений Максвелла (10), (11) и (14) сразу следует из тензора (3). Для тензоров $F_{[\nu\mu]}$ и $F_{(\nu\mu)}$ также можно записать дифференциальные тождества, аналогичные известным в теории упругости тождествам Бельтрами [6], которые связывают между собой компоненты *E, B* и *G, L, K*.

Полную систему уравнений ЭМП можно записать в двух сжатых вариантах

1) $\partial^{\nu} F_{\nu\mu} = J_{\nu}$ $\partial^{\mu} F_{\nu\mu} = 0$ или 2) $\partial^{\nu} F_{(\nu\mu)} = J_{\nu}$ $\partial^{\nu} F_{[\nu\mu]} = J_{\nu}$

Для перехода от одного варианта к другому достаточно сложить и вычесть уравнения соответствующего варианта.

4 Заключение

Антисимметричный $F_{[\nu\mu]}$ и симметричный $F_{(\nu\mu)}$ тензоры ЭМП следуют из разложения асимметричного 4-тензора ЭМП $F_{\nu\mu}$ общего вида. Из антисимметричного тензора следуют уравнения Максвелла, а из асимметричного и симметричного тензоров следуют уравнения Даламбера, производные калибровочного условия Лоренца и динамическое уравнение Навье-Стокса для электромагнитного потенциала. Из этого можно сделать вывод, что тензором, описывающим ЭМП в полном объеме, является асимметричный тензор $F_{\nu\mu}$, из которого следует система уравнений ЭМП (6) – (9) и ее эквивалентный вариант (10) – (13), включающий уравнения Максвелла.

Члены калибровочного условия Лоренца описывают четырехмерную объемную деформацию ЭМП, а применение этой калибровки означает исключение из уравнений ЭМП его четырехмерной объемной деформации.

Введение в электродинамику симметричного $F_{(\nu\mu)}$ и асимметричного $F_{\nu\mu}$ тензоров ЭМП и следующих из них уравнений позволяет более полно описать свойства ЭМП.

Список литературы

1 Рубаков В А *Классические калибровочные поля* (М.: «Эдиториал УРСС», 1999)

2 Тоннела М-А *Основы электромагнетизма и теории относительности* (М.: «Издательство иностранной литературы», 1962, с.153)

3 Ландау Л Д , Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2003, с.221)

Landau L D, Lifshits E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)

4 Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: «Наука», 1973, с.125); Landau L D, Lifshits E M *The Theory of elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1983)

5 Зоммерфельд А *Электродинамика* (М.: «Иностранная литература», 1958, с. 300); Zommerfeld A *Elektrodynamic* (Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Porting K.-G., 1949)]

6 Лейбензон Л С *Курс теории упругости* (М.: ОГИЗ, 1947, с.98)