On the tensor of energy-momentum tensor of the interaction of electromagnetic fields with matter

Spirichev Yurii Alexseevich

Abstract

In this paper, a new consistent approach to theory of electromagnetic forces in a continuous medium. The tensor of energy-momentum tensor obtained from the tensor of the electromagnetic field and the induction field without the involvement of Maxwell's equations and Poynting theorem. Tensor of energy-momentum the equations of conservation of energy density, the flux density of energy, density and momentum of the wave equation for these energy values. From tensor energy-momentum followed by expressions of electromagnetic forces for performances of density and momentum in the Minkowski form and in the form of Abraham, says about the equivalence of these representations the density of momentum for the description of electromagnetic forces in a continuous medium. From tensor energy-momentum followed by expressions of electromagnetic forces for performances of density and momentum in the Minkowski form and in the form of Abraham, says about the equivalence of these representations the density of momentum for the description of electromagnetic forces in a continuous medium.

Keywords: the electromagnetic force, the tensor of energy-momentum, tensor of Minkowski, Abraham tensor, conservation equations, wave equation.

Новый метод получения тензора энергии-импульса в макроскопической электродинамике и его следствиях

Спиричев Юрий Алексеевич

Аннотация.

В статье изложен новый последовательный подход к решению проблемы выбора тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде. Тензор энергии-импульса получен из тензоров электромагнитного поля и поля электромагнитной индукции без привлечения уравнений Максвелла и теоремы Пойнтинга. Его линейным инвариантом является плотность функции Лагранжа электромагнитного поля. Из тензора энергии-импульса следуют уравнения сохранения плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и волновые уравнения для этих энергетических величин. Из тензора энергии-импульса следуют выражения электромагнитных сил для представлений плотности импульса в формах Минковского и Абрагама, что доказывает равноправность этих форм для описания электромагнитных сил. Из уравнений сохранения следует волновое уравнение для плотности импульса, описывающее энергетическую структуру электромагнитного излучения и одновременную передачу импульса и момента импульса независимо от поляризации излучения, что устраняет парадокс «нулевой плотности спиральности» плоской электромагнитной волны. Получены тензоры и уравнения баланса электромагнитных сил в материальной среде.

Ключевые слова: электромагнитные силы, тензор энергии-импульса, тензор Минковского, тензор Абрагама, плотность импульса, уравнения сохранения, волновые уравнения, момент импульса.

Оглавление

1 Введение

Проблема взаимодействия электромагнитного поля (ЭМП) с веществом, обсуждается уже много лет, однако до настоящего времени ее однозначного решения не найдено. В последние годы ведутся работы по созданию метаматериалов с уникальными электромагнитными свойствами, поэтому вопросы взаимодействия ЭМП с веществом приобрели особую актуальность. Электромагнитные силы этого взаимодействия обычно ищут в виде четырехмерной дивергенции тензора энергии-импульса (ТЭИ) [1], играющего ключевую роль в данной проблеме. Проблему электромагнитных сил можно разделить на две части. Первой из них является выбор формы ТЭИ взаимодействия ЭМП с веществом. Второй проблемой является выбор материальных уравнений, описывающих электромагнитные свойства среды. Настоящая статья посвящена решению первой проблемы, которая заключается в отсутствии однозначного ответа на вопрос о том, какая из многих форм тензора энергии-импульса (ТЭИ) является правильной. Наиболее часто обсуждаются формы ТЭИ Минковского и Абрагама. Это сделано, например, в статьях [1] - [10]. В статьях [1] - [3], [5],

[8], [10] авторы проводят сравнительный анализ результатов, следующих из ТЭИ в формах Минковского и Абрагама для различных случаев, и отдают предпочтение форме Абрагама. В статьях [4], [6], [7], [9] показаны достоинства ТЭИ в форме Минковского и недостатки ТЭИ в форме Абрагама, который, по мнению авторов [4] и [6], не является релятивистски ковариантным, и потому отдается предпочтение форме Минковского. В работе [2] отмечается, что «в большинстве ситуаций результаты, получаемые на основе тензоров Абрагама и Минковского, совершенно тождественны». По мнению авторов [3] в рамках чисто макроскопического подхода не представляется возможным сделать однозначный выбор формы ТЭИ.

Одной из причин различных мнений о формах ТЭИ является отсутствие математически строгого методического подхода к получению ТЭИ. В известных работах его получают не методом математического вывода, а методом построения из отдельных блоков. Из уравнений Максвелла и выражения для силы Лоренца с помощью теоремы Пойнтинга получают уравнения, интерпретируемые авторами как уравнения сохранения энергии и импульса. Далее члены этих уравнений интерпретируются как производные компонентов ТЭИ. Этими «строительными блоками» ТЭИ являются плотность энергии и плотность импульса ЭМП, вектор Умова-Пойнтинга (плотность потока энергии ЭМП), трехмерный тензор потока плотности импульса (или трехмерный тензор напряжений). Описанный метод получения ТЭИ, имеющий определенную свободу выбора, привел к тому, что его отдельные части иногда конструируются авторами из общих соображений и интерпретируются ими по-разному и естественно, что при этом возникают дискуссии. В результате таким методом были построены ТЭИ в формах Минковского, Герца – Хэвисайда, Абрагама, Гельмгольца - Абрагама, Абрагама – Бриллюэна – Питаевского, Полевого – Рытова и др. Этим формам ТЭИ соответствуют и свои формы представления электромагнитных сил. Такой метод получения ТЭИ также имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что получая уравнения сохранения из уравнений Максвелла относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды принимаются постоянными [2], что ограничивает общность получаемых результатов, поэтому рассматривать полученные «строительные блоки» и построенные из них ТЭИ для общих случаев взаимодействия ЭМП с веществом не совсем правомерно. В отношении электромагнитных сил в работе [3] отмечается, что они находятся «несколько непоследовательным образом. Между тем желательно получить и силы, и другие выражения (плотность энергии, поток энергии, плотность импульса) единым образом на базе уравнений поля». Однако сами уравнения поля (система уравнений Максвелла) являются следствиями антисимметричного тензора ЭМП, тогда методически целесообразно было бы получение ТЭИ не на базе уравнений поля, а из тензора ЭМП и далее получение всех выражений для энергии и импульса непосредственно из ТЭИ, минуя этапы получения уравнений Максвелла, теоремы

Пойнтинга и «строительных блоков» ТЭИ. При таком подходе, форма ТЭИ и следующие из него уравнения для энергии и импульса, полностью определяются антисимметричным тензором ЭМП. При этом дискуссия с форм ТЭИ переносится на материальные уравнения, связывающие ЭМП с полем электромагнитной индукции, т.е. переносится на вторую проблему.

В настоящей статье предложен методически единообразный и последовательный подход к получению ТЭИ взаимодействия ЭМП с веществом, уравнений сохранения плотности электромагнитной энергии и импульса, волновых уравнений для плотности энергии и импульса, плотности электромагнитных сил. Особенность предлагаемого метода заключается в том, что в нем не используются уравнения Максвелла и теорема Пойнтинга, а используется их первоисточник - антисимметричный тензор ЭМП, уже содержащий всю необходимую информацию. Сам же антисимметричный тензор ЭМП следует из четырехмерной производной электромагнитного потенциала - асимметричного тензора ЭМП - путем его разложения на симметричный и антисимметричный тензоры. Таким образом, единственной отправной точкой описываемого метода является четырехмерный электромагнитный потенциал. В предлагаемом методе все уравнения сохранения автоматически следуют из ТЭИ в виде уравнений связи между его компонентами. Такой методический подход прост, нагляден, последователен и на базовом уровне не содержит дискуссионных моментов, поскольку при правильном исходном постулате и отсутствии математических ошибок дает, безусловно, правильный результат. Тогда дискуссии по формам ТЭИ снимаются, а дискуссионные вопросы появляются только при определении конкретных видов материальных уравнений и получения, соответствующих этим уравнениям электромагнитных сил. Кроме того, получаемый таким методом ТЭИ и следующие из него уравнения сохранения пригодны для рассмотрения общих случаев взаимодействия ЭМП со средой.

Поскольку материальные уравнения являются чисто эмпирическими, то количество их возможных вариантов в принципе не ограничено. Однако предлагаемый подход позволяет достаточно четко разделить основную, неизменную канву и дискуссионные элементы, что значительно сокращает пространство для дискуссий и направляет их в более продуктивное русло.

2. Антисимметричные тензоры электромагнитного поля и электромагнитной индукции

Геометрия пространства-времени принимается в виде псевдоевклидова пространства Минковского (ct, ix, iy, iz) [11 с.153]. При этом четырехмерный электромагнитный потенциал соответственно определен как $\boldsymbol{A}_\mu$ (φ/c, i$\boldsymbol{A}$), где φ и $\boldsymbol{A}$ скалярный и векторный потенциалы ЭМП.

Асимметричный 4-тензор второго ранга $\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$ получим четырехмерным дифференцированием электромагнитного потенциала $\boldsymbol{A}_{\mu}$:

$$\mathbf{F}_{\nu\mu} = \partial_\nu \mathbf{A}_\mu = \partial \mathbf{A}_\mu (\varphi / c, i\mathbf{A}_k) / \partial \mathbf{r}_\nu (c \cdot t, i \cdot \mathbf{r}_k)$$

где $\boldsymbol{r}_{\mathrm{k}}$- координаты в евклидовом пространстве. Асимметричный тензор ЭМП $\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$ в матричном представлении имеет вид:

$$\mathbf{F}_{\nu\mu} = \partial_\nu \mathbf{A}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_x & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_y & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_x\varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_y\varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_z\varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Из этого тензора, как уравнения связи между его компонентами, следуют уравнения ЭМП в потенциалах:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = 0 \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = 0 \qquad \partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = 0 \qquad -\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = 0$$

Первые два уравнения являются уравнениями Максвелла в калибровке Лоренца, а два других являются производными калибровочного условия Лоренца. Операциями альтернирования и симметрирования тензор (1) можно однозначно разложить на симметричный и антисимметричный тензоры напряженностей ЭМП:

$$\mathbf{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\mathbf{F}_{(\nu\mu)} + \frac{1}{2}\mathbf{F}_{[\nu\mu]} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\mathbf{A}_\mu + \partial_\mu\mathbf{A}_\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\nu\mathbf{A}_\mu - \partial_\mu\mathbf{A}_\nu) \tag{2}$$

В такой форме антисимметричный тензор напряженностей ЭМП в матричном представлении имеет вид:

$$\mathbf{F}_{[\nu\mu]} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x + \partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y + \partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z + \partial_z\varphi) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x + \partial_x\varphi) & 0 & (\partial_x A_y - \partial_y A_x) & (\partial_x A_z - \partial_z A_x) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y + \partial_y\varphi) & -(\partial_x A_y - \partial_y A_x) & 0_y & (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z + \partial_z\varphi) & -(\partial_x A_z - \partial_z A_x) & -(\partial_y A_z - \partial_z A_y) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}i\cdot E_x & -\frac{1}{c}i\cdot E_y & -\frac{1}{c}i\cdot E_z \\ \frac{1}{c}i\cdot E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}i\cdot E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}i\cdot E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Где $\boldsymbol{E}$ - напряженность электрического поля; $\boldsymbol{B}$ - индукция магнитного поля. Из этого тензора, как уравнения связи между его компонентами, следует система уравнений Максвелла для вакуума.

Зоммерфельд А. [12 с.11] разделил электромагнитные величины на силовые и количественные величины. К силовым величинам относятся напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукция магнитного поля $\mathbf{B}$. К количественным величинам относятся индукция электрического поля $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$. Общность величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а также $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ однозначно объясняется теорией относительности, где пары величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ можно объединить соответственно в антисимметричные тензоры ЭМП $\mathbf{F}_{[\nu\mu]}$ (3) и электромагнитной индукции (ЭМИ) $\mathbf{f}_{[\nu\mu]}$ [12 с.298]. Запишем тензор ЭМИ $\mathbf{f}_{[\nu\mu]}$, аналогично тензору ЭМП (3):

$$\mathbf{f}_{[\nu\mu]} = \begin{pmatrix} 0 & -i\cdot c\cdot D_x & -i\cdot c\cdot D_y & -i\cdot c\cdot D_z \\ i\cdot c\cdot D_x & 0 & H_z & -H_y \\ i\cdot c\cdot D_y & -H_z & 0 & H_x \\ i\cdot c\cdot D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Из этого тензора, как уравнения связи между его компонентами, следует система уравнений Максвелла для сплошной среды. Для вакуума или микроскопического поля $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$, а $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0$, где ε_0 и μ_0, соответственно, электрическая и магнитная постоянные. Для слабого ЭМП в изотропной неферромагнитной диэлектрической среде без дисперсии, обычно принимают материальные уравнения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu \cdot \mu_0 \tag{5}$$

где ε и μ, соответственно, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

3. Тензоры энергии-импульса в электродинамике

Энергетические величины всегда являются произведениями силовых величин, на количественные величины [12 с.11]. Энергия взаимодействия ЭМП со средой является квадратичной формой от напряженностей и индукций электрического и магнитного полей. Поскольку напряженности и индукции электрического и магнитного полей являются компонентами тензоров (3) и (4), то квадратичные формы их компонентов являются компонентами ТЭИ. Таким образом, получим ТЭИ взаимодействия ЭМП с веществом в виде скалярного произведения тензора ЭМП $\mathbf{F}_{[\nu\mu]}$ (3) на тензор ЭМИ $\mathbf{f}_{[\nu\mu]}$ (4).

Компоненты тензора $\mathbf{P}_{\nu\mu}$ скалярного произведения двух тензоров второго ранга находятся по формуле [13 с.308]:

$$\mathbf{P}_{\nu\mu} = \sum_{\eta=0}^{\eta=3} \mathbf{a}_{\nu\eta}\mathbf{b}_{\eta\mu} \qquad \nu, \mu = 0,1,2,3$$

Положив $\mathbf{a}_{\nu\eta} = \mathbf{F}_{[\nu\eta]}$ на $\mathbf{b}_{\eta\mu} = \mathbf{f}_{[\eta\mu]}$, в соответствии с этой формулой получим ТЭИ в виде:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \mathbf{F}_{[\nu\eta]}\mathbf{f}_{[\eta\mu]} \qquad \nu, \eta, \mu = 0,1,2,3$$

где по одинаковым индексам производится суммирование. В соответствии с этой формулой найдем компоненты ТЭИ $\mathbf{T}_{\nu\mu}$:

$$T_{00} = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_y \qquad T_{01} = i\cdot(E_y H_z - E_z H_y)/c$$

$$T_{11} = E_x D_x - B_z H_z - B_y H_y \qquad T_{02} = i\cdot(E_z H_x - E_x H_z)/c$$

$$T_{22} = E_y D_y - B_z H_z - B_x H_x \qquad T_{03} = i\cdot(E_x H_y - E_y H_x)/c$$

$T_{33} = E_z D_z - B_y H_y - B_x H_x$ $\qquad$ $T_{10} = ic(B_z D_y - B_y D_z)$

$T_{20} = ic(B_x D_z - B_z D_x)$ $\qquad$ $T_{30} = ic(B_y D_x - B_x D_y)$

$T_{12} = E_x D_y + B_y H_x$ $\qquad$ $T_{13} = E_x D_z + B_z H_x$

$T_{21} = E_y D_x + B_x H_y$ $\qquad$ $T_{23} = E_y D_z + B_z H_y$

$T_{31} = E_z D_x + B_x H_z$ $\qquad$ $T_{32} = E_z D_y + B_y H_z$

ТЭИ в сжатом матричном виде:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \\ ic\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) & E_i D_k + B_i H_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{00} & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & \mathbf{T}_{ik} \end{bmatrix} \quad i,k = 1,2,3 \qquad (6)$$

где $\quad T_{00}$ – плотность энергии;

T_{0k} – вектор Умова-Пойнтинга **S**;

T_{i0} – плотность импульса **g**;

T_{ik} – тензор потока плотности импульса (тензор напряжений).

В статьях [1]-[10] основной темой дискуссии явился вид в ТЭИ плотности импульса **g**. В форме Минковского плотность импульса представлена как $\mathbf{g}^M = \mathbf{D}\mathrm{x}\mathbf{B}$, а в форме Абрагама как $\mathbf{g}^A = \mathbf{E}\mathrm{x}\mathbf{H}/c^2$. В полученном ТЭИ (6), плотность импульса имеет вид $\mathbf{g} = \mathbf{D}\mathrm{x}\mathbf{B}$., т.е. имеет форму Минковского. В общем случае ТЭИ (6) несимметричен, как и ТЭИ Минковского. Отличие ТЭИ (6) от ТЭИ Минковского заключается в его диагональных компонентах, т.е. в представлении плотности энергии и диагональных компонент трехмерного тензора потока плотности импульса $\mathbf{T}_{ik}$. Таким образом, из антисимметричных тензоров ЭМП (3) и ЭМИ (4) следует ТЭИ, в дискуссионной части соответствующий форме Минковского, однако не равный ему. В главе 5 будет показано, что при получении электромагнитных сил из ТЭИ (6) следуют уравнения для обеих форм представления плотности импульса **g**, т.е. электромагнитные силы в среде можно равноправно представить как через форму Минковского $\mathbf{g}^M$, так и через форму Абрагама $\mathbf{g}^A$.

Для среды, описываемой материальными уравнениями (5), ТЭИ имеет вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \\ i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c & \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - 2\mu\mu_0\mathbf{H}^2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Для вакуума и микрополя ТЭИ имеет вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/c\mu_0 \\ i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/c\mu_0 & \varepsilon_0\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{B}^2/\mu_0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

ТЭИ (7) и (8) являются симметричными. Линейными инвариантами ТЭИ (6) – (8) являются:

$$I_1 = 2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \quad I_2 = 2(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - \mu\mu_0\mathbf{H}^2) \qquad I_3 = 2(\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2/\mu_0)$$

Эти инварианты представляют собой плотность функции Лагранжа ЭМП, а линейный инвариант I_3 для микрополя одновременно является и квадратичным инвариантом антисимметричного тензора ЭМП (3). Такие положительные свойства отсутствуют у известных форм ТЭИ.

4. Уравнения сохранения и волновые уравнения для энергии и импульса электромагнитного поля

Из ТЭИ (6), как уравнения связи между его компонентами, дифференцированием с последующим свертыванием получим уравнения сохранения плотностей энергии, потока энергии и импульса. Поскольку тензор несимметричный, то из него можно получить четыре различных уравнения сохранения (два скалярных и два векторных), по два для каждого индекса свертывания. В первой паре получим уравнения сохранения плотностей энергии ЭМП и потока энергии ЭМП **S** (вектора Умова-Пойнтинга):

$$\frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) + c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \partial_i\mathbf{T}_{ik} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = 0 \qquad (10)$$

Во второй паре получим уравнение сохранения плотности энергии и сохранения плотности импульса **g**:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) + \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c = 0 \qquad (11)$$

$$\partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \partial_k\mathbf{T}_{ik} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = 0 \qquad (12)$$

Из уравнений сохранения плотности энергии (9) и (11) следует уравнение:

$$c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \ \text{ или } \ \nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2 \qquad (13)$$

Правую часть уравнения (13) можно представить, через плотность импульса в форме Абрагама. Из этого следует, что дивергенции этих форм плотности импульса равны. Тогда используя уравнения сохранения плотности энергии (9) и (11) можно записать:

$$\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2 = \partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})/c^2 \quad \text{или} \quad \nabla\cdot\mathbf{g}^M = \nabla\cdot\mathbf{g}^A = \partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})/c^2 \qquad (14)$$

Из уравнений (10) и (12) следует уравнение:

$$\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2 - \mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H}) \ \text{ или } \ \partial_t\mathbf{g}^A - \partial_t\mathbf{g}^M = \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H}) \qquad (15)$$

В полученных уравнениях (9) – (15) не налагается никаких ограничений на материальные уравнения. В связи с этим, уравнения (9) – (15) являются универсальными и описывают законы сохранения плотности энергии, плотности потока электромагнитной энергии и плотности импульса при любых видах материальных уравнений, связывающих ЭМП и поле электромагнитной индукции. Подставляя в эти уравнения различные материальные уравнения, связывающие **E** и **B** с **D** и **H** будем получать различные варианты законов сохранения электромагнитных величин, отвечающих конкретным материальным уравнениям. Полученные соотношения найдены для неподвижной среды, но в силу релятивистской ковариантности тензоров ЭМП и ЭМИ, следующие из них ТЭИ (6), (7), уравнения (9) – (15), также релятивистски ковариантные и при использовании известных формул перехода справедливы и для равномерно движущейся среды. Таким образом, ТЭИ (6) и следующие из него уравнения сохранения (9) – (15) могут служить основой для последовательного развития электродинамики сплошной среды.

Для вакуума или микрополя, уравнения (9) и (11) сводятся к одному уравнению:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E}^2 + \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = 0 \quad (16)$$

Учитывая, что скалярные произведения смешанных компонентов вектора равны нулю, уравнения (10) и (12) упрощаются и также сводятся к одному уравнению:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{B}^2\right) = 0 \quad (17)$$

Разложив второй член в уравнении (16), с учетом уравнений Максвелла, приведем его к виду:

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = -\mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\partial_t\mathbf{B}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E}^2$$

Подставив это выражение в уравнение (16) получим $\partial_t\mathbf{E}^2/c^2 - \partial_t\mathbf{B}^2 = 0$ или, с точностью до постоянных во времени, $\mathbf{E}^2/c^2 = \mathbf{B}^2$. С учетом этого равенства, уравнение (16) эквивалентно уравнению теоремы Пойнтинга. С учетом этого равенства уравнение (17) можно записать в виде:

$$\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \nabla\mathbf{E}^2 = 0 \quad (18)$$

Несмотря на то, что электромагнитная энергия распространяется волновым путем, до настоящего времени волновые уравнения для энергии ЭМП, потока энергии и электромагнитного импульса в электродинамике отсутствовали. Получим эти уравнения. Рассматривая уравнения (16) и (18) как систему, разделив в них неизвестные, получим волновое уравнение для плотности энергии электрического поля

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{E}^2 - \Delta\mathbf{E}^2 = 0 \quad (19)$$

и волновое уравнение для плотности потока **S** электромагнитной энергии:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \nabla(\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})) = \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{S} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{S}) = 0 \quad (20)$$

Учитывая равенство $\mathbf{E}^2/c^2 = \mathbf{B}^2$, из уравнения (19) следует волновое уравнение и для энергии магнитного поля:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{B}^2 - \Delta\mathbf{B}^2 = 0 \quad (21)$$

Разделив уравнение (20) на квадрат скорости света получим волновое уравнение для плотности электромагнитного импульса:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{g}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{g})=0 \qquad (22)$$

Таким образом, уравнения (19) - (22) описывают структуру энергии и импульса электромагнитного излучения. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Волновое уравнение (22) можно записать в виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{g}-\nabla\times\nabla\times\mathbf{g}-\Delta\mathbf{g}=0 \qquad (23)$$

Второй член $\nabla\times\nabla\times\mathbf{g}$ этого уравнения описывает двойное вращение вектора плотности импульса. Известно, что электромагнитное излучение одновременно переносит импульс и момент импульса. Уравнение (23) описывает оба этих физических эффекта. Если из уравнения (23) исключить второй член, то получим классическое волновое уравнение Даламбера, описывающее перенос плотности импульса. Второй член в уравнении (23) описывает двойную циркуляцию плотности импульса по замкнутому контуру, т.е. описывает перенос плотности момента импульса. В электродинамике относительно момента импульса ЭМП существуют различные мнения, обсуждаемые в работах [14] - [16]. В работе [15] отмечается, что в классической электродинамике существует парадокс «нулевой плотности спиральности» электромагнитной волны, когда существующие уравнения ЭМП не описывают процесс переноса момента импульса плоской электромагнитной волной, что противоречит представлениям квантовой электродинамики о внутреннем моменте импульса (спине) фотона, не зависящем от поляризации излучения. Эту проблему решает уравнение (23), из которого следует, что член $\nabla\times\nabla\times\mathbf{g}$, определяющий двойное вращение вектора плотности импульса описывает перенос плотности момента импульса электромагнитной волной, что соответствует представлениям квантовой электродинамики о внутреннем моменте импульса (спине) фотона. Поскольку вектор плотности импульса в этом члене имеет двойное вращение, то из этого следует, что электромагнитная волна несет тороидный момент [17] плотности импульса. Следовательно, внутренний момент импульса фотона также является тороидным моментом импульса ЭМП. Таким образом, уравнение (23) снимает парадокс «нулевой плотности спиральности» электромагнитной волны, показывая спиральность движения в ней электромагнитной энергии, независимо от поляризации излучения и сближает классическую электродинамику с квантовой.

5. Электромагнитные силы в сплошной среде и их тензоры

Четырехмерные электромагнитные силы, точнее плотности электромагнитных сил в сплошной среде определяются в виде производных ТЭИ [3]. Исходя из этого представления, ранее полученные уравнения (10), (12) и следующее из них уравнение (15), при отсутствии внешних сил, можно рассматривать как уравнения баланса электромагнитных сил. Уравнение (10) можно записать в виде:

$$f_1 = \partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2 = \partial_t\mathbf{g}^A = \partial_i\mathbf{T}_{ik} \quad \text{или} \quad f_1 = \partial_t\mathbf{g}^A = \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) \tag{24}$$

Уравнение (12) можно записать в виде:

$$f_2 = \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \partial_t\mathbf{g}^M = \partial_k\mathbf{T}_{ik} \quad \text{или} \quad f_2 = \partial_t\mathbf{g}^M = \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) \tag{25}$$

Тогда уравнение (15) представляет собой разность этих сил:

$$f_1 - f_2 = \partial_t\mathbf{g}^A - \partial_t\mathbf{g}^M = \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H}) \tag{26}$$

Из уравнения (26) следует выражение для силы Абрагама в общем виде:

$$\mathbf{F}_A = -\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H})$$

Поскольку в уравнениях (10) и (12) не налагается никаких ограничений на материальные уравнения и они являются универсальными для любой среды, то это относится и к уравнениям электромагнитных сил (24) - (26). Левой частью уравнения (24) является скорость изменения плотности импульса в форме Абрагама, а левой частью уравнения (25) является скорость изменения плотности импульса в форме Минковского. Это говорит о том, что уравнения (24) и (25) приводят к одинаковым физическим результатам, поскольку они связаны законом сохранения электромагнитной энергии, и поэтому сам предмет дискуссии о том какая форма плотности импульса правильнее, отсутствует, поскольку они равноправны и выбор формы представления плотности импульса является делом вкуса исследователя. Однако, все вышесказанное не относится к самим ТЭИ в формах Минковского или Абрагама, полученных методом построения, так как из этих форм ТЭИ не следуют уравнения сохранения энергетических величин (9) – (14), волновые уравнения (20) – (23) и уравнения для плотности электромагнитных сил (24) - (25), следовательно, эти формы ТЭИ недостаточно корректны.

В частном случае, для среды, описываемой материальными уравнениями (5) электромагнитные силы (24) и (25) можно записать в виде:

$$f_1 = \partial_t\mathbf{g}^A = \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = \nabla(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{B}^2/\mu\cdot\mu_0)$$

$$f_2 = \partial_t\mathbf{g}^M = \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = \nabla(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{B}^2/\mu\cdot\mu_0)$$

Тогда для такого вида материальных уравнений электромагнитные силы в среде сводятся к одному уравнению:

$$f = \partial_t\mathbf{g}^A = \partial_t\mathbf{g}^M = \nabla(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{B}^2/\mu\cdot\mu_0) \tag{26}$$

Для постоянных в пространстве ε и μ уравнение (26) для электромагнитных сил в неподвижной среде еще более упрощается и сводится, как и следовало ожидать, к силе Кулона:

$$f = \partial_t\mathbf{g}^A = \partial_t\mathbf{g}^M = 2\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{4}{\mu\mu_0}\mathbf{B}\cdot\nabla\cdot\mathbf{B} = 2\mathbf{E}\cdot\nabla\cdot\mathbf{D} = 2\cdot\mathbf{E}\cdot\rho$$

где ρ – плотность электрических зарядов. При отсутствии избыточных электрических зарядов электромагнитные силы для этого случая равны нулю.

Исходя из того, что четырехмерные электромагнитные силы определяются как производные ТЭИ, они получены в виде его дивергенции, т.е. как члены уравнений (24) и (25) сохранения плотности энергии и импульса. Но электромагнитные силы можно получить и в другом, более общем виде, как компоненты тензора электромагнитных сил (ТЭС). Для получения этого тензора найдем четырехмерную производную ТЭИ (6). Поскольку дифференцирование повышает ранг тензора, то ТЭС является тензором третьего ранга:

$$\mathbf{T}_{\eta\nu\mu} = \partial_\eta \mathbf{T}_{\nu\mu} = \partial_\eta \begin{bmatrix} T_{00} & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & \mathbf{T}_{ik} \end{bmatrix} = \partial_\eta \begin{bmatrix} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \\ ic\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) & E_i D_k + B_i H_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Для лучшего представления электромагнитных сил запишем компоненты ТЭС виде производных компонентов ТЭИ:

1) $\partial_\eta T_{00} = \partial_\eta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) = \frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) - i\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})$

2) $\partial_\eta T_{0k} = \partial_\eta(i\frac{1}{c}\mathbf{S}) = \partial_\eta(i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c) = i\cdot\frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$

3) $\partial_\eta T_{i0} = \partial_\eta(ic\cdot\mathbf{g}) = \partial_\eta(ic\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B})) = i\cdot\partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + c\cdot\nabla(\mathbf{D}\times\mathbf{B})$

4) $\partial_\eta \mathbf{T}_{ik} = \partial_\eta(E_i D_k + B_i H_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) =$
$= \frac{1}{c}\partial_t(E_i D_k + B_i H_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) - i\nabla(E_i D_k + B_i H_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}))$

Полученные выражения для электромагнитных сил являются универсальными для любой среды, описываемой тензором электромагнитной индукции.

Запишем ТЭС и найдем выражения для электромагнитных сил для частного случая, когда среда, описывается материальными уравнениями (5):

$$\mathbf{T}_{\eta\nu\mu} = \partial_\eta \mathbf{T}_{\nu\mu} = \partial_\eta \begin{bmatrix} \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \\ i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c & \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - 2\mu\mu_0\mathbf{H}^2 \end{bmatrix}$$

Выражения электромагнитных сил для этого частного ТЭС имеют вид:

1) $\partial_\eta T_{00} = \partial_\eta(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2) = \frac{1}{c}\partial_t(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2) - i\nabla(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2)$

2) $\partial_\eta T_{0k} = \partial_\eta T_{i0} = \partial_\eta(ic\cdot\mathbf{g}) = \partial_\eta(i\frac{1}{c}\mathbf{S}) = \partial_\eta(i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c) = \frac{1}{c}\partial_t(i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c) + \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c$

3) $\partial_\eta \mathbf{T}_{ik} = \partial_\eta(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - 2\mu\mu_0\mathbf{H}^2) = \frac{1}{c}\partial_t(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2) - 2\frac{1}{c}\partial_t(\mu\mu_0\mathbf{H}^2) - i\cdot\nabla(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - 2\mu\mu_0\mathbf{H}^2)$

Найдя четырехмерные дивергенции по каждому из индексов ТЭС (26) можно получить уравнения баланса электромагнитных сил в сплошной среде при отсутствии внешних сил:

$$\partial_\eta\partial_\nu\mathbf{T}_{\eta\nu\mu} = 0 \qquad \partial_\eta\partial_\mu\mathbf{T}_{\eta\nu\mu} = 0 \qquad \partial_\nu\partial_\mu\mathbf{T}_{\eta\nu\mu} = 0$$

6 Заключение

Последовательный подход к выводу ТЭИ взаимодействия ЭМП со сплошной средой из тензоров ЭМП и поля электромагнитной индукции без привлечения уравнений Максвелла и теоремы Пойнтинга позволил математически строго получить как сам ТЭИ, так и следующие из него уравнения сохранения плотности электромагнитной энергии, плотности потока энергии, плотности импульса, волновые уравнения для этих энергетических величин, уравнения баланса электромагнитных сил в сплошной среде.

Полученные соотношения найдены для неподвижной среды, но в силу релятивистской ковариантности тензоров ЭМП и ЭМИ, следующие из них ТЭИ (6), (7), уравнения (9) – (14), (24) - (26), при использовании известных формул перехода, справедливы и для равномерно движущейся среды.

Из полученного ТЭИ (6), уравнений сохранения (13), (14) и баланса электромагнитных сил (24) - (26) следует математически строгий вывод о равноценности представлений плотности импульса в формах Минковского и Абрагама для любой среды, что позволяет закончить дискуссию по этому вопросу. Однако этот вывод не касается самих ТЭИ в формах Минковского и Абрагама полученных методом построения.

Полученный ТЭИ (6) имеет важное положительное качество, которым не обладают другие известные формы ТЭИ, заключающееся в том, что его линейный инвариант одновременно является квадратичным инвариантом тензора ЭМП и плотностью функции Лагранжа ЭМП, объединяя эти три фундаментальные энергетические величины ЭМП в одно целое.

Полученное из ТЭИ (6) волновое уравнение для плотности импульса описывает энергетическую структуру электромагнитного излучения и одновременную передачу электромагнитного импульса и момента импульса независимо от поляризации излучения, тем самым решая проблему «нулевой плотности спиральности» плоской электромагнитной волны и сближая классическую электродинамику с квантовой.

Полученные из ТЭИ следствия, в виде волновых уравнений энергетических величин, ранее отсутствовавших в электродинамике, подтверждают правильность самого ТЭИ и метода его получения.

Список литературы

1. Скобельцын Д В *УФН* **110** 253 (1973); Skobel’tsyn D V Sov. Phys. Usp. **16** 381 (1973)
2. Гинзбург В Л *УФН* **110** 309 (1973); Ginzburg V L Sov. Phys. Usp. **16** 434 (1973)
3. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976); Ginzburg V L, Ugarov V A Sov. Phys. Usp. **19** 94 (1976)]

4. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009); Veselago V G Phys. Usp. **52** 649 (2009)
5. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **179** 995 (2009); Makarov V P, Rukchadze A A Phys. Usp. **52** 937 (2009)
6. Веселаго В Г, Щавлев В В *УФН* **180** 331 (2010); Veselago V G, Shchavlev V V Phys. Usp. **53** 317 (2010)
7. Давидович М В *УФН* **180** 623 (2010); Davidovich M V Phys. Usp. **53** 595 (2010)
8. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **181** 1357 (2011); Makarov V P, Rukchadze AA Phys. Usp. **54** 1285 (2011)
9. Веселаго В Г *УФН* **181** 1201 (2011); Veselago V G Phys. Usp. **54** 1161 (2011)
10. Топтыгин И Н, Левина К *УФН* **186** 146 (2016); Toptygin I N, Levina K Phys. Usp. **59** 141 (2016)
11. Тоннела М-А *Основы электромагнетизма и теории относительности* (М.: «Издательство иностранной литературы», 1962)
12. Зоммерфельд А *Электродинамик*а (М.: «Иностранная литература», 1958)
13. Кочин Н Е *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления* (М.: «Наука», 1965)
14. Вульфсон К С *УФН* **152** 667 (1987); Vul'fslon K S Phys. Usp. **30** 724 (1987)
15. Соколов И В *УФН* **161** 175 (1991); Sokolov I V Phys. Usp. **34** 925 (1991)
16. Барабанов А Л *УФН* **163** 75 (1993); Sokolov I V Phys. Usp. **36** 1068 (1993)
17. Дубовик В М, Тосунян Л А *Физика элементарных частиц и атомного ядр*а **14** (вып. 5) 1193 (1983)