DÉMONSTRATION COMPLÈTE DE LA CONJECTURE DE BEAL - SUIVIE D'EXEMPLES NUMÉRIQUES

par

Abdelmajid Ben Hadj Salem

A mon épouse Wahida, mes enfants Senda et Mohamed Mazen

Elementary proofs are not better than other proofs, nor are they necessarily easy. Indeed, they are often technically difficult, but they do satisfy the aesthetic boundary condition that they use only arithmetic arguments.

Melvyn B. Nathanson[(1)]

Abstract. — En 1997, Andrew Beal [**1**] avait annoncé la conjecture suivante : *Soient A, B, C, m, n, et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si $A^m + B^n = C^l$ alors A, B, et C ont un facteur commun.*

Nous commençons par construire le polynôme $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ avec p, q des entiers qui dépendent de A^m, B^n et C^l. Nous résolvons $x^3 - px + q = 0$ et nous obtenons les trois racines x_1, x_2, x_3 comme fonctions de p, q et d'un paramètre θ. Comme $A^m, B^n, -C^l$ sont les seules racines de $x^3 - px + q = 0$, nous discutons les conditions pourque x_1, x_2, x_3 soient des entiers. Trois exemples numériques sont présentés.

***Abstract* (A Complete Proof of Beal Conjecture Followed by Numerical Examples)**

In 1997, Andrew Beal [**1**] announced the following conjecture: *Let A, B, C, m, n, and l be positive integers with $m, n, l > 2$. If $A^m + B^n = C^l$ then A, B, and C have a common factor.* We begin to construct the polynomial $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ with p, q integers depending of A^m, B^n and C^l. We resolve $x^3 - px + q = 0$ and we obtain the three roots x_1, x_2, x_3 as functions of p, q and a parameter θ. Since $A^m, B^n, -C^l$ are the only roots of $x^3 - px + q = 0$, we discuss the conditions that x_1, x_2, x_3 are integers and have or not a common factor. Three numerical examples are given.

Sommaire

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11AXX, 11D41.

Mots clefs. — Nombres premiers, divisibilité, racines des polynômes du troisième degré, nombres convenables, équations diophantines.

Mes remerciements au Professeur Thong Nguyen Quang Do de m'avoir indiqué l'ouvrage de D.A. Cox cité en Références.

(1) Melvyn B. Nathanson. Elementary methods in number theory. Graduate texts in mathematics $n°195$. 2000.

1. Introduction

En 1997, Andrew Beal [**1**] avait annoncé la conjecture suivante :

Conjecture 1.1. — *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{1.1}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur commun.

Dans ce papier, on donne une démonstration de la conjecture de Beal. L'idée est de considérer un polynôme $P(x)$ de troisième degré ayant comme racines les nombres A^m, B^n et $-C^l$ en tenant compte de la condition (1.1). Le papier est organisé comme suit : dans la section 2, on exprime les racines de $P(x) = x^3 - px + q = 0$ en fonction de deux paramètres ρ, θ qui dépendent de A^m, B^n et C^l. Les sections 3,4 et 5 représentent la partie importante du papier, on obtient que $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}cos^2\dfrac{\theta}{3}$. Comme A^{2m} est un entier, il s'ensuit que $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ doit être écrit comme une fraction $\dfrac{a}{b}$ où a, b sont deux entiers positifs non nuls copremiers. On discutera alors les conditions de divisibilité de p, a, b telles que l'expression de A^{2m} soit un entier et que a, b restent copremiers. Suivant les cas étudiés, on obtient que A, B, C aient ou non un facteur commun. Dans la section 6, trois exemples numériques sont présentés et on finit par la conclusion en section 7.

1.1. Cas trivial. — On commence avec le cas trivial où $A^m = B^n$. L'équation (1.1) devient :

$$2A^m = C^l$$

Comme $l > 2$, on déduit facilement que 2 est un facteur commun. La conjecture (1.1) est vérifiée.

On suppose dans la suite que $A^m > B^n$.

2. Calculs Préliminaires

On suppose la donnée de $m, n, l \in \mathbb{N}^* \ > 2$ et $A, B, C \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$A^m + B^n = C^l \tag{2.2}$$

On note :

$$P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) \tag{2.3}$$

Utilisant l'équation (2.2), $P(x)$ peut s'écrire :

$$P(x) = x^3 + x[A^mB^n - (A^m + B^n)^2] + A^mB^n(A^m + B^n) \tag{2.4}$$

On introduit les notations :

$$p = (A^m + B^n)^2 - A^mB^n; q = A^mB^n(A^m + B^n)$$

Comme $A^m \neq B^n$, on obtient $p > 0$. L'équation (2.4) devient :

$$P(x) = x^3 - px + q$$

En utilisant l'équation (2.3), $P(x) = 0$ a trois racines réelles différentes : A^m, B^n et $-C^l$. Maintenant, on résoud l'équation :

$$P(x) = x^3 - px + q = 0 \tag{2.5}$$

Pour résoudre (2.5), on pose :

$$x = u + v; \alpha = A^mB^n > 0; \beta = (A^m + B^n)^2$$

Alors $P(x) = 0$ donne les deux conditions sur u et v :

$$u^3 + v^3 = -q; uv = p/3 > 0$$

Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 + qX + p^3/27 = 0 \tag{2.6}$$

Son descriminant Δ s'écrit :

$$\Delta = q^2 - 4p^3/27 = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{\bar{\Delta}}{27}$$

avec :

$$\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27\alpha^2\beta - 4(\beta - \alpha)^3$$

Comme $\alpha \neq 0$, on peut aussi re-écrire l'équation précédente comme :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 \left(27\frac{\beta}{\alpha} - 4\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^3 \right)$$

On appelle t le paramètre $\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\bar{\Delta}$ devient :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3(27t - 4(t-1)^3)$$

On note :

$$y = y(t) = 27t - 4(t-1)^3$$

Comme $\alpha > 0$, le signe de $\bar{\Delta}$ est aussi le signe de $y(t)$. L'étude du signe de la fonction y montre que $y < 0$ pour $t > 4$. Dans notre cas, on est intéressé à $t > 0$. Pour $t = 4$, on obtient $y(4) = 0$ et pour $t \in]0, 4[$, $y > 0$. Comme on a $t = \frac{\beta}{\alpha} > 4$ parce que $A^m \neq B^n$:

$$(A^m - B^n)^2 > 0 \Longrightarrow \beta = (A^m + B^n)^2 > 4\alpha = 4A^mB^n$$

Alors $y < 0 \Longrightarrow \bar{\Delta} < 0 \Longrightarrow \Delta < 0$. Alors l'équation (2.6) n'a pas de racines réelles u^3 et v^3. Retrouvons les solutions u et v avec $x = u + v$ un réel positif ou négatif et $u.v = p/3$.

2.1. Démonstration. —

Démonstration. — Les solutions de l'équation (2.6) sont :

$$X_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad X_2 = \overline{X_1} = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On doit résoudre :

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad v^3 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Ecrivons X_1 sous la forme $X_1 = \rho e^{i\theta}$ avec :

$$\rho = \frac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2} = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}; \quad sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} > 0; \quad cos\theta = -\frac{q}{2\rho} < 0$$

alors $\theta\,[2\pi] \in]+\dfrac{\pi}{2}, +\pi[$, soit :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < +\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < cos\frac{\theta}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{2.7}$$

et :

$$\boxed{\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} < \frac{3}{4}} \tag{2.8}$$

d'où l'expression de X_2 : $X_2 = \rho e^{-i\theta}$. On pose :

$$u = re^{i\psi}; \quad \text{et } j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

avec j est une racine complexe cubique de l'unité, alors les solutions u et v sont :

$$\begin{cases} u_1 = re^{i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}} \\ u_2 = re^{i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}je^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \\ u_3 = re^{i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{+i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \end{cases}$$

et similairement :

$$\begin{cases} v_1 = re^{-i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{-i\frac{\theta}{3}} \\ v_2 = re^{-i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi-\theta}{3}} \\ v_3 = re^{-i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}je^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{2\pi-\theta}{3}} \end{cases}$$

On doit choisir u_k et v_h tels que $u_k + v_h$ soit réel. Dans ce cas, on a nécessairement :

$$v_1 = \overline{u_1}; \quad v_2 = \overline{u_2}; \quad v_3 = \overline{u_3}$$

On obtient comme solutions réelles de l'équation (2.5) :

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3} > 0 \\ \\ x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) < 0 \\ \\ x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) > 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Comparant les expressions de x_1 et x_3, on obtient facilement $x_1 > x_3$. Comme A^m, B^n et $-C^l$ sont les seules solutions réelles de (2.5), on considère, comme A^m est supposé supérieur à B^n, les expressions :

$$\boxed{\begin{cases} A^m = x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3} \\ \\ B^n = x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) \\ \\ -C^l = x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) \end{cases}} \tag{2.10}$$

□

3. Préambule de la Démonstration du Principal Théorème

Théorème 3.1. — *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{3.11}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur commun.

Démonstration. — $A^m = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3}$ est un entier $\Rightarrow A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\dfrac{\theta}{3}$ est un entier. Mais :

$$\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$$

Alors :

$$A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3} = 4\frac{p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3}$$

Comme A^{2m} est un entier, et p est un entier, alors $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ doit être écrit sous la forme :

$$\boxed{cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{1}{b} \quad ou \quad cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}}$$

avec $b \in \mathbb{N}^*$, pour la dernière condition $a \in \mathbb{N}^*$ et a, b copremiers.

Notations : dans la suite du papier, les scalaires $a, b, ..., z,\ \alpha, \beta, ...,\ A, B, C, ...$ et $\Delta, \Phi, ...$ représentent des entiers positifs sauf les paramètres θ, ρ, ou ceux mentionnés dans le texte, sont des réels.

3.1. Cas $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{1}{b}$. — On obtient :

$$A^{2m} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3.b}$$

Comme $\dfrac{1}{4} < cos^2\dfrac{\theta}{3} < \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{3}{4} \Rightarrow b < 4 < 3b \Rightarrow b = 1, 2, 3.$

3.1.1. $b = 1$. — $b = 1 \Rightarrow 4 < 3$ ce qui est impossible.

3.1.2. $b = 2$. — $b = 2 \Rightarrow A^{2m} = p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{2.p}{3} \Rightarrow 3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, on obtient :

$$A^{2m} = (A^m)^2 = \frac{2p}{3} = 2.p' \Longrightarrow 2|p' \Longrightarrow p' = 2^\alpha p_1^2$$
$$avec \quad 2 \nmid p_1, \quad \alpha + 1 = 2\beta$$
$$A^m = 2^\beta p_1 \tag{3.12}$$
$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = p' = 2^\alpha p_1^2 \tag{3.13}$$

De l'équation (3.12), il s'ensuit que $2|A^m \Longrightarrow A = 2^i A_1$, $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. Par suite, on a $\beta = i.m = im$. L'équation (3.13) entraîne que $2|(B^n C^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

3.1.2.1. *Cas* $2|B^n$. — : Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$. L'expression de $B^n C^l$ devient :

$$B_1^n C^l = 2^{2im-1-jn} p_1^2$$

- Si $2im - 1 - jn \geq 1$, $2|C^l \Longrightarrow 2|C$ en accord avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im - 1 - jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

3.1.2.2. *Cas* $2|C^l$. — : Si $2|C^l$: de la même manière traitée ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

3.1.3. $b = 3$. — $b = 3 \Rightarrow A^{2m} = p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{4p}{9} \Rightarrow 9|p \Rightarrow p = 9p'$ avec $p' \neq 1$ comme $9 \ll p$, alors $A^{2m} = 4p'$. Si p' est premier c'est impossible car $m > 2$. On suppose que p' est non premier, comme $m \geq 3$, il s'ensuit que $2|p'$, d'où $2|A^m$. Or $B^n C^l = 5p'$ et $2|(B^n C^l)$. En utilisant la manière traitée du cas $b = 2$, on obtient les mêmes résultats.

3.2. Cas $a > 1$, $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b}$. — On a donc :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}; \quad A^{2m} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p.a}{3.b}$$

où a, b vérifient l'une des deux conditions :

$$\boxed{\{3|a \quad et \quad b|4p\}} \text{ ou } \boxed{\{3|p \quad et \quad b|4p\}} \tag{3.14}$$

et en utilisant l'équation (2.8), on obtient une troisième condition :

$$\boxed{b < 4a < 3b} \tag{3.15}$$

Pour ces conditions, $A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3} = 4\dfrac{p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3}$ est un entier.

On va étudier alors les conditions données par l'équation (3.14) dans les deux sections suivantes.

4. Hypothèse : $\{3|a \quad et \quad b|4p\}$

On a donc :

$$3|a \Longrightarrow \exists a' \in \mathbb{N}^* \ / \ a = 3a' \tag{4.16}$$

4.1. Cas $b = 2$ et $3|a$: — A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{2} = \frac{2.p.a}{3}$$

En utilisant l'équation (4.16), A^{2m} devient :

$$A^{2m} = \frac{2.p.3a'}{3} = 2.p.a'$$

mais $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3a'}{2} > 1$ ce qui est impossible, d'où $b \neq 2$.

4.2. Cas $b = 4$ et $3|a$: — A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{4} = \frac{p.a}{3} = \frac{p.3a'}{3} = p.a'$$

$$\text{et} \quad cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3.a'}{4} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow a' < 1$$

ce qui est impossible. Alors le cas $b = 4$ est impossible.

4.3. Cas $b = p$ et $3|a$: — On a :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{p}$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{p} = 4a' = (A^m)^2$$

$$\exists a" \ / \ a' = a"^2$$

$$et \quad B^nC^l = p - A^{2m} = b - 4a' = b - 4a"^2$$

Le calcul A^mB^n donne :

$$A^mB^n = p.\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} - 2a'$$

$$ou \quad A^mB^n + 2a' = p.\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{4.17}$$

Le membre à gauche de (4.17) est un entier et p aussi, alors $2\dfrac{\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ s'écrit sous la forme :

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \Longrightarrow p = b = k_2.k_3$, $k_3 \in \mathbb{N}^*$.

** A-1- On suppose que $k_3 \neq 1$, on obtient :

$$A^m(A^m + 2B^n) = k_1.k_3$$

Soit μ un entier premier avec $\mu|k_3$, alors $\mu|b$ et $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** A-1-1- Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A$ et $\mu|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a' \Longrightarrow \mu|4a' \Longrightarrow (\mu = 2$ mais $2|a')$ ou $(\mu|a')$. Alors $\mu|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** A-1-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. On écrit $\mu|(A^m + 2B^n)$ comme :

$$A^m + 2B^n = \mu.t'$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2 t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p :

$$p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$$

Comme $p = b = k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \Longrightarrow \exists\mu'$ et $b = \mu\mu'$, ainsi on peut écrire :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m)$$

De la dernière équation, on obtient $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** A-1-2-1- Si $\mu|B^n$ ce qui en contradiction avec $\mu \nmid B^n$.

** A-1-2-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, on arrive à :

$$\mu|3B^n \begin{cases} \mu|B^n \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases}$$

** A-1-2-2-1- Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ c'est la contradiction avec $\mu \nmid B$ citée ci-dessus.

** A-1-2-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ alors la contradiction avec a, b copremiers.

** A-2- On assume maintenant $k_3 = 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_1$$
$$b = k_2$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

En prenant le carré de la dernière équation, on obtient :

$$\frac{4}{3}sin^2\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$
$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$
$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}.\frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

Finalement :

$$4^2a'(p - a) = k_1^2 \tag{4.18}$$

mais $a' = a"^2$, alors $p - a$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = p - a = b - a = b - 3a"^2 \Longrightarrow \lambda^2 + 3a"^2 = b$$

L'équation (4.18) devient :

$$4^2a"^2\lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = 4a"\lambda$$

en prenant la racine carrée positive, mais $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = 2a"(A^m + 2B^n)$, par suite :

$$A^m + 2B^n = 2\lambda \Longrightarrow \lambda = a" + B^n \tag{4.19}$$

** A-2-1- Comme $A^m = 2a" \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^iA_1$, avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$, par suite $A^m = 2a" = 2^{im}A_1^m \Longrightarrow a" = 2^{im-1}A_1^m$, or $im \geq 3 \Longrightarrow 4|a"$. Comme $p = b = A^{2m}+A^mB^n+B^{2n} = \lambda = 2^{im-1}A_1^m + B^n$. Prenons son carré, d'où :

$$\lambda^2 = 2^{2im-2}A_1^{2m} + 2^{im}A_1^mB^n + B^{2n}$$

Comme $im \geq 3$, on peut écrire $\lambda^2 = 4\lambda_1 + B^{2n} \Longrightarrow \lambda^2 \equiv B^{2n} (\bmod 4) \Longrightarrow \lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 0 (\bmod 4)$ ou $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 1 (\bmod 4)$.

** A-2-1-1- On suppose que $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 0 (\bmod 4) \Longrightarrow 4|\lambda^2 \Longrightarrow 2|(b - a)$. Or $2|a$ car $a = 3a' = 3a"^2 = 3 \times 2^{2(im-1)}A_1^{2m}$ et $im \geq 3$. Par suite $2|b$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** A-2-1-2- On suppose maintenant que $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 1 (\bmod 4)$. Comme $A^m = 2^{im-1}A_1^m$ et $im - 1 \geq 2$, d'où $A^m \equiv 0 (\bmod 4)$. Comme $B^{2n} \equiv 1 (\bmod 4)$, alors B^n ne peut être que $B^n \equiv 1 (\bmod 4)$ ou $B^n \equiv 3 (\bmod 4)$ ce qui donne dans les deux cas $B^nC^l \equiv 1 (\bmod 4)$.

On a aussi $p = b = A^{2m} + A^mB^n + B^{2n} = 4a' + B^n.C^l = 4a"^2 + B^nC^l$ soit $B^nC^l = \lambda^2 - a"^2 = B^n.C^l$, par suite $\lambda, a" \in \mathbb{N}^*$ sont solutions de l'équation diophantine :

$$x^2 - y^2 = N \tag{4.20}$$

avec $N = B^nC^l > 0$. Soit $Q(N)$ le nombre des solutions de (4.20) et $\tau(N)$ le nombre de façon d'écrire les facteurs de N, alors on annonce le résultat suivant concernant les solutions de (4.20) (voir théorème 27.3 de [**2**]) :
- si $N \equiv 2 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = 0$;
- si $N \equiv 1$ ou $N \equiv 3 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N)/2]$;
- si $N \equiv 0 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N/4)/2]$.

Soit (u, v), $u, v \in \mathbb{N}^*$ un autre couple solution de l'équation (4.20), alors $u^2 - v^2 = x^2 - y^2 = N = B^nC^l$, mais $\lambda = x$ et $a" = y$ vérifie l'équation (4.19) soit $x - y = B^n$, par suite u, v vérifient aussi $u - v = B^n$, ce qui donne $u + v = C^l$, par suite $u = x = \lambda = a" + B^n$ et $v = a"$. On a ainsi démontré l'unicité des solutions de l'équation (4.20) avec la condition $x - y = B^n$. Comme $N = B^nC^l \equiv 1 (\bmod 4) \Longrightarrow Q(N) = [\tau(N)/2] > 1$. Or $Q(N) = 1$, d'où la contradiction.

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

On va vérifier la condition (3.15) donnée par $b < 4a < 3b$. Dans notre cas, la condition devient :

$$p < 3A^{2m} < 3p \quad avec \quad p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n$$

et $3A^{2m} < 3p \Longrightarrow A^{2m} < p$ est donc vérifié. Si :

$$p < 3A^{2m} \Longrightarrow 2A^{2m} - A^mB^n - B^{2n} \overbrace{>}^{?} 0$$

En étudiant le signe du polynôme $Q(Y) = 2Y^2 - B^nY - B^{2n}$ et en prenant $Y = A^m > B^n$, la condition $2A^{2m} - A^mB^n - B^{2n} > 0$ est vérifiée, par suite, la condition $b < 4a < 3b$ est vraie.

Dans la suite du papier, on vérifie facilement que la condition $b < 4a < 3b$ implique à vérifier $A^m > B^n$ ce qu'est vrai.

4.4. Cas $b|p \Rightarrow\ p = b.p', p' > 1$**,** $b \neq 2$**,** $b \neq 4$ **et** $3|a$ **:** —

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.b.p'.3.a'}{3.b} = 4.p'a'$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \dfrac{p}{3}$ d'où en utilisant $cos^2\frac{\theta}{3} = \dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3.a'}{b}\right) = p.\left(1 - \frac{4.a'}{b}\right) = p'(b - 4a')$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, on a alors :

$$B^nC^l = p'(b - 4a')$$
$$\text{et} \quad A^{2m} = 4.p'.a'$$

** B-1- On suppose que p' est premier, d'où $A^{2m} = 4ap' = (A^m)^2 \Longrightarrow p'|a$. Or $B^nC^l = p'(b - 4a') \Longrightarrow p'|B^n$ ou $p'|C^l$.

** B-1-1- Si $p'|B^n \Longrightarrow p'|B \Longrightarrow B = p'B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p'^{n-1}B_1^nC^l = b - 4a'$. Or $n > 2$ alors $(n-1) > 1$ et $p'|a'$, d'où $p'|b \Longrightarrow a$ et b non copremiers, d'où la contradiction.

** B-1-2- Si $p'|C^l \Longrightarrow p'|C$. La même méthode utilisée ci-dessus, on obtient le même résultat.

** B-2- On considère que p' n'est pas un nombre premier.

** B-2-1- p', a sont supposés copremiers : $A^{2m} = 4ap' \Longrightarrow A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $p' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** B-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \Longrightarrow 2 \nmid p_1$. Mais $p' = p_1^2$.

** B-2-1-1-1- Si p_1 est premier, c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** B-2-1-1-2- On suppose que p_1 est non premier, il s'écrit sous la forme $p_1 = \omega^m \Longrightarrow p' = \omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = \omega^{2m}(b - 4a')$.

** B-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** B-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^jB_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega^{2m-nj}(b - 4a')$.

** B-2-1-1-2-1-1-1- Si $2m - n.j = 0$, on obtient $B_1^n.C^l = b - 4a'$. Comme $C^l = A^m + B^n \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, et $\omega|(b - 4a')$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-1-2- Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, on a $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$ et $\omega|(b - 4a')$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-1-3- Si $2m-nj<0 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m}B_1^n.C^l = b-4a'$. Comme $\omega|C$ utilisant $C^l = A^m+B^n$ d'où $C=\omega^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m+h.l}B_1^n.C_1^l = b-4a'$. Si $n.j-2m+h.l<0 \Longrightarrow \omega|B_1^nC_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc si $n.j-2m+h.l>0$ et $\omega|(b-4a')$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-2- On obtient les mêmes résultats si $\omega|C^l$.

** B-2-1-1-2-2- Maintenant, $p' = \omega^{2m}$ et ω non premier, on écrit $\omega = \omega_1^f.\Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^nC^l = \omega_1^{2f.m}\Omega^{2m}(b-4a') \Longrightarrow \omega_1|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** B-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \Longrightarrow \omega_1|B \Longrightarrow B=\omega_1^jB_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega_1^{2mf-nj}\Omega^{2m}(b-4a')$:

** B-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m-n.j=0$, on obtient $B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(b-4a')$. Comme $C^l = A^m+B^n \Longrightarrow \omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C \Longrightarrow \omega_1|(b-4a')$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega_1 \nmid b$, donc $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-2-1-2- Si $2f.m-n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, on a $\omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C \Longrightarrow \omega_1|(b-4a')$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-2-1-3- Si $2f.m-n.j<0 \Longrightarrow \omega_1^{n.j-2m.f}B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(b-4a')$. Comme $\omega_1|C$ utilisant $C^l = A^m+B^n$, d'où $C=\omega_1^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m.f+h.l}B_1^n.C_1^l = \Omega^{2m}(b-4a')$. Si $n.j-2m.f+h.l<0 \Longrightarrow \omega_1|B_1^nC_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc si $n.j-2m.f+h.l>0$ et $\omega_1|(b-4a')$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-2-2- On obtient les mêmes résultats si $\omega_1|C^l$.

** B-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \Longrightarrow 2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid a$. Or $p' = p_1^2$.

** B-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, on obtient $A^m = 4a' \Longrightarrow 2|a'$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** B-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$, Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1}\omega^m \Longrightarrow p' = 2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(b-4a') \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** B-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^nC^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(b-4a')$ il s'ensuit que si $2|(b-4a') \Longrightarrow 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-2-2-2- Si $2|C^l$, de la même manière ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** B-2-2- p', a sont supposés non copremiers. Soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p'$.

** B-2-2-1- On suppose que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap' \Longrightarrow 3|A$, or $3|p' \Longrightarrow 3|p$, comme $p = A^{2m}+B^{2n}+A^mB^n \Longrightarrow 3|B^{2n} \Longrightarrow 3|B$, par suite $3|C^l \Longrightarrow 3|C$. On écrit $A = 3^iA_1$, $B = 3^jB_1$, $C = 3^hC_1$ avec 3 copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im}A_1^{2m} + 3^{2nj}B_1^{2n} + 3^{im+jn}A_1^mB_1^n = 3^k.g$ avec $k = min(2im, 2jn, im+jn)$ et $3 \nmid g$. On a aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|p'$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1 = 3a' \Longrightarrow a' = 3^{\alpha-1}a_1$, $3 \nmid a_1$ et $p' = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4a'p' = 3^{2im}A_1^{2m} =$

$4\times 3^{\alpha-1+\mu}.a_1.p_1 \Longrightarrow \alpha+\mu-1=2im$. Comme $p=bp'=b.3^{\mu}p_1=3^{\mu}.b.p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est k, l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est μ. Si $3|b$ c'est la contradiction avec a,b copremiers. Donc, on suppose que $3\nmid b$, et on a l'égalité des exposants : $min(2im,2jn,im+jn)=\mu$ en rappelant que $\alpha+\mu-1=2im$. Mais $B^nC^l=p'(b-4a')$ ce qui donne $3^{(nj+hl)}B_1^nC_1^l=3^{\mu}p_1(b-4\times 3^{(\alpha-1)}a_1)$. On a aussi $A^m+B^n=C^l$ donne $3^{im}A_1^m+3^{jn}B_1^n=3^{hl}C_1^l$. Posons $\epsilon=min(im,jn)$, on a $\epsilon=hl=min(im,jn)$. On a alors les conditions :

$$k=min(2im,2jn,im+jn)=\mu \tag{4.21}$$

$$\alpha+\mu-1=2im \tag{4.22}$$

$$\epsilon=hl=min(im,jn) \tag{4.23}$$

$$3^{(nj+hl)}B_1^nC_1^l=3^{\mu}p_1(b-4\times 3^{(\alpha-1)}a_1) \tag{4.24}$$

** B-2-2-1-1- $\alpha=1\Longrightarrow a=3a_1=3a'$ et $3\nmid a_1$, l'équation (4.22) devient :

$$\mu=2im$$

et la première équation (4.21) s'écrit :

$$k=min(2im,2jn,im+jn)=2im$$

- Si $k=2im$, par suite $2im\leq 2jn\Longrightarrow im\leq jn\Longrightarrow hl=im$, et (4.24) donne $\mu=2im=nj+hl=im+nj\Longrightarrow im=jn=hl$. Par suite $3|A,3|B$ et $3|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $k=2jn\Longrightarrow 2jn=2im\Longrightarrow im=jn=hl$. Par suite $3|A,3|B$ et $3|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $k=im+jn=2im\Longrightarrow im=jn\Longrightarrow \epsilon=hl=im=jn$ cas étudié ci-dessus et par suite $3|A,3|B$ et $3|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-2-1-2- $\alpha>1\Longrightarrow \alpha\geq 2$ et $a'=3^{\alpha-1}a_1$.

- Si $k=2im\Longrightarrow 2im=\mu$, or $\mu=2im+1-\alpha$ ce qui impossible.
- Si $k=2jn=\mu\Longrightarrow 2jn=2im+1-\alpha$. On obtient $2jn<2im\Longrightarrow jn<im\Longrightarrow 2jn<im+jn$, $k=2jn$ est bien le minimum de $(2im,2jn,im+jn)$. On obtient $jn=hl<im$ et l'équation (4.24) devient :

$$B_1^nC_1^l=p_1(b-4\times 3^{(\alpha-1)}a_1)$$

La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $k=im+jn\leq 2im\Longrightarrow jn\leq im$ et $k=im+jn\leq 2jn\Longrightarrow im\leq jn\Longrightarrow im=jn\Longrightarrow k=im+jn=2im=\mu$ or $\mu=2im+1-\alpha$ ce qui impossible.
- Si $k=im+jn<2im\Longrightarrow jn<im$ et $2jn<im+jn=k$ ce qui est une contradiction avec $k=min(2im,2jn,im+jn)$.

** B-2-2-2- On suppose que $\omega\neq 3$. On écrit $a=\omega^{\alpha}a_1$ avec $\omega\nmid a_1$ et $p'=\omega^{\mu}p_1$ avec $\omega\nmid p_1$. Comme $A^{2m}=4ap'=4\omega^{\alpha+\mu}.a_1.p_1\Longrightarrow \omega|A\Longrightarrow A=\omega^iA_1$, $\omega\nmid A_1$. Or $B^nC^l=p'(b-4a')=\omega^{\mu}p_1(b-4a')\Longrightarrow \omega|B^nC^l\Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** B-2-2-2-1- $\omega|B^n\Longrightarrow \omega|B\Longrightarrow B=\omega^jB_1$ et $\omega\nmid B_1$. De $A^m+B^n=C^l\Longrightarrow \omega|C^l\Longrightarrow \omega|C$. Comme $p=bp'=\omega^{\mu}bp_1=\omega^k(\omega^{2im-k}A_1^{2m}+\omega^{2jn-k}B_1^{2n}+\omega^{im+jn-k}A_1^mB_1^n)$ avec $k=min(2im,2jn,im+jn)$. Par suite :

- Si $\mu=k$, alors $\omega\nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $k>\mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a,b copremiers.
- Si $k<\mu$, il s'ensuit de :

$$\omega^{\mu}bp_1=\omega^k(\omega^{2im-k}A_1^{2m}+\omega^{2jn-k}B_1^{2n}+\omega^{im+jn-k}A_1^mB_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** B-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C=\omega^h C_1$ avec $\omega\nmid C_1$. De $A^m+B^n=C^l \Longrightarrow \omega|(C^l-A^m) \Longrightarrow \omega|B$. Par suite, on obtient les mêmes résultats de B-2-2-2-1- ci-dessus.

4.5. Cas $b=2p$ et $3|a$: — On a :

$$cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{a}{b}=\frac{3a'}{2p}\Longrightarrow A^{2m}=\frac{4p.a}{3b}=\frac{4p}{3}.\frac{3a'}{2p}=2a'=(A^m)^2\Longrightarrow 2|a'\Longrightarrow 2|a$$

Alors $2|a$ et $2|b$ ce qui est en contradiction avec a,b copremiers.

4.6. Cas $b=4p$ et $3|a$: — On a :

$$cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{a}{b}=\frac{3a'}{4p}\Longrightarrow A^{2m}=\frac{4p.a}{3b}=\frac{4p}{3}.\frac{3a'}{4p}=a'=(A^m)^2=a"^2$$
$$\text{avec}\quad A^m=a"$$

Calculons A^mB^n, on obtient :

$$A^mB^n=\frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3}-\frac{2p}{3}cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3}-\frac{a'}{2}\Longrightarrow$$
$$A^mB^n+\frac{A^{2m}}{2}=\frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3}$$

soit :

$$A^{2m}+2A^mB^n=\frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{4.25}$$

Le membre à gauche de (4.25) est un entier et p est un entier, alors $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ sera écrit :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3}=\frac{k_1}{k_2}$$

où k_1,k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p\Longrightarrow p=k_2.k_3$.

** C-1- Premièrement, on suppose que $k_3\neq 1$. D'où :

$$A^{2m}+2A^mB^n=k_3.k_1$$

Soit μ un entier premier et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m+2B^n)\Longrightarrow\mu|A^m$ ou $\mu|(A^m+2B^n)$.

** C-1-1- Si $\mu|(A^m=a")\Longrightarrow\mu|(a"^2=a')\Longrightarrow\mu|(3a'=a)$. Comme $\mu|k_3\Longrightarrow\mu|p\Longrightarrow\mu|(4p=b)$, d'où la contradiction avec a,b copremiers.

** C-1-2- Si $\mu|(A^m+2B^n)\Longrightarrow\mu\nmid A^m$ et $\mu\nmid 2B^n$, alors :

$$\mu\neq 2\quad et\quad \mu\nmid B^n \tag{4.26}$$

$\mu|(A^m+2B^n)$, on écrit :

$$A^m+2B^n=\mu.t'$$

Alors :

$$A^m+B^n=\mu t'-B^n\Longrightarrow A^{2m}+B^{2n}+2A^mB^n=\mu^2t'^2-2t'\mu B^n+B^{2n}$$
$$\Longrightarrow p=t'^2\mu^2-2t'B^n\mu+B^n(B^n-A^m)$$

Comme $b=4p=4k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b\Longrightarrow\exists\mu'$ tel que $b=\mu.\mu'$, on obtient :

$$\mu'.\mu=\mu(4\mu t'^2-8t'B^n)+4B^n(B^n-A^m)$$

La dernière équation implique $\mu|4B^n(B^n - A^m)$, mais $\mu \neq 2$ alors $\mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** C-1-1-1- Si $\mu|B^n \Longrightarrow$ c'est la contradiction avec (4.26).

** C-1-1-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et en utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, on a :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases}$$

** C-1-1-2-1- Si $\mu|B^n$ c'est contradictoire avec (4.26).

** C-1-1-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers.

** C-2- On assume maintenant que $k_3 = 1$, d'où :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_1 \tag{4.27}$$

$$p = k_2$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{p}$$

On prend le carré de la dernière équation, on obtient :

$$\frac{4}{3}sin^2\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}.\frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

Finalement :

$$a'(4p - 3a') = k_1^2 \tag{4.28}$$

mais $a' = a"^2$, alors $4p - 3a'$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = 4p - 3a' = 4p - a = b - a$$

L'équation (4.28) devient :

$$a"^2\lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = a"\lambda \tag{4.29}$$

en prenant la racine carrée positive. Utilisant (4.27), on a :

$$k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = a"(A^m + 2B^n)$$

Par suite :

$$A^m + 2B^n = \lambda$$

On considère maintenant que $b - a = \lambda^2 \Longrightarrow \lambda^2 + 3a"^2 = b$, par suite le couple $(\lambda, a")$ est une solution de l'équation diophantine :

$$X^2 + 3Y^2 = b \tag{4.30}$$

avec $X = \lambda$ et $Y = a"$. Or d'après un théorème sur les solutions de l'équation donnée par (4.30), b s'écrit sous la forme (voir théorème 37.4 de [**3**]) :

$$b = 2^{2s} \times 3^t.p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r}$$

où les p_i sont des nombres premiers vérifiant $p_i \equiv 1 (\bmod 6)$, les q_j sont aussi des nombres premiers tels que $q_j \equiv 5 (\bmod 6)$. Alors, comme $b = 4p$:

- si $t \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, mais $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-1- Donc, on suppose que p s'écrit sous la forme :

$$p = p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r}$$

avec $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6)$ et $q_j \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$. Finalement, on obtient que $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6)$. On va vérifier alors si cette condition ne donne pas des contradictions.

On va présenter le tableau des valeurs modulo 6 de $p = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n}$ en fonction des valeurs de $A^m, B^n (\mathrm{mod}\, 6)$. On obtient le tableau ci-dessous :

A^m, B^n	0	1	2	3	4	5
0	0	**1**	4	3	4	**1**
1	**1**	3	**1**	**1**	3	**1**
2	4	**1**	0	**1**	4	3
3	3	**1**	**1**	3	**1**	**1**
4	4	3	4	**1**	0	**1**
5	**1**	**1**	3	**1**	**1**	3

Table 1. Tableau de $p\, (\mathrm{mod}\, 6)$

** C-2-2-1-1- Cas $A^m \equiv 0 (\mathrm{mod} 6) \Longrightarrow 2 | (A^m = a") \Longrightarrow 2 | (a' = a"^2) \Longrightarrow 2 | a$, or $2 | b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Tous les cas de la première ligne du tableau 1 sont à rejeter.

** C-2-2-1-2- Cas $A^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6)$ et $B^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 6)$, d'où $2 | B^n \Longrightarrow B^n = 2B'$, alors p s'écrit $p = (A^m + B')^2 + 3B'^2$ avec $(p, 3) = 1$, sinon $3 | p$, par suite $3 | b$, or $3 | a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc le couple $(A^m + B', B')$ est solution de l'équation diophantine :

$$x^2 + 3y^2 = p \tag{4.31}$$

La solution $x = A^m + B', y = B'$ est unique vue que $x - y$ vérifie $x - y = A^m$. En effet, si (u, v) un autre couple solution de (4.31), avec $u, v \in \mathbb{N}^*$, alors on a :

$$u^2 + 3v^2 = p$$
$$u - v = A^m$$

D'où $u = v + A^m$, on obtient l'équation du second degré $4v^2 + 2vA^m - 2B'(A^m + 2B') = 0$ qui donne comme racine positive $v_1 = B' = y$, par suite $u = A^m + B' = x$. Il en résulte que p dans (4.31) a une représentation unique sous la forme $X^2 + 3Y^2$ avec $X, 3Y$ copremiers. Comme p est un nombre entier impair, on applique l'un des théorèmes d'Euler sur les nombres convenables "numerus idoneus" (voir [**4**],[**5**]) à savoir : *Si $n > 1$ est un entier impair qui est représenté de façon unique telle que $n = x^2 + 3y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ et x et $3y$ sont relativement premiers, alors n est premier.* Donc p est premier et l'écriture $4p$ est unique (il suffit de poser $U = 2u$, $V = 2v$, avec $U^2 + 3V^2 = 4p$ et $U - V = 2A^m$). Or $b = 4p \Longrightarrow \lambda^2 + 3a"^2 = (2(A^m + B'))^2 + 3(2B')^2$ l'unicité de l'écriture de $4p$ donne :

$$\lambda = 2(A^m + B') = 2a" + B^n = 2a" + B^n$$
$$et \quad a" = 2B' = B^n = A^m$$

Or $A^m > B^n$, d'où la contradiction.

** C-2-2-1-3- Cas $A^m \equiv 1 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 2 (\bmod 6)$, d'où B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-4- Cas $A^m \equiv 1 (\text{mod} 6)$ et $B^n \equiv 3 (\text{mod} 6)$, d'où $3|B^n \Longrightarrow B^n = 3B'$. On peut écrire $b = 4p = (2A^m + 3B')^2 + 3(3B')^2 = \lambda^2 + 3a"^2$. L'unicité de l'écriture de b comme $x^2 + 3y^2 = \lambda^2 + 3a"^2 \Longrightarrow a" = A^m = 3B' = B^n$, d'où la contradiction avec $A^m > B^n$.

** C-2-2-1-5- Cas $A^m \equiv 1 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 5 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 0 (\bmod 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-6- Cas $A^m \equiv 2 (\bmod 6) \Longrightarrow 2|a" \Longrightarrow 2|a$, or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-1-7- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 4 (\bmod 6) \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow C^l = 2C'$, on peut écrire que $p = (C' - B^n)^2 + 3C'^2$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-8- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 2 (\bmod 6)$, d'où B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-9- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 4 (\bmod 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-10- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 5 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 2 (\bmod 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-11- Cas $A^m \equiv 4 (\text{mod} 6) \Longrightarrow 2|a" \Longrightarrow 2|a$, or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-1-12- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 0 (\bmod 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-13- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 0 (\bmod 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-14- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 3 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 2 (\bmod 6) \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow C^l = 2C'$, p s'écrit $p = (C' - B^n)^2 + 3C'^2$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-15- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 4 (\bmod 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

On a achevé l'étude de tous les cas du tableau 1 ayant tous des contradictions.

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

4.7. Cas $3|a$ et $b = 2p'$ $b \neq 2$ avec $p'|p$: — $3|a \Longrightarrow a = 3a'$, $b = 2p'$ avec $p = k.p'$, d'où :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{6p'} = 2.k.a'$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \dfrac{p}{3}$ d'où en utilisant $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3.a'}{b}\right) = p.\left(1 - \frac{4.a'}{b}\right) = k(p' - 2a')$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, on a alors :

$$B^nC^l = k(p' - 2a') \tag{4.32}$$

$$\text{et} \quad A^{2m} = 2k.a' \tag{4.33}$$

** D-1- On suppose que k est premier.

** D-1-1- Si $k = 2$, on a donc $p = 2p' = b \Longrightarrow 2|b$, mais $A^{2m} = 4a' = (A^m)^2 \Longrightarrow A^m = 2a"$ avec $a' = a"^2$, par suite $2|a" \Longrightarrow 2|(a = 3a"^2)$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** D-1-2- On suppose $k \neq 2$. De $A^{2m} = 2k.a' = (A^m)^2 \Longrightarrow k|a'$ et $2|a'$, d'où $a' = 2.k.a"^2 \Longrightarrow A^m = 2.k.a"$. Par suite $k|A^m \Longrightarrow k|A \Longrightarrow A = k^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $k \nmid A_1$. $k^{im}A_1^m = 2ka" \Longrightarrow 2a" = k^{im-1}A_1^m$. De $B^nC^l = k(p' - 2a') \Longrightarrow k|(B^nC^l) \Longrightarrow k|B^n$ ou $k|C^l$.

** D-1-2-1- On suppose que $k|B^n \Longrightarrow k|B \Longrightarrow B = k^j.B_1$ avec $j \geq 1$ et $k \nmid B_1$. Par suite $k^{nj-1}B_1^nC^l = p' - 2a' = p' - 4ka"^2$. Comme $n \geq 3 \Longrightarrow nj - 1 \geq 2$, d'où $k|p'$ mais $k \neq 2 \Longrightarrow k|(2p' = b)$, or $k|a' \Longrightarrow k|(3a' = a)$. Il s'ensuit la contradiction avec a, b copremiers.

** D-1-2-2- Si $k|C^l$ on obtient le même résultat.

** D-2- On suppose k est non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k = \omega^s.k_1$, avec $s \geq 1$, $\omega \nmid k_1$. Les équations (4.32-4.33) deviennent :

$$B^nC^l = \omega^s.k_1(p' - 2a')$$

$$\text{et} \quad A^{2m} = 2\omega^s.k_1.a'$$

** D-2-1- On suppose que $\omega = 2$, on a alors les équations :

$$A^{2m} = 2^{s+1}.k_1.a' \tag{4.34}$$

$$B^nC^l = 2^s.k_1(p' - 2a') \tag{4.35}$$

** D-2-1-1- Cas : $2|a' \Longrightarrow 2|a$, mais $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-2-1-2- Cas : $2 \nmid a'$. Comme $2 \nmid k_1$, l'équation (4.34) donne $2|A^{2m} \Longrightarrow A = 2^iA_1$, avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. On déduit que $2im = s + 1$.

** D-2-1-2-1- On suppose que $2 \nmid (p' - 2a') \Longrightarrow 2 \nmid p'$. De l'équation (4.35), on obtient que $2|B^nC^l \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** D-2-1-2-1-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^jB_1$ avec $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$, par suite $B_1^nC^l = 2^{s-jn}k_1(p' - 2a')$:

- Si $s - jn \geq 1$, alors $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $s - jn \leq 0$, de $B_1^nC^l = 2^{s-jn}k_1(p' - 2a') \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** D-2-1-2-1-2- Utilisant le même raisonnement, on obtient les mêmes résultats si $2|C^l$.

** D-2-1-2-2- On suppose maintenant que $2|(p'-2a') \Longrightarrow p'-2a' = 2^\mu.\Omega$, avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. On rappelle que $2 \nmid a'$. L'équation (4.35) s'écrit :

$$B^nC^l = 2^{s+\mu}.k_1.\Omega$$

Cette dernière équation implique que $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** D-2-1-2-2-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^jB_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Par suite : $B_1^nC^l = 2^{s+\mu-jn}.k_1.\Omega$:
- Si $s+\mu-jn \geq 1$, alors $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $s+\mu-jn \leq 0$, de $B_1^nC^l = 2^{s+\mu-jn}k_1.\Omega \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** D-2-1-2-2-2- On obtient les mêmes résultats si $2|C^l$.

** D-2-2- On suppose que $\omega \neq 2$. On a alors les équations :

$$A^{2m} = 2\omega^s.k_1.a' \tag{4.36}$$
$$B^nC^l = \omega^s.k_1.(p'-2a') \tag{4.37}$$

Comme $\omega \neq 2$, de l'équation (4.36), on a $2|(k_1.a')$. Si $2|a' \Longrightarrow 2|a$, mais $2|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** D-2-2-1- $2 \nmid a'$ et $2|k_1 \Longrightarrow k_1 = 2^\mu.\Omega$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. De l'équation (4.36), on a $2|A^{2m} \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^iA_1$ avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$, par suite $2im = 1+\mu$. L'équation (4.37) devient :

$$B^nC^l = \omega^s.2^\mu.\Omega.(p'-2a') \tag{4.38}$$

De l'équation (4.38), on obtient $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** D-2-2-1-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^jB_1$, avec $j \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid B_1$.

** D-2-2-1-1-1- On suppose que $2 \nmid (p'-2a')$, alors on a $B_1^nC^l = \omega^s2^{\mu-jn}\Omega(p'-2a')$:
- Si $\mu-jn \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $\mu-jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** D-2-2-1-1-2- On suppose que $2|(p'-2a') \Longrightarrow p'-2a' = 2^\alpha.P$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid P$. Il s'ensuit que $B_1^nC^l = \omega^s2^{\mu+\alpha-jn}\Omega.P$:
- Si $\mu+\alpha-jn \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $\mu+\alpha-jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** D-2-2-1-2- On suppose maintenant que $2|C^n \Longrightarrow 2|C$. En utilisant la même méthode décrite ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

4.8. Cas $3|a$ et $b=4p'$ $b\neq 2$ avec $p'|p$: — $3|a \Longrightarrow a=3a'$, $b=4p'$ avec $p=k.p'$, $k\neq 1$ sinon $b=4p$ ce cas a été étudié (voir paragraphe 4.6), alors on a :

$$A^{2m}=\frac{4.p}{3}.\frac{a}{b}=\frac{4.k.p'.3.a'}{12p'}=k.a'$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l=\sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3}-cos^2\frac{\theta}{3}\right)=\sqrt[3]{\rho^2}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2}=\dfrac{p}{3}$, d'où en utilisant $cos^2\frac{\theta}{3}=\dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l=\sqrt[3]{\rho^2}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)=\frac{p}{3}\left(3-4\frac{3.a'}{b}\right)=p.\left(1-\frac{4.a'}{b}\right)=k(p'-a')$$

Comme $p=b.p'$, et $p'>1$, on a :

$$B^nC^l=k(p'-a') \tag{4.39}$$

$$\text{et}\quad A^{2m}=k.a' \tag{4.40}$$

** E-1- On suppose que k est premier. De $A^{2m}=k.a'=(A^m)^2\Longrightarrow k|a'$ et $a'=k.a"^2\Longrightarrow A^m=k.a"$. Par suite $k|A^m\Longrightarrow k|A\Longrightarrow A=k^i.A_1$ avec $i\geq 1$ et $k\nmid A_1$. $k^{mi}A_1^m=ka"\Longrightarrow a"=k^{mi-1}A_1^m$. De $B^nC^l=k(p'-a')\Longrightarrow k|(B^nC^l)\Longrightarrow k|B^n$ ou $k|C^l$.

** E-1-1- On suppose que $k|B^n\Longrightarrow k|B\Longrightarrow B=k^j.B_1$ avec $j\geq 1$ et $k\nmid B_1$. Par suite $k^{n.j-1}B_1^nC^l=p'-a'$. Comme $n.j-1\geq 2\Longrightarrow k|(p'-a')$. Or $k|a'\Longrightarrow k|a$, d'où $k|p'\Longrightarrow k|(4p'=b)$ et on arrive à la contradiction que a,b sont copremiers.

** E-1-2- On suppose que $k|C^l$, en utilisant le même raisonnement avec l'hypothèse $k|B^n$ ci-dessus, on obtient le même résultat.

** E-2- On suppose k est non premier.

** E-2-1- On prend $k=4\Longrightarrow p=4p'=b$, c'est le cas 4.3 déjà étudié ci-dessus.

** E-2-2- On suppose que $k\geq 6$ non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k=\omega^s.k_1$, avec $s\geq 1$, $\omega\nmid k_1$. Les équations (4.39-4.40) deviennent :

$$B^nC^l=\omega^s.k_1(p'-a') \tag{4.41}$$

$$\text{et}\quad A^{2m}=\omega^s.k_1.a' \tag{4.42}$$

** E-2-2-1- On suppose que $\omega=2$.

** E-2-2-1-1- Si $2|a'\Longrightarrow 2|(3a'=a)$, mais $2|(4p'=b)$, par suite la contradiction avec a,b copremiers.

** E-2-2-1-2- On considère que $2\nmid a'$. De l'équation (4.42), il s'ensuit que $2|A^{2m}\Longrightarrow 2|A\Longrightarrow A=2^iA_1$ avec $2\nmid A_1$ et :

$$B^nC^l=2^sk_1(p'-a')$$

** E-2-2-1-2-1- Supposons que $2\nmid(p'-a')$, de l'expression ci-dessus, on a $2|(B^nC^l)\Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** E-2-2-1-2-1-1- Si $2|B^n\Longrightarrow 2|B\Longrightarrow B=2^jB_1$ avec $2\nmid B_1$. Par suite $B_1^nC^l=2^{2im-jn}k_1(p'-a')$:

- Si $2im-jn\geq 1\Longrightarrow 2|C^l\Longrightarrow 2|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l=2^{im}A_1^m+2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im - jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** E-2-2-1-2-1-2- Si $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** E-2-2-1-2-2- On suppose que $2|(p'-a')$. Comme $2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid p'$. $2|(p'-a') \Longrightarrow p'-a' = 2^\alpha.P$ avec $\alpha \geq 1$ et $2 \nmid P$. L'équation (4.41) s'écrit :

$$B^nC^l = 2^{s+\alpha}k_1.P = 2^{2im+\alpha}k_1.P \tag{4.43}$$

d'où $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** E-2-2-1-2-2-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^jB_1$, avec $2 \nmid B_1$. L'équation (4.43) s'écrit $B_1^nC^l = 2^{2im+\alpha-jn}k_1P$:

- Si $2im + \alpha - jn \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, il n'a y pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im + \alpha - jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** E-2-2-1-2-2-2- On suppose que $2|C^l \Longrightarrow 2|C$. Utilisant la même méthode décrite ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** E-2-2-2- On suppose que $\omega \neq 2$. Rappelons les équations :

$$A^{2m} = \omega^s.k_1.a' \tag{4.44}$$

$$B^nC^l = \omega^s.k_1(p'-a') \tag{4.45}$$

** E-2-2-2-1- On suppose que ω, a' sont copremiers, donc $\omega \nmid a'$. De l'équation (4.44), on a $\omega|A^{2m} \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^iA_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s = 2im$.

** E-2-2-2-1-1- Supposons que $\omega \nmid (p'-a')$. De l'équation (4.45) ci-dessus, on a $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** E-2-2-2-1-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^jB_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{2im-jn}k_1(p'-a')$:

- Si $2im - jn \geq 1 \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, il n'a y pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im - jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n \Longrightarrow \omega|C^l$.

** E-2-2-2-1-1-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** E-2-2-2-1-2- Supposons que $\omega|(p'-a') \Longrightarrow \omega \nmid p'$ sinon $\omega|a'$. $\omega|(p'-a') \Longrightarrow p'-a' = \omega^\alpha.P$ avec $\alpha \geq 1$ et $\omega \nmid P$. L'équation (4.45) s'écrit :

$$B^nC^l = \omega^{s+\alpha}k_1.P = \omega^{2im+\alpha}k_1.P \tag{4.46}$$

d'où $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** E-2-2-2-1-2-1- On suppose que $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^jB_1$, avec $\omega \nmid B_1$. L'équation (4.46) s'écrit $B_1^nC^l = 2^{2im+\alpha-jn}k_1P$:

- Si $2im+\alpha-jn \geq 1 \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, il n'y a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im+\alpha-jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n \Longrightarrow \omega | C^l$.

** E-2-2-2-1-2-2- On suppose que $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$. Utilisant la même méthode décrite ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** E-2-2-2-2- On suppose que ω, a' ne sont pas copremiers, donc $a' = \omega^\beta.a"$ avec $\omega \nmid a"$. L'équation (4.44) devient :

$$A^{2m} = \omega^s k_1 a' = \omega^{s+\beta}k_1.a"$$

On a $\omega|A^{2m} \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s+\beta = 2im$.

** E-2-2-2-2-1- Supposons que $\omega \nmid (p'-a') \Longrightarrow \omega \nmid p' \Longrightarrow \omega \nmid (b = 4p')$. De l'équation (4.45), on a $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** E-2-2-2-2-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{s-jn}k_1(p'-a')$:

- Si $s-jn \geq 1 \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, il n'y a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $s-jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n \Longrightarrow \omega|C^l$.

** E-2-2-2-2-1-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** E-2-2-2-2-2- On suppose que $\omega|(p'-a' = p'-\omega^\beta.a") \Longrightarrow \omega|p' \Longrightarrow \omega|(4p' = b)$, mais $\omega|a' \Longrightarrow \omega|a$. D'où la contradiction avec a, b copremiers.

L'étude des cas du 4.8 est achevée.

4.9. Cas $3|a$ et $b|4p$:. — $a = 3a'$ et $4p = k_1 b$. Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{4p}{3}\dfrac{3a'}{b} = k_1 a'$ et B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3a'}{b}\right) = \frac{k_1}{4}(b-4a')$$

Comme B^nC^l est un entier, on doit avoir $4|k_1$, ou $4|(b-4a')$ ou ($2|k_1$ et $2|(b-4a')$).

** F-1- Si $k_1 = 1 \Rightarrow b = 4p$: c'est le cas 4.6.

** F-2- Si $k_1 = 4 \Rightarrow p = b$: c'est le cas 4.3.

** F-3- Si $k_1 = 2$ et $2|(b-4a')$: Dans ce cas, on a $A^{2m} = 2a' \Longrightarrow 2|a' \Longrightarrow 2|a$. $2|(b-4a') \Longrightarrow 2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** F-4- Si $2|k_1$ et $2|(b-4a')$: $2|(b-4a') \Longrightarrow b - 4a' = 2^\alpha\lambda$, α et $\lambda \in \mathbb{N}^* \geq 1$ avec $2 \nmid \lambda$; $2|k_1 \Longrightarrow k_1 = 2^t k_1'$ avec $t \geq 1 \in \mathbb{N}^*$ avec $2 \nmid k_1'$ et on a :

$$A^{2m} = 2^t k_1' a' \tag{4.47}$$

$$B^nC^l = 2^{t+\alpha-2}k_1'\lambda \tag{4.48}$$

De l'équation (4.47), on a $2|A^{2m} \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i A_1$, $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$.

** F-4-1- On suppose que $t = \alpha = 1$, par suite les équations (4.47-4.48) deviennent :

$$A^{2m} = 2k_1'a' \tag{4.49}$$

$$B^nC^l = k_1'\lambda \tag{4.50}$$

De l'équation (4.49) il en résulte $2|a' \Longrightarrow 2|(a = 3a')$. Or $b = 4a' + 2\lambda \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** F-4-2- On suppose maintenant que $t + \alpha - 2 \geq 1$ et on a les expressions :

$$A^{2m} = 2^t k'_1 a' \tag{4.51}$$
$$B^n C^l = 2^{t+\alpha-2} k'_1 \lambda \tag{4.52}$$

** F-4-2-1- On suppose maintenant que $2|a' \Longrightarrow 2|a$, or $b = 2^\alpha \lambda + 4a' \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** F-4-2-2- On suppose maintenant que $2 \nmid a'$. De (4.51), on a $2|A^{2m} \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i A_1$ et $B^n C^l = 2^{t+\alpha-2} k'_1 \lambda \Longrightarrow 2|B^n C^l \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** F-4-2-2-1- On suppose que $2|B^n$. On a donc $2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$, $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. L'équation (4.52) devient $B_1^n C^l = 2^{t+\alpha-2-jn} k'_1 \lambda$:
- Si $t + \alpha - 2 - jn > 0 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, il n'y a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $t + \alpha - 2 - jn < 0 \Longrightarrow 2|k'_1 \lambda$, mais $2 \nmid k'_1$ et $2 \nmid \lambda$. Donc ce cas est impossible.
- Si $t+\alpha-2-jn = 0 \Longrightarrow B_1^n C^l = k'_1 \lambda \Longrightarrow 2 \nmid C^l$ ce qui en contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et ce cas est impossible.

** F-4-2-2-2- On suppose que $2|C^l$. On utilise le même raisonnement ci-dessus et on obtient les mêmes résultats.

** F-5- On suppose que $4|k_1$ avec $k_1 > 4 \Rightarrow k_1 = 4k'_2$, on a donc :

$$A^{2m} = 4k'_2 a' \tag{4.53}$$
$$B^n C^l = k'_2 (b - 4a') \tag{4.54}$$

** F-5-1- On suppose k'_2 est premier, de (4.53), on a $k'_2|a'$. De (4.54), $k'_2|(B^n C^l) \Longrightarrow k'_2|B^n$ ou $k'_2|C^l$.

** F-5-1-1- On suppose $k'_2|B^n \Longrightarrow k'_2|B \Longrightarrow B = k'^{\beta}_2 . B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $k'_2 \nmid B_1$. Par suite, on a $k'^{n\beta-1}_2 B_1^n C^l = b - 4a' \Longrightarrow k'_2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** F-5-1-2- Même résultat si on suppose que $k'_2|C^l$.

** F-5-2- On suppose que k'_2 est non premier.

** F-5-2-1- On suppose que k'_2 et a' sont copremiers. De (4.53), k'_2 peut s'écrire sous la forme $k'_2 = q_1^{2j} . q_2^2$ et $q_1 \nmid q_2$ et q_1 premier. On a $A^{2m} = 4q_1^{2j} . q_2^2 a' \Longrightarrow q_1|A$ et $B^n C^l = q_1^{2j} . q_2^2 (b - 4a') \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-5-2-1-1- Supposons que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B = q_1^f . B_1$ avec $q_1 \nmid B_1$. On obtient $B_1^n C^l = q_1^{2j-fn} q_2^2 (b - 4a')$:
- Si $2j - f.n \geq 1 \Longrightarrow q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$ mais $C^l = A^m + B^n$ donne aussi $q_1|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2j - f.n = 0$, on a $B_1^n C^l = q_2^2 (b - 4a')$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$ par suite $q_1|(b - 4a')$. Comme q_1 et a' sont copremiers alors $q_1 \nmid b$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2j-f.n<0 \Longrightarrow q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1 \nmid b$ car a' est copremiers avec q_1, de plus $C^l=A^m+B^n$ donne $q_1|C$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-5-2-1-2- Utilisant le même raisonnement ci-dessus, on obtient les mêmes résultats si $q_1|C^l$.

** F-5-2-2- On suppose que k_2' et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1|k_2'$ et $q_1|a'$. On écrit k_2' sous la forme $q_1^j.q_2$ avec $j\geq 1$, $q_1\nmid q_2$. De $A^{2m}=4k_2'a' \Longrightarrow q_1|A^{2m} \Longrightarrow q_1|A$. Par suite de $B^nC^l=q_1^jq_2(b-4a')$, il s'ensuit que $q_1|(B^nC^l) \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-5-2-2-1- On suppose que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B=q_1^\beta.B_1$ avec $\beta\geq 1$ et $q_1\nmid B_1$. Par suite, on a $q_1^{n\beta}B_1^nC^l=q_1^jq_2(b-4a') \Longrightarrow B_1^nC^l=q_1^{j-n\beta}q_2(b-4a')$.
- Si $j-n\beta\geq 1$, alors $q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$, mais $C^l=A^m+B^n$ donne $q_1|C$, donc la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $j-n\beta=0$, on obtient $B_1^nC^l=q_2(b-4a')$, de $C^l=A^m+B^n$ donne $q_1|C$ par suite $q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1|b$ car $q_1|a' \Longrightarrow q_1|a$, d'où la contradiction avec a,b copremiers.
- Si $j-n\beta<0 \Longrightarrow q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1|b$, car $q_1|a' \Longrightarrow q_1|a$, d'où la contradiction avec a,b copremiers.

** F-5-2-2-2- Utilisant le même raisonnement ci-dessus, on obtient les mêmes résultats si on suppose que $q_1|C^l$.

** F-6- Si $4\nmid|(b-4a')$ et $4\nmid k_1$ c'est impossible. On suppose maintenant que $4|(b-4a') \Rightarrow 4|b$, et $b-4a'=4^t.g$, $t\geq 1$ avec $4\nmid g$, alors on a :

$$A^{2m}=k_1a'$$
$$B^nC^l=k_1.4^{t-1}.g$$

** F-6-1- On suppose que k_1 est premier. De $A^{2m}=k_1a'$ il s'ensuit facilement que $k_1|a'$. De $B^nC^l=k_1.4^{t-1}.g$ on obtient que $k_1|(B^nC^l) \Longrightarrow k_1|B^n$ ou $k_1|C^l$.

** F-6-1-1- Supposons que $k_1|B^n \Longrightarrow k_1|B \Longrightarrow B=k_1^j.B_1$ avec $j>0$ et $k_1\nmid B_1$. D'où $k_1^{n.j}B_1^nC^l=k_1.4^{t-1}.g \Longrightarrow k_1^{n.j-1}B_1^nC^l=4^{t-1}.g$. Or $n\geq 3$ et $j\geq 1$ donc $n.j-1\geq 2$. Par suite, comme $k_1\neq 2$, alors $k_1|g \Longrightarrow k_1|(b-4a')$ mais $k_1|a' \Longrightarrow k_1|b$ d'où la contradiction avec a,b copremiers.

** F-6-1-2- On obtient le même résultat si $k_1|C^l$.

** F-6-2- On suppose que k_1 est non premier, différent de 4 (cas dejà vu), avec $4\nmid k_1$.

** F-6-2-1- Si $k_1=2k'$ avec k' impair >1. D'où $A^{2m}=2k'a' \Longrightarrow 2|a' \Longrightarrow 2|a$, mais $4|b$ par suite la contradiction avec a,b copremiers.

** F-6-2-2- On suppose que k_1 est impair avec k_1 et a' copremiers. On écrit k_1 sous la forme $k_1=q_1^j.q_2$ avec $q_1\nmid q_2$, q_1 premier et $j\geq 1$. $B^nC^l=q_1^j.q_24^{t-1}g \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-6-2-2-1- On suppose que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B=q_1^f.B_1$ avec $q_1\nmid B_1$. On obtient $B_1^nC^l=q_1^{j-f.n}q_24^{t-1}g$.
- Si $j-f.n\geq 1 \Longrightarrow q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$, mais $C^l=A^m+B^n$ donne aussi $q_1|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $j-f.n=0$, on a $B_1^nC^l=q_24^{t-1}g$, mais $C^l=A^m+B^n$ donne $q_1|C$, par suite $q_1|(b-4a')$. Comme q_1 et a' sont copremiers alors $q_1\nmid b$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $j-f.n<0 \Longrightarrow q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1\nmid b$ car q_1,a' sont premiers. $C^l=A^m+B^n$ donne $q_1|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée..

** F-6-2-2-2- Utilisant le même raisonnement, on obtient le même résultat si $q_1|C^l$.

** F-6-2-3- On suppose que k_1 et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1|k_1$ et $q_1|a'$. On écrit k_1 sous la forme $q_1^j.q_2$ avec $q_1\nmid q_2$. De $A^{2m}=k_1a' \Longrightarrow q_1|A^{2m} \Longrightarrow q_1|A$. Par suite, de $B^nC^l=q_1^jq_2(b-4a')$, il s'ensuit que $q_1|(B^nC^l) \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-6-2-3-1- Supposons que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B=q_1^\beta.B_1$ avec $\beta\geq 1$ et $q_1\nmid B_1$. Par suite, on a $q_1^{n\beta}B_1^nC^l=q_1^jq_2(b-4a') \Longrightarrow B_1^nC^l=q_1^{j-n\beta}q_2(b-4a')$:
 - Si $j-n\beta\geq 1$, alors $q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$, mais $C^l=A^m+B^n$ donne $q_1|C$, donc la conjecture (1.1) est vérifiée.
 - Si $j-n\beta=0$, on obtient $B_1^nC^l=q_2(b-4a')$, or $q_1|A$ et $q_1|B$ donc $q_1|C$ et par suite $q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1|b$ car $q_1|a' \Longrightarrow q_1|a$, d'où la contradiction avec a,b copremiers.
 - Si $j-n\beta<0 \Longrightarrow q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1|b$, d'où la contradiction avec a,b copremiers.

** F-6-2-3-2- Utilisant le même raisonnement ci-dessus, on obtient les mêmes résultats si on suppose que $q_1|C^l$.

5. Hypothèse : $\{3|p \quad et \quad b|4p\}$

5.1. Cas $b=2$ et $3|p$: — $3|p \Rightarrow p=3p'$ avec $p'\neq 1$ parce que $3\ll p$, et $b=2$, on obtient :

$$A^{2m}=\frac{4p.a}{3b}=\frac{4.3p'.a}{3b}=\frac{4.p'.a}{2}=2.p'.a$$

Comme :

$$\frac{1}{4}<cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{a}{b}=\frac{a}{2}<\frac{3}{4}\Rightarrow 1<2a<3\Rightarrow a=1\Longrightarrow cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{1}{2}$$

mais ce cas a été étudié (voir cas 3.1.2).

5.2. Cas $b=4$ et $3|p$: — On a $3|p \Longrightarrow p=3p'$ avec $p'\in\mathbb{N}^*$, il s'ensuit :

$$A^{2m}=\frac{4p.a}{3b}=\frac{4.3p'.a}{3\times 4}=p'.a$$

et :

$$\frac{1}{4}<cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{a}{b}=\frac{a}{4}<\frac{3}{4}\Rightarrow 1<a<3\Rightarrow a=2$$

mais a,b sont copremiers, alors le cas $b=4$ et $3|p$ est impossible.

5.3. Cas : $b\neq 2, b\neq 4, b\neq 3$, $b|p$ et $3|p$: — Comme $3|p$, alors $p=3p'$ et :

$$A^{2m}=\frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{4p}{3}\frac{a}{b}=\frac{4\times 3p'}{3}\frac{a}{b}=\frac{4p'a}{b}$$

On considère le cas : $b|p' \Longrightarrow p'=bp"$ et $p"\neq 1$ (si $p"=1$, alors $p=3b$, voir paragraphe 5.8 Cas $k'=1$). Finalement, on obtient :

$$A^{2m}=\frac{4bp"a}{b}=4ap"\ ;\quad B^nC^l=p".(3b-4a)$$

** G-1- On suppose que $p"$ est premier, d'où $A^{2m} = 4ap" = (A^m)^2 \Longrightarrow p"|a$. Or $B^nC^l = p"(3b-4a) \Longrightarrow p"|B^n$ ou $p"|C^l$.

** G-1-1- Si $p"|B^n \Longrightarrow p"|B \Longrightarrow B = p"B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p"^{n-1}B_1^nC^l = 3b-4a$. Or $n>2$, alors $(n-1)>1$ et $p"|a$, d'où $p"|3b \Longrightarrow p" = 3$ ou $p"|b$.

** G-1-1-1- Si $p" = 3 \Longrightarrow 3|a$, avec a s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or $A^m = 6a' \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A \Longrightarrow A = 3A_1$. D'où $3^{m-1}A_1^m = 2a' \Longrightarrow 3|a' \Longrightarrow a' = 3a"$. Mais $p"^{n-1}B_1^nC^l = 3^{n-1}B_1^nC^l = 3b-4a \Longrightarrow 3^{n-2}B_1^nC^l = b - 36a"^2$. Comme $n>2 \Longrightarrow n-2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-1-1-2- On suppose maintenant que $p"|b$, mais $p"|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-1-2- De la même façon, si $p"|C^l$ on arrive à des contradictions.

** G-2- On considère maintenant que $p"$ n'est pas premier.

** G-2-1- $p", a$ copremiers : $A^{2m} = 4ap" \Longrightarrow A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $p" = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$, alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** G-2-1-1- On suppose $2|a'$, alors $2|a' \Longrightarrow 2 \nmid p_1$, or $p" = p_1^2$.

** G-2-1-1-1- Si p_1 est premier, c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** G-2-1-1-2- On suppose p_1 non premier et qu'on écrit sous la forme $p_1 = \omega^m \Longrightarrow p" = \omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = \omega^{2m}(3b-4a)$.

** G-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** G-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^jB_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega^{2m-nj}(3b-4a)$.

** G-2-1-1-2-1-1-1- Si $2m - n.j = 0$, on obtient $B_1^n.C^l = 3b-4a$. Comme $C^l = A^m + B^n \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, et $\omega|(3b-4a)$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega \nmid (3b)$, donc $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-1-1-2- Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, on a $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$ et $\omega|(3b-4a)$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-1-1-3- Si $2m - nj < 0 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m}B_1^n.C^l = 3b-4a$. Comme $\omega|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m+h.l}B_1^n.C_1^l = 3b-4a$. Si $n.j - 2m + h.l < 0 \Longrightarrow \omega|B_1^nC_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc $n.j - 2m + h.l > 0$ et $\omega|(3b-4a)$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture est vérifiée.

** G-2-1-1-2-1-2- Utilisant le même raisonnement ci-dessus, on obtient les mêmes résultats si $\omega|C^l$.

** G-2-1-1-2-2- Maintenant on suppose $p" = \omega^{2m}$ et ω non premier, on écrit $\omega = \omega_1^f.\Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^nC^l = \omega_1^{2f.m}\Omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow \omega_1|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega_1|B^n$

ou $\omega_1 | C^l$.

** G-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1 | B^n \Longrightarrow \omega_1 | B \Longrightarrow B = \omega_1^j B_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega_1^{2.m-nj}\Omega^{2m}(3b-4a)$:

** G-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m - n.j = 0$, on obtient $B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $C^l = A^m + B^n \Longrightarrow \omega_1 | C^l \Longrightarrow \omega_1 | C$, et $\omega_1 | (3b-4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-2-1-2- Si $2f.m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, on a $\omega_1 | C^l \Longrightarrow \omega_1 | C$ et $\omega_1 | (3b-4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-2-1-3- Si $2f.m - n.j < 0 \Longrightarrow \omega_1^{n.j-2m.f} B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $\omega_1 | C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega_1^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m.f+h.l} B_1^n.C_1^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Si $n.j - 2m.f + h.l < 0 \Longrightarrow \omega_1 | B_1^n C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc si $n.j - 2m.f + h.l > 0$ et $\omega_1 | (3b-4a)$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-2-2- Utilisant le même raisonnement ci-dessus, on obtient les mêmes résultats si $\omega_1 | C^l$.

** G-2-1-2- On suppose $2 | p_1$: alors $2 | p_1 \Longrightarrow 2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid a$, or $p" = p_1^2$.

** G-2-1-2-1- On suppose p_1 est premier égal à 2, on obtient $A^m = 4a' \Longrightarrow 2 | a'$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-2-1-2-2- On suppose p_1 non premier et $2 | p_1$. Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1}\omega^m \Longrightarrow p" = 2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow 2 | B^n$ ou $2 | C^l$.

** G-2-1-2-2-1- On suppose $2 | B^n \Longrightarrow 2 | B$, comme $2 | A$, par suite $2 | C$. De $B^n C^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a)$ s'ensuit que si $2 | (3b-4a) \Longrightarrow 2 | b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-2-2-2- On suppose $2 | C^l$, on obtient les mêmes résultats en utilisant le raisonnement appliqué ci-dessus.

** G-2-2- On suppose $p", a$ non copremiers : soit ω un nombre premier tel que $\omega | a$ et $\omega | p"$.

** G-2-2-1- On suppose que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap" \Longrightarrow 3 | A$, or $3 | p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \Longrightarrow 3 | B^{2n} \Longrightarrow 3 | B$, par suite $3 | C^l \Longrightarrow 3 | C$. On écrit $A = 3^i A_1$, $B = 3^j B_1$, $C = 3^h C_1$ avec 3 copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im} A_1^{2m} + 3^{2nj} B_1^{2n} + 3^{im+jn} A_1^m B_1^n = 3^k.g$ avec $k = min(2im, 2jn, im+jn)$ et $3 \nmid g$. on a aussi $(\omega = 3) | a$ et $(\omega = 3) | p"$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1$, $3 \nmid a_1$ et $p" = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4ap" = 3^{2im} A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha+\mu}.a_1.p_1 \Longrightarrow \alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b.p" = 3b.3^\mu p_1 = 3^{\mu+1}.b.p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est k, l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est $\mu + 1$ ajouté de l'exposant β de 3 du facteur b,avec $\beta \geq 0$, soit $min(2im, 2jn, im+jn) = \mu + 1 + \beta$ en rappelant que $\alpha + \mu = 2im$. Mais $B^n C^l = p"(3b-4a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1)$, $3 \nmid b_1$. On a aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n = 3^{hl} C_1^l$. Posons $\epsilon = min(im, jn)$, on a

$\epsilon = hl = min(im, jn)$. On a les conditions :

$$k = min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta \quad (5.55)$$
$$\alpha + \mu = 2im \quad (5.56)$$
$$\epsilon = hl = min(im, jn)$$
$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1)$$

** G-2-2-1-1- $\alpha = 1 \Longrightarrow a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (5.56) devient :

$$1 + \mu = 2im$$

et la première équation (5.55) s'écrit :

$$k = min(2im, 2jn, im + jn) = 2im + \beta$$

- Si $k = 2im \Longrightarrow \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. on obtient $2im \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, et $2im \leq im+jn \Longrightarrow im \leq jn$. La troisième équation donne $hl = im$. La dernière équation donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \Longrightarrow im = nj$, par suite $im = nj = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $k = 2jn$ ou $k = im + jn$, on obtient $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-2-1-2- $\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha \geq 2$.

- Si $k = 2im \Longrightarrow 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \neq 0 \Longrightarrow 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $k = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \Longrightarrow \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \Longrightarrow 1 + \beta \leq \alpha \Longrightarrow \beta \geq 1$. Si $\beta \geq 1 \Longrightarrow 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $k = im + jn \Longrightarrow im + jn \leq 2im \Longrightarrow jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $k = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-2-2-2- On suppose que $\omega \neq 3$. On écrit $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $p" = \omega^\mu p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ap" = 4\omega^{\alpha+\mu}.a_1.p_1 \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = p"(3b - 4a) = \omega^\mu p_1(3b - 4a) \Longrightarrow \omega|B^n C^l \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** G-2-2-2-1- On suppose que $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$. Comme $p = bp' = 3bp" = 3\omega^\mu b p_1 = \omega^k(\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$ avec $k = min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $k = \mu$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $k > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $k < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^\mu b p_1 = \omega^k(\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** G-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|(C^l - A^m) \Longrightarrow \omega|B$. Par suite, utilisant le même raisonnement pour le cas G-2-2-2-1- ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

5.4. Cas $b = 3$ et $3|p$: — Comme $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, on écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3} \frac{a}{3} = \frac{4p'a}{3}$$

Comme A^{2m} est un entier et que a et b sont copremiers et $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ ne peut pas prendre la valeur 1 en référence à l'équation (2.7), alors on a nécessairement $3|p' \Longrightarrow p' = 3p"$ avec $p" \neq 1$, sinon $p = 3p' = 3 \times 3p" = 9$, mais $9 \ll (p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n)$, l'hypothèse $p" = 1$ est impossible, alors $p" > 1$. D'où :

$$A^{2m} = \frac{4p'a}{3} = \frac{4 \times 3p"a}{3} = 4p"a\,; \quad B^nC^l = p".(9-4a)$$

Comme $\dfrac{1}{4} < cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{3} < \dfrac{3}{4} \Longrightarrow 3 < 4a < 9 \Longrightarrow$ comme $a > 1, a = 2$ et on obtient :

$$A^{2m} = 4p"a = 8p"\,; \quad B^nC^l = \frac{3p"(9-4a)}{3} = p" \tag{5.57}$$

Les 2 dernières équations ci-dessus impliquent que $p"$ n'est pas premier. Soit l'écriture de $p"$ en facteurs premiers : $p" = \prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des entiers premiers et I un ensemble fini d'indices. On peut écrire $p" = p_1^{\alpha_1}.q_1$ avec $p_1 \nmid q_1$. De (5.57), on a $p_1|A$ et $p_1|B^nC^l \Longrightarrow p_1|B^n$ ou $p_1|C^l$.

** H-1- On suppose que $p_1|B^n \Longrightarrow B = p_1^{\beta_1}.B_1$ avec $p_1 \nmid B_1$ et $\beta_1 \geq 1$. Par suite, on obtient $B_1^nC^l = p_1^{\alpha_1 - n\beta_1}.q_1$ avec les cas suivants :

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 \geq 1 \Longrightarrow p_1|C^l \Longrightarrow p_1|C$, en accord avec $p_1|(C^l = A^m + B^n)$, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $\alpha_1 - n\beta_1 = 0 \Longrightarrow B_1^nC^l = q_1 \Longrightarrow p_1 \nmid C^l$ ce qui en contradiction avec $p_1|(A^m - B^n)$ soit $p_1|C^l$. Donc ce cas est impossible.
- Si $\alpha_1 - n\beta_1 < 0$, on obtient $p_1^{n\beta_1 - \alpha_1}B_1^nC^l = q_1 \Longrightarrow p_1|q_1$ ce qui en contradiction avec $p_1 \nmid q_1$. Donc ce cas est impossible.

** H-2- On suppose maintenant que $p_1|C^l$, utilisant le même raisonnement appliqué ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

5.5. Cas $3|p$ et $b = p$: — On a $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{p}$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{p} = \frac{4a}{3}$$

Comme A^{2m} est un entier, ce-ci implique que $3|a$, mais $3|p \Longrightarrow 3|b$. Comme a et b sont copremiers, d'où la contradiction. Alors le cas $3|p$ et $b = p$ est impossible.

5.6. Cas $3|p$ et $b = 4p$: — $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, par suite $b = 4p = 12p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{a}{3} \Longrightarrow 3|a$$

car A^{2m} est un entier. Mais $3|p \Longrightarrow 3|\,[(4p) = b]$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b copremiers. Alors le cas $b = 4p$ est impossible.

5.7. Cas $3|p$ et $b = 2p$: — $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, d'où $b = 2p = 6p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{2a}{3} \Longrightarrow 3|a$$

car A^{2m} est un entier, mais $3|p \Longrightarrow 3|(2p) \Longrightarrow 3|b$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b sont copremiers. Alors le cas $b = 2p$ est impossible.

5.8. Cas $3|p$ et $b \neq 3$ est un diviseur de p : — On a $b = p' \neq 3$, et p s'écrit $p = kp' \quad avec \quad 3|k \Longrightarrow k = 3k'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{b} = 4ak'$$

$$B^nC^l = \frac{p}{3}.\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = k'(3p' - 4a) = k'(3b - 4a)$$

** I-1- $k' \neq 1$:

** I-1-1- On suppose que k' est premier, d'où $A^{2m} = 4ak' = (A^m)^2 \Longrightarrow k'|a$. Or $B^nC^l = k'(3b - 4a) \Longrightarrow k'|B^n$ ou $k'|C^l$.

** I-1-1-1- Si $k'|B^n \Longrightarrow k'|B \Longrightarrow B = k'B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite $k'^{n-1}B_1^nC^l = 3b - 4a$. Or $n > 2$, alors $(n - 1) > 1$ et $k'|a$, d'où $k'|3b \Longrightarrow k' = 3$ ou $k'|b$.

** I-1-1-1-1- Si $k' = 3 \Longrightarrow 3|a$, avec a qui s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or $A^m = 6a' \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A \Longrightarrow A = 3A_1$ avec $A_1 \in \mathbb{N}^*$. D'où $3^{m-1}A_1^m = 2a' \Longrightarrow 3|a' \Longrightarrow a' = 3a"$. Mais $k'^{n-1}B_1^nC^l = 3^{n-1}B_1^nC^l = 3b - 4a \Longrightarrow 3^{n-2}B_1^nC^l = b - 36a"^2$. Comme $n > 2 \Longrightarrow n - 2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-1-1-1-2- On suppose maintenant que $k'|b$, mais $k'|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-1-1-2- De la même façon si $k'|C^l$, nous arrivons à des contradictions.

** I-1-2- On considère que k' n'est pas premier.

** I-1-2-1- On suppose que k', a copremiers : $A^{2m} = 4ak' \Longrightarrow A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $k' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** I-1-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \Longrightarrow 2 \nmid p_1$. Or $k' = p_1^2$.

** I-1-2-1-1-1- Si p_1 est premier, c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** I-1-2-1-1-2- On suppose que p_1 est non premier et il s'écrit sous la forme $p_1 = \omega^m \Longrightarrow k' = \omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = \omega^{2m}(3b - 4a)$.

** I-1-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** I-1-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^jB_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega^{2m-nj}(3b - 4a)$.
- Si $2m - n.j = 0$, on obtient $B_1^n.C^l = 3b - 4a$, comme $C^l = A^m + B^n \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, et $\omega|(3b - 4a)$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega \nmid (3b)$, donc $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, on a $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$ et $\omega|(3b - 4a)$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2m - nj < 0 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m}B_1^n.C^l = 3b - 4a$. Comme $\omega|C$, utilisant $C^l = A^m + B^n$, d'où $C = \omega^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m+h.l}B_1^n.C_1^l = 3b - 4a$. Si $n.j - 2m + h.l < 0 \Longrightarrow \omega|B_1^nC_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Si $n.j - 2m + h.l > 0 \Longrightarrow \omega|(3b - 4a)$ avec ω, a, b copremiers, il en résulte que la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-1-1-2-1-2- On suppose $\omega|C^l$, utilisant la même raisonnement ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** I-1-2-1-1-2-2- Maintenant, $k' = \omega^{2m}$ et ω non premier, on écrit $\omega = \omega_1^f.\Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^nC^l = \omega_1^{2f.m}\Omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow \omega_1|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** I-1-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \Longrightarrow \omega_1|B \Longrightarrow B = \omega_1^jB_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega_1^{2.fm-nj}\Omega^{2m}(3b-4a)$.

- Si $2f.m-n.j = 0$, on obtient $B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $C^l = A^m+B^n \Longrightarrow \omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$, et $\omega_1|(3b-4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2f.m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, on a $\omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$ et $\omega_1|(3b-4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2f.m - n.j < 0 \Longrightarrow \omega_1^{n.j-2m.f}B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $\omega_1|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$, d'où $C = \omega_1^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m.f+h.l}B_1^n.C_1^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Si $n.j - 2m.f + h.l < 0 \Longrightarrow \omega_1|B_1^nC_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc si $n.j - 2m.f + h.l > 0$ et $\omega_1|(3b-4a)$ avec ω_1, a, b copremiers, alors la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-1-1-2-2-2- On obtient les mêmes résultats si $\omega_1|C^l$.

** I-1-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \Longrightarrow 2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid a$. Or $k' = p_1^2$.

** I-1-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, on obtient $A^m = 4a' \Longrightarrow 2|a'$, d'où la contradiction.

** I-1-2-1-2-2- On suppose p_1 non premier et $2|p_1$. Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1}\omega^m \Longrightarrow p_1^2 = 2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = k'(3b-4a) = 2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** I-1-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^nC^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a)$ il s'ensuit que si $2|(3b-4a) \Longrightarrow 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-1-2-2-2- Même résultat si $2|C^l$.

** I-1-2-2- On suppose k', a non copremiers : soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p_1^2$.

** I-1-2-2-1- On suppose que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ak' \Longrightarrow 3|A$, or $3|p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n \Longrightarrow 3|B^{2n} \Longrightarrow 3|B$, par suite $3|C^l \Longrightarrow 3|C$. On écrit $A = 3^iA_1$, $B = 3^jB_1$, $C = 3^hC_1$ avec 3 copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im}A_1^{2m} + 3^{2nj}B_1^{2n} + 3^{im+jn}A_1^mB_1^n = 3^s.g$ avec $s = min(2im, 2jn, im+jn)$ et $3 \nmid g$. On a aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|k'$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1$, $3 \nmid a_1$ et $k' = 3^\mu p_2$, $3 \nmid p_2$ avec $A^{2m} = 4ak' = 3^{2im}A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha+\mu}.a_1.p_2 \Longrightarrow \alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b.k' = 3b.3^\mu p_2 = 3^{\mu+1}.b.p_2$. L'exposant du facteur 3 de p est s, l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est $\mu+1$ ajouté de l'exposant β de 3 du facteur b, avec $\beta \geq 0$, soit $min(2im, 2jn, im+jn) = \mu+1+\beta$ en rappelant que $\alpha+\mu = 2im$. Mais $B^nC^l = k'(4b-3a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)}B_1^nC_1^l = 3^{\mu+1}p_2(b - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) = 3^{\mu+1}p_2(3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1)$, $3 \nmid b_1$. On a aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im}A_1^m + 3^{jn}B_1^n = 3^{hl}C_1^l$. On pose $\epsilon = min(im, jn)$, on obtient

$\epsilon = hl = min(im, jn)$. On a alors les conditions :

$$s = min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta \tag{5.58}$$
$$\alpha + \mu = 2im \tag{5.59}$$
$$\epsilon = hl = min(im, jn) \tag{5.60}$$
$$3^{(nj+hl)}B_1^nC_1^l = 3^{\mu+1}p_2(3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) \tag{5.61}$$

** I-1-2-2-1-1- $\alpha = 1 \Longrightarrow a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (5.59) devient :

$$1 + \mu = 2im$$

et la première équation (5.58) s'écrit :

$$s = min(2im, 2jn, im + jn) = 2im + \beta$$

- Si $s = 2im \Longrightarrow \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. On obtient $2im \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, et $2im \leq im + jn \Longrightarrow im \leq jn$. La troisième équation (5.60) donne $hl = im$. La dernière équation (5.61) donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \Longrightarrow im = jn$, par suite $im = jn = hl$ et $B_1^nC_1^l = p_2(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s = 2jn$ ou $s = im + jn$, on obtient $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et $B_1^nC_1^l = p_2(b - 4a_1)$. Là aussi, si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-2-1-2- $\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha \geq 2$.

- Si $s = 2im \Longrightarrow 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \neq 0 \Longrightarrow 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $s = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \Longrightarrow \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \Longrightarrow 1 + \beta \leq \alpha \Longrightarrow \beta = 1$. Si $\beta = 1 \Longrightarrow 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est non vérifiée.

- Si $s = im + jn \Longrightarrow im + jn \leq 2im \Longrightarrow jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $s = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-1-2-2-2- On suppose que $\omega \neq 3$. On écrit $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $k' = \omega^\mu p_2$ avec $\omega \nmid p_2$. Comme $A^{2m} = 4ak' = 4\omega^{\alpha+\mu}.a_1.p_2 \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^nC^l = k'(3b - 4a) = \omega^\mu p_2(3b - 4a) \Longrightarrow \omega|B^nC^l \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** I-1-2-2-2-1- $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$. Comme $p = bp' = 3bk' = 3\omega^\mu bp_2 = \omega^s(\omega^{2im-s}A_1^{2m} + \omega^{2jn-s}B_1^{2n} + \omega^{im+jn-s}A_1^mB_1^n)$ avec $s = min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $s = \mu$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $s > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $s < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^\mu bp_1 = \omega^s(\omega^{2im-s}A_1^{2m} + \omega^{2jn-s}B_1^{2n} + \omega^{im+jn-s}A_1^mB_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** I-1-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|(C^l - A^m) \Longrightarrow \omega|B$. Par suite, on obtient les mêmes résultats de I-1-2-2-2-1- ci-dessus.

** I-2- $k' = 1$: par suite $k' = 1 \Longrightarrow p = 3b$, alors on a $A^{2m} = 4a = (2a')^2 \Longrightarrow A^m = 2a'$, par suite $a = a'^2$ est pair et :

$$A^mB^n = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3}.\sqrt[3]{\rho}\left(\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3} - cos\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} - 2a$$

ou encore :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = 2b\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{5.62}$$

Le membre à gauche de (5.62) est un entier et b aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|b \Longrightarrow b = k_2.k_3$.

** I-2-1- $k' = 1$ et $k_3 \neq 1$: alors $A^{2m} + 2A^mB^n = k_3.k_1$. Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_3$. Si $\mu = 2 \Rightarrow 2|b$, mais $2|a$, ce-ci est en contradiction avec a, b copremiers. On suppose donc $\mu \neq 2$ et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** I-2-1-1- $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|4a \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_3 \Longrightarrow \mu|b$ et que a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** I-2-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, on peut écrire $A^m + 2B^n = \mu.t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p, on obtient :

$$p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$$

Comme $p = 3b = 3k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ d'où $\mu|p \Longrightarrow\ p = \mu\mu'$, alors on a :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** I-2-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec I-2-1-2-.

** I-2-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, on obtient :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \Longrightarrow \mu|B \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases}$$

** I-2-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec I-2-1-2- ci-dessus.

** I-2-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_3 \Longrightarrow k_3 = 3k'_3$, et on a $b = k_2k_3 = 3k_2k'_3$, il s'ensuit $p = 3b = 9k_2k'_3$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors :

$$9k_2k'_3 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

qu'on écrit :

$$3(3k_2k'_3 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2 \tag{5.63}$$

d'où :

$$3|(3k_2k'_3 - A^mB^n) \Longrightarrow\ 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m\ ou\ 3|B^n$$

** I-2-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A$ et on a aussi $3|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a \Longrightarrow 3|4a \Longrightarrow 3|a$. Comme $b = 3k_2k'_3$ alors $3|b$, mais a, b sont copremiers d'où la contradiction. Alors $3 \nmid A$.

** I-2-1-2-2-2-2- $3|B^m$: Si $3|B^n \Longrightarrow 3|B$, or l'équation (5.63) implique $3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A$. Mais en utilisant le résultat du cas précédent, on obtient $3 \nmid A$.

Alors l'hypothèse $k_3 \neq 1$ est impossible.

** I-2-2- Maintenant, on suppose que $k_3 = 1 \Longrightarrow b = k_2$ et $p = 3b = 3k_2$. on a alors :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \tag{5.64}$$

avec k_1, b copremiers, on écrit (5.64) comme :

$$4\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$, on obtient :

$$3 \times 4^2.a(b-a) = k_1^2 \Longrightarrow k_1^2 = 3 \times 4^2.a'^2(b-a)$$

ce qui implique que :

$$b - a = 3\alpha^2 \Longrightarrow b = a'^2 + 3\alpha^2 \Longrightarrow k_1 = 12a'\alpha$$

Comme :

$$k_1 = 12a'\alpha = A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3\alpha = a' + B^n$$

On considère maintenant que $3|(b-a)$ avec $b = a'^2 + 3\alpha^2$. Le cas $\alpha = 1$ donne $a' + B^n = 3$ ce qui impossible. On suppose que $\alpha > 1$. Alors le couple (a', α) est solution de l'équation diophantine :

$$X^2 + 3Y^2 = b \tag{5.65}$$

avec $X = a'$ et $Y = \alpha$. Or d'après un théorème sur les solutions de l'équation donnée par (5.65), b s'écrit (voir théorème 37.4 de [**2**]) :

$$b = 2^{2s} \times 3^t.p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r}$$

où les p_i sont des nombres premiers vérifiant $p_i \equiv 1 (\bmod 6)$, les q_j sont aussi des nombres premiers tels que $q_j \equiv 5 (\bmod 6)$. Alors :
- si $s \geq 1 \Longrightarrow 2|b$, comme $2|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers ;
- si $t \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, or $3|(b-a) \Longrightarrow 3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1- Donc on suppose que b s'écrit sous la forme :

$$b = p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r}$$

avec $p_i \equiv 1 (\bmod 6)$ et $q_j \equiv 5 (\bmod 6)$. Finalement on obtient que $b \equiv 1 (\bmod 6)$. Vérifions alors cette condition.

** I-2-2-1-1- On va présenter le tableau des valeurs modulo 6 de $A^m + B^n = C^l$ en fonction des valeurs de $A^m, B^n (\bmod 6)$. On obtient le tableau ci-dessous après avoir retiré les lignes (respectivent les colonnes) de $A^m \equiv 0 (\bmod 6)$ et $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ (respectivement de $B^n \equiv 0 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 3 (\bmod 6)$), car ils présentent des cas contradictoires :

A^m , B^n	1	2	4	5
1	2	3	5	0
2	3	4	0	1
4	5	0	2	3
5	0	1	3	4

TABLE 2. Tableau de $C^l(\mathrm{mod}\ 6)$

** I-2-2-1-1-1- Pour les cas $C^l \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$ et $C^l \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$, on déduit que $3|C^l \Longrightarrow 3|C \Longrightarrow C = 3^h C_1$, avec $h \geq 1$ et $3 \nmid C_1$. Il en résulte que $p - B^n C^l = 3b - 3^{lh} C_1^l B^n = A^{2m} \Longrightarrow 3|(A^{2m} = 4a) \Longrightarrow 3|a \Longrightarrow 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-2- Pour les cas $C^l \equiv 0(\mathrm{mod}6)$, $C^l \equiv 2(\mathrm{mod}6)$ et $C^l \equiv 4(\mathrm{mod}6)$, on déduit que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. Il en résulte que $p = 3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{lh} C_1^l B^n \Longrightarrow 2|3b \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-3- On considère les cas $A^m \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$ et $B^n \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$(respectivement $B^n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$) : d'où $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il en résulte de $3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{jn} B_1^n C^l$, par suite $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-4- On considère le cas $A^m \equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$ et $B^n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$: d'où $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il en résulte de $3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{jn} B_1^n C^l$, par suite $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-5- On considère le cas $A^m \equiv 2(\mathrm{mod}6)$ et $B^n \equiv 5(\mathrm{mod}6)$: comme $A^m \equiv 2(\mathrm{mod}6) \Longrightarrow A^m \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$, donc A^m n'est pas un carré, de même pour B^n. Par suite, A^m et B^n s'écrivent sous la forme suivante :

$$A^m = a_0.\mathcal{A}^2$$
$$B^n = b_0 \mathcal{B}^2$$

où a_0 (respectivement b_0) regroupe le produit de nombres premiers d'exposants 1 de A^m (respectivement de B^n) sans que nécessairement $(a_0, \mathcal{A}) = 1$ et $(b_0, \mathcal{B}) = 1$. On a aussi $p = 3b = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n} = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n \Longrightarrow 3|(b - A^m B^n) \Longrightarrow A^m B^n \equiv b(\mathrm{mod}\ 3)$ or $b = a + 3\alpha^2 \Longrightarrow b \equiv a \equiv a'^2(\mathrm{mod}3)$, par suite $A^m B^n \equiv a'^2(\mathrm{mod}3)$. Mais $A^m \equiv 2(\mathrm{mod}6) \Longrightarrow 2a' \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6) \Longrightarrow 4a'^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6) \Longrightarrow a'^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$. Il en résulte que $A^m B^n$ est un carré, soit $A^m B^n = \mathcal{N}^2 = \mathcal{A}^2.\mathcal{B}^2.a_0.b_0$. Notons par $\mathcal{N}_1^2 = a_0.b_0$. Soit p_1 un nombre premier qui divise $a_0 \Longrightarrow a_0 = p_1.a_1$ avec $p_1 \nmid a_1$. $p_1|\mathcal{N}_1^2 \Longrightarrow p_1|\mathcal{N}_1 \Longrightarrow \mathcal{N}_1 = p_1^t \mathcal{N}_1'$ avec $t \geq 1$ et $p_1 \nmid \mathcal{N}_1'$, d'où $p_1^{2t-1} \mathcal{N}_1'^2 = a_1.b_0$. Comme $2t \geq 2 \Longrightarrow 2t - 1 \geq 1 \Longrightarrow p_1|a_1.b_0$ mais $(p_1, a_1) = 1$, d'où $p_1|b_0 \Longrightarrow p_1|B^n \Longrightarrow p_1|B$. Or $p_1|(A^m = 2a')$. p_1 est différent de 2 car $p_1|B^n$ et B^n est impair, d'où la contradiction. Par suite, $p_1|a' \Longrightarrow p_1|a$. Si $p_1 = 3$, de $3|(b - a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b premiers. Donc $p_1 > 3$ premier divise A^m et B^n, par suite $p_1|(p = 3b) \Longrightarrow p_1|b$, il en résulte la contradiction avec a, b premiers, sachant que $p = 3b \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$ et en choisissant le cas qui nous intéresse à savoir $b \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$.

** I-2-2-1-1-6- On considère le dernier cas du tableau précédent $A^m \equiv 4 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 6)$. On revient à l'équation (5.65) que vérifie b :

$$\begin{aligned} b &= X^2 + 3Y^2 \\ avec \quad X &= a'; \quad Y = \alpha \\ et \quad 3\alpha &= a' + B^n \end{aligned} \tag{5.66}$$

Supposons qu'il existe une autre solution de (5.66) :

$$b = X^2 + 3Y^3 = u^2 + 3v^2 \Longrightarrow 2u \neq A^m,\ 3v \neq a' + B^n$$

Or $B^n = \dfrac{6\alpha - A^m}{2} = 3\alpha - a'$ et b vérifie aussi :$3b = p = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n}$, il est impossible que u, v vérifie :

$$\begin{aligned} 6v &= 2u + 2B^n \\ 3b &= 4u^2 + 2uB^n + B^{2n} \end{aligned}$$

Considérons que : $6v - 2u = 6\alpha - 2a' \Longrightarrow u = 3v - 3\alpha + a'$. D'où $b = u^2 + 3v^2 = (3v - 3\alpha + a')^2 + 3v^2$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2v^2 - B^n v + \alpha^2 - a'\alpha &= 0 \\ 2v^2 - B^n v - \frac{(a' + B^n)(A^m - B^n)}{9} &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de la dernière équation donne en prenant la racine positive (car $A^m > B^n$), $v_1 = \alpha$, par suite $u = a'$. Il en résulte que b dans (5.66) a une représentation unique sous la forme $X^2 + 3Y^2$ avec $X, 3Y$ copremiers. Comme b est un nombre entier impair, on applique l'un des théorèmes d'Euler sur les nombres convenables "numerus idoneus" (voir [**4**],[**5**]) à savoir : *Si $n > 1$ est un entier impair qui est représenté de façon unique telle que $n = x^2 + 3y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ et x et $3y$ sont relativement premiers, alors n est premier.* Il en résulte que b est premier.

On a aussi $p = 3b = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n} = 4a'^2 + B^n.C^l$ soit $9\alpha^2 - a'^2 = B^n.C^l$, par suite $3\alpha, a' \in \mathbb{N}^*$ sont solutions de l'équation diophantine :

$$x^2 - y^2 = N \tag{5.67}$$

avec $N = B^n C^l > 0$. Soit $Q(N)$ le nombre des solutions de (5.67) et $\tau(N)$ le nombre de façon d'écrire les facteurs de N, alors on annonce le résultat suivant concernant les solutions de (5.67) (voir théorème 27.3 de [**2**]) :

- si $N \equiv 2 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = 0$;
- si $N \equiv 1$ ou $N \equiv 3 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N)/2]$;
- si $N \equiv 0 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N/4)/2]$.

Rappelons que $A^m \equiv 0 (\bmod 4)$. Concernant B^n, pour $B^n \equiv 0 (\bmod 4)$ ou $B^n \equiv 2 (\bmod 4)$, on trouve que $2|B^n \Longrightarrow 2|\alpha \Longrightarrow 2|b$, par suite la contradiction avec a, b copremiers. Il reste le cas $B^n \equiv 3 (\bmod 4) \Longrightarrow C^l \equiv 3 (\bmod 4) \Longrightarrow N = B^n C^l \equiv 1 (\bmod 4) \Longrightarrow Q(N) = [\tau(N)/2] > 1$. Or $Q(N) = 1$, puisque les inconnues de (5.67) sont aussi les inconnues de (5.66) et on a une unique solution des deux équations diophantines, d'où la contradiction.

Il en résulte que la condition $3|(b - a)$ est contradictoire.

L'étude du cas 5.8 est donc achevée.

5.9. Cas $3|p$ et $b|4p$: — Les cas suivants ont été déjà étudiés :
* $3|p$, $b=2 \Longrightarrow b|4p$: cas 5.1
* $3|p$, $b=4 \Longrightarrow b|4p$: cas 5.2
* $3|p \Longrightarrow p=3p'$, $b|p' \Longrightarrow p'=bp"$, $p" \neq 1$: cas 5.3
* $3|p$, $b=3 \Longrightarrow b|4p$: cas 5.4
* $3|p \Longrightarrow p=3p'$, $b=p' \Longrightarrow b|4p$: cas 5.8

** J-1- Cas particulier : $b=12$. En effet $3|p \Longrightarrow p=3p'$ et $4p=12p'$. En prenant $b=12$, on a $b|4p$. Or $b<4a<3b$, ce qui donne $12<4a<36 \Longrightarrow 3<a<9$. Comme $2|b$ et $3|b$, les valeurs possibles de a sont 5 et 7.

** J-1-1- $a=5$ et $b=12 \Longrightarrow 4p=12p'=bp'$. Or $A^{2m}=\dfrac{4p}{3}.\dfrac{a}{b}=\dfrac{5bp'}{3b}=\dfrac{5p'}{3} \Longrightarrow 3|p' \Longrightarrow p'=3p"$ avec $p" \in \mathbb{N}^*$, alors $p=9p"$. D'où les expressions :

$$A^{2m}=5p" \tag{5.68}$$
$$B^nC^l=\frac{p}{3}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)=4p" \tag{5.69}$$

Comme $n,l>3$, on déduit de l'équation (5.69) que $2|p" \Longrightarrow p"=2^\alpha p_1$ avec $\alpha \geq 1$ et $2 \nmid p_1$. Par suite, (5.68) devient : $A^{2m}=5p"=5\times 2^\alpha p_1 \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A=2^iA_1$, $i\geq 1$ et $2 \nmid A_1$. On a aussi $B^nC^l=2^{\alpha+2}p_1 \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-1-1-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow B=2^jB_1$, $j\geq 1$ et $2\nmid B_1$. On obtient $B_1^nC^l=2^{\alpha+2-jn}p_1$:
- Si $\alpha+2-jn>0 \Longrightarrow 2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l=2^{im}A_1^m+2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $\alpha+2-jn=0 \Longrightarrow B_1^nC^l=p_1$. De $C^=2^{im}A_1^m+2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$ ce qui implique que $2|p_1$ d'où la contradiction.
- Si $\alpha+2-jn<0 \Longrightarrow 2^{jn-\alpha-2}B_1^nC^l=p_1$ ce qui implique que $2|p_1$ d'où la contradiction.

** J-1-1-2- On suppose que $2|C^l$, utilisant le même raisonnement ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** J-1-2- On suppose maintenant que $a=7$ et $b=12 \Longrightarrow 4p=12p'=bp'$. Or $A^{2m}=\dfrac{4p}{3}.\dfrac{a}{b}=\dfrac{12p'}{3}.\dfrac{7}{12}=\dfrac{7p'}{3} \Longrightarrow 3|p' \Longrightarrow p=9p"$. On obtient :

$$A^{2m}=7p"$$
$$B^nC^l=\frac{p}{3}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)=2p"$$

La dernière équation implique que $2|B^nC^l$. En utilisant la même méthodologie appliquée en J-1-1- ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

On passe maintenant au cas général. Comme $3|p \Rightarrow p=3p'$ et $b|4p \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $4p=12p'=k_1b$.

** J-2- $k_1=1$: Si $k_1=1$ donc $b=12p'$, ($p'\neq 1$ sinon $p=3 \ll A^{2m}+B^{2n}+A^mB^n$). Mais $A^{2m}=\dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{12p'}{3}\dfrac{a}{b}=\dfrac{4p'.a}{12p'}=\dfrac{a}{3} \Rightarrow 3|a$ car A^{2m} est un entier, d'où la contradiction avec a,b copremiers.

** J-3- $k_1 = 3$: Si $k_1 = 3$, d'où $b = 4p'$ et $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{k_1.a}{3} = a = (A^m)^2 = a'^2 \Longrightarrow A^m = a'$. Le calcul de A^mB^n donne $A^mB^n = \dfrac{p\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3} - \dfrac{a}{2}$, soit :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = 2p'\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{5.70}$$

Le membre à gauche de (5.70) est un entier et p' aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{k_3}$$

où k_2, k_3 sont deux entiers copremiers et $k_3|p' \Longrightarrow p' = k_3.k_4$.

** J-3-1- $k_4 \neq 1$: on suppose $k_4 \neq 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_2.k_4 \tag{5.71}$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_4$. Alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** J-3-1-1- $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_4 \Longrightarrow \mu|p' \Rightarrow \mu|(4p' = b)$. Or a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** J-3-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, on peut écrire $A^m + 2B^n = \mu.t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

Utilisant l'expression de p, on obtient $p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$. Comme $p = 3p'$ et $\mu|p' \Rightarrow \mu|(3p') \Rightarrow \mu|p$, on peut écrire : $\exists\mu'$ et $p = \mu\mu'$, alors on arrive à :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** J-3-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec J-3-1-2-.

** J-3-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, on obtient :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases}$$

** J-3-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec J-3-1-2-.

** J-3-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_4 \Longrightarrow k_4 = 3k'_4$, et on a $p' = k_3k_4 = 3k_3k'_4$, il s'ensuit $p = 3p' = 9k_3k'_4$, alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$, il en résulte :

$$9k_3k'_4 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

qu'on écrit : $3(3k_3k'_4 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2$, d'où : $3|(3k_3k'_4 - A^mB^n) \Longrightarrow 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|B^n$.

** J-3-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|a$, mais $3|p' \Rightarrow 3|(4p')$ soit $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Alors $3 \nmid A$.

** J-3-1-2-2-2-2- $3|B^n$: Si $3|B^n$ or $A^m = \mu t' - 2B^n = 3t' - 2B^n \Longrightarrow 3|A^m$, ce qui est contradictoire. Alors l'hypothèse $k_4 \neq 1$ est impossible.

** J-3-2- $k_4 = 1$: Maintenant, on suppose que $k_4 = 1 \Longrightarrow p' = k_3k_4 = k_3$. On a alors :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{p'} \tag{5.72}$$

avec k_2, p' copremiers, on écrit (5.72) comme :

$$4\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_2}{p'}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$ et $b = 4p'$, on obtient :

$$3.a(b-a) = k_2^2$$

Comme $A^{2m} = a = a'^2$, ce qui implique que :

$$3|(b-a), \quad et \quad b - a = b - a'^2 = 3\alpha^2$$

Comme $k_2 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (5.71) et que $3|k_2 \Longrightarrow 3|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|(A^m + 2B^n)$.

** J-3-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-3-2-2- $3|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3 \nmid A^m$ et $3 \nmid B^n$. Comme d'une part $k_2^2 = 9a\alpha^2 = 9a'^2\alpha^2 \Longrightarrow k_2 = 3a'\alpha = A^m(A^m + 2B^n)$, par suite :

$$3\alpha = A^m + 2B^n \tag{5.73}$$

Comme b s'écrit sous la forme $b = a'^2 + 3\alpha^2$, donc le couple (a', α) est une solution de l'équation diophantine :

$$x^2 + 3y^2 = b \tag{5.74}$$

Comme $b = 4p'$, par suite :

** J-3-2-2-1- Si x, y sont pairs, d'où $2|a' \Longrightarrow 2|a$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** J-3-2-2-2- Si x, y sont impairs, soit a', α impairs, c'est-à-dire $A^m = a' \equiv 1 (\bmod 4)$ ou $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$. Si u, v vérifient (5.74), soit $b = u^2 + 3v^2$, avec $u \neq a'$ et $v \neq \alpha$, alors u, v ne vérifie pas (5.73), soit $3v \neq u + 2B^n$, sinon $u = 3v - 2B^n \Longrightarrow b = (3v - 2B^n)^2 + 3v^2 = a'^2 + 3\alpha$, la résolution de l'équation du second degré obtenue en v donne la racine positive $v_1 = \alpha$, par suite $u = 3\alpha - 2B^n = a'$, d'où l'unicité de l'écriture de b représentée par (5.74).

** J-3-2-2-2-1- On suppose $A^m \equiv 1 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 0 (\bmod 4)$, d'où B^n est pair et $B^n = 2B'$. L'expression de p devient :

$$p = a'^2 + 2a'B' + 4B'^2 = (a' + B')^2 + 3B'^2 = 3p' \Longrightarrow 3|(a' + B') \Longrightarrow a' + B' = 3B"$$
$$p' = B'^2 + 3B"^2 \Longrightarrow b = 4p' = (2B')^2 + 3(2B")^2 = a'^2 + 3\alpha^2$$

Soit $2B' = B^n = a' = A^m$, d'où la contradiction avec $A^m > B^n$.

** J-3-2-2-2-2- On suppose $A^m \equiv 1 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 4)$, d'où C^l est pair et $C^l = 2C'$. L'expression de p devient :

$$p = C^{2l} - C^l B^n + B^{2n} = 4C'^2 - 2C'B^n + B^{2n} = (C' - B^n)^2 + 3C'^2 = 3p'$$
$$\Longrightarrow 3|(C' - B^n) \Longrightarrow C' - B^n = 3C"$$
$$p' = C'^2 + 3C"^2 \Longrightarrow b = 4p' = (2C')^2 + 3(2C")^2 = a'^2 + 3\alpha^2$$

Soit $2C' = C^l = a' = A^m$, d'où la contradiction.

** J-3-2-2-2-3- On suppose $A^m \equiv 1 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 2 (\bmod 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-4- On suppose $A^m \equiv 1 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 3 (\bmod 4)$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

** J-3-2-2-2-5- On suppose $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 0 (\bmod 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-6- On suppose $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 4)$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

** J-3-2-2-2-7- On suppose $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 2 (\bmod 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-8- On suppose $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 3 (\bmod 4)$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

On a achevé donc l'étude de J-3-2-2- qui a mené à des contradictions.

** J-4- On suppose $k_1 \neq 3$ et $3|k_1 \Longrightarrow k_1 = 3k'_1$ avec $k'_1 \neq 1$, alors $4p = 12p' = k_1 b = 3k'_1 b \Rightarrow 4p' = k'_1 b$. A^{2m} s'écrit $A^{2m} = \dfrac{4p}{3} cos^2 \dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3k'_1 b}{3} \dfrac{a}{b} = k'_1 a$ et $B^n C^l = \dfrac{p}{3}\left(3 - 4cos^2 \dfrac{\theta}{3}\right) = \dfrac{k'_1}{4}(3b - 4a)$. Comme $B^n C^l$ est un entier, on doit avoir $4|(3b - 4a)$ ou $4|k'_1$ ou $[2|k'_1$ et $2|(3b - 4a)]$.

** J-4-1- On suppose que $4|(3b - 4a)$.

** J-4-1-1- On suppose que $3b - 4a = 4 \Longrightarrow 4|b \Longrightarrow 2|b$. On a alors :

$$A^{2m} = k'_1 a$$
$$B^n C^l = k'_1$$

** J-4-1-1-1- Si k'_1 est premier, de $B^n C^l = k'_1$, c'est impossible.

** J-4-1-1-2- On suppose que $k'_1 > 1$ est non premier. Soit ω un nombre premier tel que $\omega | k'_1$.

** J-4-1-1-2-1- On suppose que $k'_1 = \omega^s$, avec $s \geq 6$. On a donc :

$$A^{2m} = \omega^s . a \tag{5.75}$$
$$B^n C^l = \omega^s \tag{5.76}$$

** J-4-1-1-2-1-1- Supposons $\omega = 2$, si a, k'_1 sont non copremiers alors $2|a$, comme $2|b$, c'est la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-1-1-2-1-2- Supposons $\omega = 2$ et a, k'_1 sont copremiers donc $2 \nmid a$. De (5.76), on en déduit que $B = C = 2$ et $n + l = s$, et $A^{2m} = 2^s.a$, mais $A^m = 2^l - 2^n \Longrightarrow A^{2m} = (2^l - 2^n)^2 = 2^{2l} + 2^{2n} - 2(2^{l+n}) = 2^{2l} + 2^{2n} - 2 \times 2^s = 2^s.a \Longrightarrow 2^{2l} + 2^{2n} = 2^s(a + 2)$. Si $l = n$, on obtient $a = 0$ d'où la contradiction. Si $l \neq n$, comme $A^m = 2^l - 2^n > 0 \Longrightarrow n < l \Longrightarrow 2n < s$, d'où

$2^{2n}(1+2^{2l-2n}-2^{s+1-2n}) = 2^n 2^l.a$. Posons $l = n+n_1 \Longrightarrow 1+2^{2l-2n}-2^{s+1-2n} = 2^{n_1}.a$, or le terme à gauche est impair et le membre à droite est pair d'où la contradiction. Donc le cas $\omega = 2$ est impossible.

** J-4-1-1-2-1-3- Supposons maintenant que $k'_1 = \omega^s$ avec $\omega \neq 2$:

** J-4-1-1-2-1-3-1- Supposons que a, k'_1 sont non copremiers, alors $\omega | a \Longrightarrow a = \omega^t.a_1$ et $t \nmid a_1$. On a donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 \tag{5.77}$$
$$B^nC^l = \omega^s \tag{5.78}$$

De (5.78), on déduit que $B^n = \omega^n$, $C^n = \omega^l$, $s = n+l$ et $A^m = \omega^l - \omega^n > 0 \Longrightarrow l > n$. De plus, $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2 = \omega^{2l} + \omega^{2n} - 2 \times \omega^s$. Comme $\omega \neq 2 \Longrightarrow \omega$ est impair, par suite $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, donc $2|a_1 \Longrightarrow 2|a$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers, alors ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-1-3-2- Supposons que a, k'_1 sont copremiers, avec :

$$A^{2m} = \omega^s.a \tag{5.79}$$
$$B^nC^l = \omega^s \tag{5.80}$$

De (5.80), on déduit que $B^n = \omega^n$, $C^l = \omega^l$ et $s = n+l$. Comme $\omega \neq 2 \Longrightarrow \omega$ est impair et $A^{2m} = \omega^s.a = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, d'où $2|a$. Par suite la contradiction avec a, b copremiers, donc ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-2- On suppose que $k'_1 = \omega^s.k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$. On a donc :

$$A^{2m} = \omega^s.k_2.a$$
$$B^nC^l = \omega^s.k_2$$

** J-4-1-1-2-2-1- Si k_2 est premier, de la dernière équation ci-dessus, $\omega = k_2$, c'est en contradiction avec $\omega \nmid k_2$. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-2-2- On suppose que $k'_1 = \omega^s.k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$ et k_2 non premier. On a donc :

$$A^{2m} = \omega^s.k_2.a$$
$$B^nC^l = \omega^s.k_2 \tag{5.81}$$

** J-4-1-1-2-2-2-1- On suppose ω, a copremiers, donc $\omega \nmid a$. Comme $A^{2m} = \omega^s.k_2.a \Longrightarrow \omega | A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$ avec $i \geq 1$ et $\omega \nmid A_1$, par suite $s = 2im$. De (5.81), on a $\omega | (B^nC^l) \Longrightarrow \omega | B^n$ ou $\omega | C^l$.

** J-4-1-1-2-2-2-1-1- On suppose $\omega | B^n \Longrightarrow \omega | B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $\omega \nmid B_1$. D'où : $B_1^nC^l = \omega^{2im-jn}k_2$:

- Si $2im - jn > 0$, $\omega | C^l \Longrightarrow \omega | C$, pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $2im - jn = 0 \Longrightarrow B_1^nC^l = k_2$, comme $\omega \nmid k_2 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $\omega | (C^l = A^m + B^n)$.
- Si $2im - jn < 0 \Longrightarrow \omega^{jn-2im}B_1^nC^l = k_2 \Longrightarrow \omega | k_2$ d'où la contradiction avec $\omega \nmid k_2$.

** J-4-1-1-2-2-2-1-2- On suppose $\omega|C^l$, avec la même méthode suivie ci-dessus, on obtient les mêmes rśultats.

** J-4-1-1-2-2-2-2- Supposons que a, ω sont non copremiers, alors $\omega|a \Longrightarrow a = \omega^t.a_1$ et $\omega \nmid a_1$. On a donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t}.k_2.a_1 \tag{5.82}$$

$$B^nC^l = \omega^s.k_2 \tag{5.83}$$

Comme $A^{2m} = \omega^{s+t}.k_2.a_1 \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^iA_1$ avec $i \geq 1$ et $\omega \nmid A_1$, par suite $s + t = 2im$. De (5.83), on a $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** J-4-1-1-2-2-2-2-1- On suppose $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^jB_1$ avec $j \geq 1$ et $\omega \nmid B_1$. D'où : $B_1^nC^l = \omega^{2im-t-jn}k_2$:

- Si $2im - t - jn > 0$, $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $2im - t - jn = 0 \Longrightarrow B_1^nC^l = k_2$, comme $\omega \nmid k_2 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $\omega|(C^l = A^m + B^n)$.
- Si $2im - t - jn < 0 \Longrightarrow \omega^{jn+t-2im}B_1^nC^l = k_2 \Longrightarrow \omega|k_2$ d'où la contradiction avec $\omega \nmid k_2$.

** J-4-1-1-2-2-2-2-2- On suppose $\omega|C^l$, avec la même méthode suivie ci-dessus, on obtient les mêmes rśultats.

** J-4-1-2- $3b - 4a \neq 4$ et $4|(3b - 4a) \Longrightarrow 3b - 4a = 4^s\Omega$ avec $s \geq 1$ et $4 \nmid \Omega$. On obtient :

$$A^{2m} = k_1'a \tag{5.84}$$

$$B^nC^l = 4^{s-1}k_1'\Omega \tag{5.85}$$

** J-4-1-2-1- Supposons $k_1' = 2$, de (5.84) on déduit que $2|a$. Comme $4|(3b - 4a) \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2-2- Supposons que $k_1' = 3$, de (5.84) on déduit que $3^3|A^{2m}$. De (5.85), il en résulte que $3^3|B^n$ ou $3^3|C^l$. Dans les deux cas précédents, on obtient $3^3|p$. Mais $4p = 3k_1'b = 9b$, or $27|p$ ce qui donne $3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2-3- Supposons que k_1' est un nombre premier ≥ 5 :

** J-4-1-2-3-1- Supposons k_1' et a copremiers. L'équation (5.84) donne $(A^m)^2 = k_1'.a$ ce qui est impossible avec $k_1' \nmid a$. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2-3-2- Supposons k_1' et a sont non copremiers, soit $k_1'|a \Longrightarrow a = k_1'^{\alpha}a_1$ avec $\alpha \geq 1$ et $k_1' \nmid a_1$. L'équation (5.84) s'écrit :

$$A^{2m} = k_1'a = k_1'^{\alpha+1}a_1$$

La dernière équation donne $k_1'|A^{2m} \Longrightarrow k_1'|A \Longrightarrow A = k_1'^i.A_1$, avec $k_1' \nmid A_1$. Si $2i.m \neq (\alpha + 1)$ c'est impossible. On suppose que $2i.m = \alpha + 1$, par suite $k_1'|A^m$. Revenons à l'équation (5.85). Si k_1' et Ω sont copremiers, c'est impossible. On suppose donc que k_1' et Ω ne sont pas copremiers c'est-à-dire que $k_1'|\Omega$ et que l'exposant de k_1' dans Ω est tel que l'équation (5.85) soit satisfaite. On déduit facilement que $k_1'|B^n$. Par suite $k_1'^2|(p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n)$, mais $4p = 3k_1'b \Longrightarrow k_1'|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-1-2-4- Supposons que $k'_1 \geq 4$ non premier.

** J-4-1-2-4-1- Supposons que $k'_1 = 4$. On a alors : $A^{2m} = 4a$ et $B^nC^l = 3b - 4a = 3p' - 4a$. Ce cas a été traité dans le paragraphe 5.8 cas ** I-2-.

** J-4-1-2-4-2- On suppose que $k'_1 > 4$ non premier.

** J-4-1-2-4-2-1- On suppose que a, k'_1 sont copremiers. De l'expression $A^{2m} = k'_1.a$ on déduit que $a = a_1^2$ et $k'_1 = k"_1^2$. Ce qui donne :

$$A^m = a_1.k"_1$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}k"_1^2.\Omega$$

Soit ω un nombre premier tel que $\omega | k"_1$, soit $k"_1 = \omega^t.k"_2$ avec $\omega \nmid k"_2$. Les deux équations précédentes deviennent :

$$A^m = a_1.\omega^t.k"_2 \tag{5.86}$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}\omega^{2t}.k"_2^2.\Omega \tag{5.87}$$

De (5.86) $\omega | A^m \Longrightarrow \omega | A \Longrightarrow A = \omega^i.A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $im = t$. De (5.87), on a $\omega | B^nC^l \Longrightarrow \omega | B^n$ ou $\omega | C^l$.

** J-4-1-2-4-2-1-1- Si $\omega | B^n \Longrightarrow \omega | B \Longrightarrow B = \omega^j.B_1$, avec $\omega \nmid B_1$. De (5.86), on a $B_1^nC^l = \omega^{2t-j.n}4^{s-1}.k"_2^2.\Omega$. Si $\omega = 2$ et $2 \nmid \Omega$, on a $B_1^nC^l = 2^{2t+2s-j.n-2}k"_2^2$:

- Si $2t + 2s - jn - 2 \leq 0$ alors $2 \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$.
- Si $2t + 2s - jn - 2 \geq 1 \Longrightarrow 2 | C^l \Longrightarrow 2 | C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

(Mêmes résultats si $2 | \Omega \Longrightarrow \Omega = 2^\mu.\Omega_1$, on remplace $2t + 2s - jn - 2$ par $2t + 2s + \mu - jn - 2$). Si $\omega \neq 2$, on a $B_1^nC^l = \omega^{2t-jn}4^{s-1}k"_2^2.\Omega$.

Là aussi, si $\omega \nmid \Omega$:
-Si $2t - jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$.
-Si $2t - jn \geq 1 \Longrightarrow \omega | C^l$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

Mêmes résultats si $2 | \Omega \Longrightarrow \Omega = 2^\mu.\Omega_1$, on remplace $2t - jn$ par $2t + \mu - jn$.

** J-4-1-2-4-2-1-2- Si $\omega | C^l \Longrightarrow \omega | C \Longrightarrow C = \omega^h.C_1$, avec $\omega \nmid C_1$. En utilisant les mêmes méthodes en J-4-1-2-4-2-1-1 ci-dessus, on obtient les mêmes résultats suivants les cas.

** J-4-1-2-4-2-2- On suppose que a, k'_1 sont non copremiers. Soit ω un nombre premier tel que $\omega | a$ et $\omega | k'_1$. On écrit :

$$a = \omega^\alpha.a_1$$
$$k'_1 = \omega^\mu.k"_1$$

avec $a_1, k"_1$ copremiers. L'expression de A^{2m} devient $A^{2m} = \omega^{\alpha+\mu}.a_1.k"_1$. Le terme B^nC^l devient :

$$B^nC^l = 4^{s-1}.\omega^\mu.k"_1.\Omega \tag{5.88}$$

** J-4-1-2-4-2-2-1- Si $\omega = 2 \Longrightarrow 2 | a$, mais $2 | b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Ce cas est donc impossible.

** J-4-1-2-4-2-2-2- Si $\omega \geq 3$. On a $\omega|a$. Si $\omega|b$ c'est la contradiction avec a, b copremiers. On suppose que $\omega \nmid b$. De l'expression de A^{2m}, on obtient $\omega|A^{2m} \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i.A_1$ avec $\omega \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $2i.m = \alpha + \mu$. De (5.88), on déduit que $\omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** J-4-1-2-4-2-2-2-1- On suppose que $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite, $B_1^n C^l = 4^{s-1}\omega^{\mu-jn}.k"_1.\Omega$:

* $\omega \nmid \Omega$:
- Si $\mu - jn \geq 1$ on a $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $\mu - jn \leq 0$ avec $\omega \nmid \Omega$, alors $\omega \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$. Donc ce cas est impossible.

* $\omega|\Omega$: soit $\Omega = \omega^\beta.\Omega_1$ avec $\beta \geq 1$ et $\omega \nmid \Omega_1$. Comme $3b - 4a = 4^s.\Omega = 4^s.\omega^\beta.\Omega_1 \Longrightarrow 3b = 4a + 4^s.\omega^\beta.\Omega_1 = 4\omega^\alpha.a_1 + 4^s.\omega^\beta.\Omega_1 \Longrightarrow 3b = 4\omega(\omega^{\alpha-1}.a_1 + 4^{s-1}.\omega^{\beta-1}.\Omega_1)$. Si $\omega = 3$ et $\beta = 1$, on obtient $b = 4(3^{\alpha-1}a_1 + 4^{s-1}\Omega_1)$ et $B_1^n C^l = 4^{s-1}3^{\mu+1-jn}.k"_1\Omega_1$.
- Si $\mu - jn + 1 \geq 1$, alors $3|C^l$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $\mu - jn + 1 \leq 0$, alors $3 \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = 3^{im}A_1^m + 3^{jn}B_1^n$.

Maintenant, si $\beta \geq 2$ et $\alpha = im \geq 3$, on obtient $3b = 4\omega^2(\omega^{\alpha-2}a_1 + 4^{s-1}\omega^{\beta-2}\Omega_1)$. Si $\omega = 3$ ou non, alors $\omega|b$, mais $\omega|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-1-2-4-2-2-2-2- On suppose que $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$ et $h \geq 1$. Par suite, $B^n C_1^l = 4^{s-1}\omega^{\mu-hl}.k"_1.\Omega$. En utilisant la méthodologie ci-dessus, on obtient les résultats analogues.

** J-4-2- On suppose que $4|k_1'$.

** J-4-2-1- $k_1' = 4 \Longrightarrow 4p = 3k_1'b = 12b \Longrightarrow p = 3b = 3p'$, c'est le cas déjà étudié au I-2- paragraphe 5.8.

** J-4-2-2- $k_1' > 4$ avec $4|k_1' \Longrightarrow k_1' = 4^s k"_1$ et $s \geq 1$, $4 \nmid k"_1$. On a donc :

$$A^{2m} = 4^s k"_1 a = 2^{2s}k"_1 a$$
$$B^n C^l = 4^{s-1}k"_1(3b - 4a) = 2^{2s-2}k"_1(3b - 4a)$$

** J-4-2-2-1- On suppose $s = 1$ et $k_1' = 4k"_1$ avec $k"_1 > 1$, soit $p = 3p'$ et $p' = k"_1 b$, c'est le cas 5.3 déjà étudié.

** J-4-2-2-2- On suppose $s > 1$, par suite $k_1' = 4^s k"_1 \Longrightarrow 4p = 3 \times 4^s k"_1 b$ et on a :

$$A^{2m} = 4^s k"_1 a \tag{5.89}$$
$$B^n C^l = 4^{s-1}k"_1(3b - 4a) \tag{5.90}$$

** J-4-2-2-2-1- On suppose que $2 \nmid (k"_1.a) \Longrightarrow 2 \nmid k"_1$ et $2 \nmid a$. Comme $(A^m)^2 = (2^s)^2.(k"_1.a)$, on pose $d^2 = k"_1.a$, par suite $A^m = 2^s.d \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i A_1$ avec $2 \nmid A_1$ et $i \geq 1$. D'où : $2^{im}A_1^m = 2^s.d \Longrightarrow s = im$. De l'équation (5.90), on a $2|(B^n C^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-1-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. L'équation (5.90) devient :

$$B_1^n C^l = 2^{2s-jn-2}k"_1(3b - 4a) = 2^{2im-jn-2}k"_1(3b - 4a)$$

* On suppose que $2 \nmid (3b-4a)$:
- Si $2im - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* On suppose que $2^\mu|(3b-4a)$, $\mu \geq 1$ et que a, b restent copremiers :
- Si $2im + \mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im + \mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** J-4-2-2-2-1-2- On suppose que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** J-4-2-2-2-2- On suppose que $2|(k"_1.a)$:

** J-4-2-2-2-2-1- On suppose que $k"_1$ et a sont copremiers :

** J-4-2-2-2-2-1-1- On suppose que $2 \nmid a$ et $2|k"_1 \Longrightarrow k"_1 = 2^{2\mu}.k"_2^2$ et $a = a_1^2$. Alors les équations (5.89-5.90) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s.2^{2\mu}k"_2^2 a_1^2 \Longrightarrow A^m = 2^{s+\mu}.k"_2.a_1 \tag{5.91}$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}2^{2\mu}k"_2^2(3b-4a) = 2^{2s+2\mu-2}k"_2^2(3b-4a) \tag{5.92}$$

L'équation (5.91) donne $2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i.A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $im = s + \mu$. De l'équation (5.92), on a $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-2-1-1-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{2s+2\mu-jn-2}k"_2^2(3b-4a)$:

* On suppose que $2 \nmid (3b-4a)$:
- Si $2im + 2\mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im + 2\mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* On suppose que $2^\alpha|(3b-4a)$, $\alpha \geq 1$ et que a, b restent copremiers :
- Si $2im + 2\mu + \alpha - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im + 2\mu + \alpha - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** J-4-2-2-2-2-1-1-2- On suppose que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** J-4-2-2-2-2-1-2- On suppose que $2 \nmid k"_1$ et $2|a \Longrightarrow a = 2^{2\mu}.a_1^2$ et $k"_1 = k"_2^2$. Alors les équations (5.89-5.90) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s.2^{2\mu}a_1^2k"_2^2 \Longrightarrow A^m = 2^{s+\mu}.a_1.k"_2. \tag{5.93}$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}k"_2^2(3b-4a) = 2^{2s-2}k"_2^2(3b-4a) \tag{5.94}$$

L'équation (5.93) donne $2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i.A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $im = s+\mu$. De l'équation (5.94), on a $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-2-1-2-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{2s-jn-2}k"_2^2(3b-4a)$:

* On suppose que $2 \nmid (3b-4a) \Longrightarrow 2 \nmid b$:
- Si $2im - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* On suppose que $2^\alpha|(3b-4a)$, $\alpha \geq 1$, dans ce cas a, b sont non copremiers, c'est la contradiction.

** J-4-2-2-2-2-1-2-2- On suppose que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** J-4-2-2-2-2-2- On suppose $k"_1$ et a sont non copremiers avec $2|a$ et $2|k"_1$. Soit $a = 2^t.a_1$ et $k"_1 = 2^\mu k"_2$ et $2 \nmid a_1$ et $2 \nmid k"_2$. De (5.89), on a $\mu + t = 2\lambda$ et $a_1.k"_2 = \omega^2$. Les équations (5.89-5.90) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s k"_1 a = 2^{2s}.2^\mu k"_2.2^t.a_1 = 2^{2s+2\lambda}.\omega^2 \Longrightarrow A^m = 2^{s+\lambda}.\omega \tag{5.95}$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}2^\mu k"_2(3b-4a) = 2^{2s+\mu-2}k"_2(3b-4a) \tag{5.96}$$

De (5.95) on a $2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^iA_1$,$i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (5.96), $2s+\mu-2 \geq 1$, on déduit $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-2-2-1- On suppose $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{2s+\mu-jn-2}k"^2(3b-4a)$:

* On suppose que $2 \nmid (3b-4a)$:

- Si $2s+\mu-jn-2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2s+\mu-jn-2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* On suppose que $2^\alpha|(3b-4a)$, pour une valeur $\alpha \geq 1$. Comme $2|a$, alors $2^\alpha|(3b-4a) \Longrightarrow 2|(3b-4a) \Longrightarrow 2|(3b) \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-2-2-2-2-2-2- On suppose que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

** J-4-3- $2|k'_1$ et $2|(3b-4a)$: alors on obtient $2|k'_1 \Longrightarrow k'_1 = 2^t.k"_1$ avec $t \geq 1$ et $2 \nmid k"_1$. $2|(3b-4a) \Longrightarrow 3b-4a = 2^\mu.d$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid d$. On a aussi $2|b$. Si $2|a$, c'est la contradition avec a, b copremiers.

On suppose dans la suite de cette section que $2 \nmid a$. Les équations (5.89-5.90) deviennent :

$$A^{2m} = 2^t.k"_1.a = (A^m)^2 \tag{5.97}$$
$$B^nC^l = 2^{t-1}k"_1.2^{\mu-1}d = 2^{t+\mu-2}k"_1.d \tag{5.98}$$

De (5.97), on déduit que t est un exposant pair, soit $t = 2\lambda$. Par suite, on pose $\omega^2 = k"_1.a$ ce qui donne $A^m = 2^\lambda.\omega \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (5.98), on a $2\lambda + \mu - 2 \geq 1$, par suite $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** J-4-3-1- On suppose que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^jB_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il s'ensuit que $B_1^nC^l = 2^{2\lambda+\mu-jn-2}.k"_1.d$.

- Si $2\lambda+\mu-jn-2 \geq 1$, on a $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, il n'y a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m+2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2s+t+\mu-jn-2 \leq 0$, il s'ensuit que $2 \nmid C$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m+2^{jn}B_1^n$.

** J-4-3-2- On suppose que $2|C^l \Longrightarrow 2|C$. En utilisant la même méthode ci-dessus, on obtient les mêmes résultats.

□

Le Principal Théorème est démontré.

6. Exemples Numériques

6.1. Exemple 1 : — Soit l'exemple : $6^3+3^3 = 3^5$ avec $A^m = 6^3$, $B^n = 3^3$ et $C^l = 3^5$. Avec les notations utilisées dans le papier, on obtient :

$$p = 3^6 \times 73, \quad q = 8\times 3^{11}, \quad \bar{\Delta} = 4\times 3^{18}(3^7\times 4^2 - 73^3) < 0$$
$$\rho = \frac{3^8\times 73\sqrt{73}}{\sqrt{3}}, \quad cos\theta = -\frac{4\times 3^3\times\sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \tag{6.99}$$

Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{3\times 2^4}{73} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 3\times 2^4,\ b = 73$; alors :

$$cos\frac{\theta}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}}, \quad p = 3^6.b \tag{6.100}$$

On vérifie facilement l'équation (6.99) utilisant (6.100). Pour cet exemple, on peut utiliser les deux conditions de (3.14) comme $3|a$,$b|4p$ et $3|p$. Les cas 4.4 et 5.3 sont respectivement utilisés. Pour le cas 4.4, c'est le sous-cas B-2-2-1- qui est a été utilisé et la conjecture (1.1) est vérifiée. Concernant le cas 5.3, c'est le sous-cas G-2-2-1- qui a été appliqué et la conjecture (1.1) est vérifiée. On trouve pour les deux cas que A^m, B^n et C^l de l'exemple 1 ont un facteur commun ce qui est vrai.

6.2. Exemple 2 : — Soit le deuxième exemple : $7^4+7^3 = 14^3$. On prend $A^m = 7^4, B^n = 7^3$ et $C^l = 14^3$. On obtient $p = 57\times 7^6 = 3\times 19\times 7^6$, $q = 8\times 7^{10}$, $\overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27\times 4\times 7^{18}(16\times 49 - 19^3) = -27\times 4\times 7^{18}\times 6075 < 0$, $\rho = 19\times 7^9\times\sqrt{19}$, $cos\theta = -\dfrac{4\times 7}{19\sqrt{19}}$. Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{7^2}{4\times 19} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 7^2,\ b = 4\times 19$, alors $cos\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{7}{2\sqrt{19}}$ et on a le cas $3|p$ et $b|(4p)$. Le calcul de $cos\theta$ à partir de l'expression de $cos\dfrac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessous :

$$cos\theta = cos3(\theta/3) = 4cos^3\frac{\theta}{3} - 3cos\frac{\theta}{3} = 4\left(\frac{7}{2\sqrt{19}}\right)^3 - 3\frac{7}{2\sqrt{19}} = -\frac{4\times 7}{19\sqrt{19}}$$

On obtient donc $3|p \Rightarrow p = 3p'$, $b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ alors $12p' = k_1b = 3\times 7^6b$. Ceci concerne le paragraphe 5.9 de la deuxième hypothèse. Comme $k_1 = 3\times 7^6 = 3k_1'$ avec $k_1' = 7^6 \neq 1$. C'est le sous-cas J-4-1-2-4-2-2- avec la condition $4|(3b-4a)$. Vérifions alors :

$$3b - 4a = 3\times 4\times 19 - 4\times 7^2 = 32 \Longrightarrow 4|(3b-4a)$$

avec $A^{2m} = 7^8 = 7^6 \times 7^2 = k'_1.a$ et k'_1 non premier, avec a et k'_1 non copremiers avec $\omega = 7 \nmid \Omega(=2)$. On retrouve bien que la conjecture (1.1) est vérifiée avec un facteur commun à savoir le nombre premier 7 un diviseur de $k'_1 = 7^6$.

6.3. Exemple 3 : — Soit le troisième exemple : $19^4 + 38^3 = 57^3$ avec $A^m = 19^4$, $B^n = 38^3$ et $C^l = 57^3$. On obtient $p = 19^6 \times 577\,, \quad q = 8 \times 27 \times 19^{10}\,, \quad \overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 4 \times 19^{18}(27^3 \times 16 \times 19^2 - 577^3) < 0\,, \quad \rho = \dfrac{19^9 \times 577\sqrt{577}}{3\sqrt{3}}\,, \quad cos\theta = -\dfrac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$. Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{3 \times 19^2}{4 \times 577} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 3 \times 19^2,\ b = 4 \times 577$, alors $cos\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}}$ et on a le cas $3|a$ et $b|(4p)$. Le calcul de $cos\theta$ à partir de l'expression de $cos\dfrac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessus :

$$cos\theta = cos3(\theta/3) = 4cos^3\frac{\theta}{3} - 3cos\frac{\theta}{3} = 4\left(\frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}}\right)^3 - 3\frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}} = -\frac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$$

On obtient donc $3|a \Rightarrow a = 3a' = 3 \times 19^2$, $b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ et $b = 4p'$ avec $p = kp'$ soit $p' = 577$ et $k = 19^6$. Ceci concerne le paragraphe 4.8 de la première hypothèse. C'est le sous-cas E-2-2-2-2-1- avec $\omega = 19$, a', ω non copremiers et $\omega = 19 \nmid (p' - a') = (577 - 19^2)$ avec $s - jn = 6 - 1 \times 3 = 3 \geq 1$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

7. Conclusion

La méthode utilisée pour prouver que la conjecture de Beal est vraie a demandé l'étude de plusieurs cas possibles. On a confirmé la méthode par les trois exemples numériques présentés. En conclusion, on peut annoncer le théorème :

Théorème 7.1. — (A. Ben Hadj Salem, A. Beal, 2017) : *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{7.101}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur en commun.

Références

[1] R. DANIEL MAULDIN. *A Generalization of Fermat's Last Theorem : The Beal Conjecture et Prize Problem.* Notice of AMS, Vol 44, $n°11$, 1997, pp 1436-1437.

[2] B.M. STEWART. *Theory of Numbers.* Second edition. The Macmillan Compagny, New York. 1964. 390 pages.

[3] E.D. BOLKER. *Elementary Number Theory : An Algebraic Approach.* W.A. Benjamin, Inc., New York. 1970. 195 pages.

[4] D.A. COX. *Primes of the form :$x^2 + ny^2$, Fermat, class field theory and complex multiplication.* A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc., New York. 1989. 363 pages.

[5] G. FREI. *Leonhard Euler's convenient numbers.* The Mathematical Intelligencer, Vol. 7, $n°3$ (1985), pp.55-58 and 64.

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, 6, rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisie
E-mail : abenhadjsalem@gmail.com