El problema del movimiento en la teoría de campo unificado asimétrico de Einstein

The problem of motion in the theory of unified field asymmetric of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. Hacemos una recopilación de los intentos realizados para derivar la ley de movimiento de una partícula a partir de las ecuaciiones de campo de la teoría unificada asimétrica de Einstein. A primer orden la ecuación de movimiento debe contener la ley de la gravitación de Newton y la ley de Coulomb. Para deducir la ley de movimiento utilizamos el método con que Einstein, Infeld y Hoffmann resolvieron el problema del movimiento en Relatividad General.

Abstract. We make a compilation of attempts to derive the law of motion of a particle from the field equation of the theory unified asymmetric of Einstein. The equation of motion to first order must contain the law of gravitation of Newton and Coulomb's law. To derive the law of motion we use the method with which Einstein, Infeld and Hoffmann solved the problem of motion in General Relativity.

Contenido

La versión *v1* del artículo «El problema del movimiento en la teoría de campo unificado asimétrico de Einstein» se publicó el día 11 de noviembre de 2016.

El problema del movimiento en la teoría de campo unificado asimétrico de Einstein

The problem of motion in the theory of unified field asymmetric of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

A.- INTRODUCCIÓN

1-A. Introducción

Una teoría de campo consecuente debe tener unas ecuaciones únicas, que no pueden suplementarse por la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve en su seno. En este sentido ni la teoría gravitatoria de Newton ni la teoría maxwelliana del electromagnetismo son teorías completas de campo.

Concebida como una teoría de campo, la gravitación newtoniana tiene por ecuación de campo la ecuación de Laplace para el caso exterior

$$\nabla^2\psi = 0$$

o la de Poisson para el caso interior

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\rho$$

donde ψ es el potencial gravitatorio y ρ la densidad de masa. De estas ecuaciones sólo se puede determinar el potencial gravitatorio pero no el movimiento de una partícula en el seno del campo. Para conseguir este propósito es necesario agregar a las anteriores ecuaciones diferenciales de campo, la ecuación

$$\mathbf{F} = -m\nabla\psi$$

donde la fuerza **F** se define como $m\mathbf{a}$, siendo m la masa de la partícula cuyo movimiento se estudia.

Lo mismo ocurre en la teoría electromagnética, donde el conjunto de ecuaciones diferenciales de Maxwell nos permite hallar las intensidades de campo eléctrico **E** y de campo magnético **B**, en función de la distribución y movimiento de las cargas eléctricas; pero para determinar la ecuación de movimiento de una partícula en el seno de ese campo tenemos que agregar la ecuación de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u}\wedge\mathbf{B}.$$

Las dos teorías de campo anteriores son lineales, es decir que si A y B son dos soluciones de la teoría, la suma de ambas $A+B$ también es una solución de las ecuaciones de campo. Se puede comprobar que para teorías lineales no es posible deducir la ecuación de movimiento de las ecuaciones diferenciales de campo. Consideremos que el movimiento de una partícula que llamamos P puede ser determinada por las ecuaciones de campo. Consideremos que en vez de P hay otra partícula Q cuyo movimiento también será determinado por las ecuaciones de campo. Ahora bien, como la teoría de campo que estamos considerando es lineal, conjuntamente las dos ecuaciones de movimiento que son soluciones de las ecuaciones de campo, será también una aceptable ecuación de movimiento cuando estén presentes tanto las partículas P como Q. Pero entonces nos encontramos con el absurdo de que el movimiento de la partícula P no depende de la presencia de la partícula Q y viceversa. Por tanto se debe concluir que el punto de partida es falso, es decir, que de las ecuaciones de campo lineales no se puede deducir la ecuación de movimiento de una partícula.

La ecuación de campo de la Relatividad General no es lineal, por tanto no tenemos el inconveniente anterior y sería posible que de ella obtuviéramos la ley de movimiento de una partícula. Esta investigación fue realizada con éxito en el año 1938 por Einstein, Infeld y Hoffmann, en un célebre y elaborado trabajo que va a representar la base de la recopilación que hacemos más adelante.

Tampoco la teoría de campo unificado asimétrico de Einstein es lineal. Como esta teoría pretende unificar el campo gravitatorio y el electromagnético, podría deducirse de ella la ecuación de movimiento de una partícula en el seno de ambos campos. Como esta teoría unificada es una generalización de la Relatividad General, cabe esperar que se logre deducir la ecuación de movimiento en el campo gravitatorio, por tanto la investigación que más adelante desarrollamos lo que pretende es obtener, aunque sea en primera aproximación, la ley de Lorentz del movimiento de una carga eléctrica en un campo electromagnético.

En primera aproximación la ley de Lorentz sólo recoge la fuerza de origen eléctrico y no la magnética, puesto que la intensidad de campo magnético **B** es dos órdenes superior al campo eléctrico, es decir, la fuerza magnética se podría obtener si obtenemos la ecuación de movimiento a segundo grado de aproximación.

2-A. La teoría de la Relatividad

La teoría de la Relatividad es un proyecto que pretende la interpretación global de la Naturaleza a partir de la geometríca del espacio y el tiempo. La teoría fue desarrollada en tres fases.

La primera de ellas, la Relatividad Especial, tiene como logro el entender que el espacio y el tiempo no son entidades separadas, sino lo que realmente existe es una amalgama entre ellos, lo que llamamos el espacio-tiempo. Esto viene a significar, que si bien un observador puede separar el espacio del tiempo, dicha separación es relativa al observador, en el sentido de que otro observador en un estado de movimiento diferente haría una separación del espacio y del tiempo distinta a la del anterior.

Según la Relatividad Especial, en ausencia de campos físicos la geometría del espacio-tiempo es pseudo euclídea, lo que significa que siempre podemos elegir un sistema de coordenadas respecto al cual las componentes del tensor métrico tomen los mismos valores en todo los puntos del espacio-tiempo.

La segunda fase en el desarrollo de la Relatividad fue la teoría general de la Relatividad, según ella el campo gravitatorio no es más que la manifestación de la geometría espacio-temporal, más concretamente, que en presencia de gravedad el espacio-tiempo tiene una geometría riemanniana, lo que significa que el tensor métrico y la conexión son simétricos y además que la derivada covariante del tensor métrico es idénticamente nula.

Finalmente, la tercera fase de la teoría de la Relatividad es la teoría de campo unificado, que hay que entender como la teoría definitiva, o sea aquella que no solamente es capaz de interpretar todos los campos como una alteración de la geometría del espacio-tiempo sino que incluso debería ser capaz de interpretar la materia como una estructura espacio-temporal.

Desde el año 1918, en que aparece la teoría de campo unificado de Weyl, han sido muy numerosos los intentos de desarrollar una teoría de campo unificado en el marco de la Relatividad. En el año 1945 Einstein inició una investigación al respecto eligiendo una teoría caracterizada por tener un tensor métrico asimétrico. Esta teoría, que llamaremos de campo unificado asimétrico de Einstein, y que se presenta en varias versiones, va a ser en la que investiguemos el problema del movimiento de una partícula.

3-A. La teoría de campo unificado asimétrico de Einstein

Como hemos dicho, en el año 1945 Einstein publica la primera de una serie de investigaciones relacionadas con la teoría unificada de campo asimétrico. En estas investigaciones fue ayudado por su asistente Ernst G. Straus y por la física Bruria Kaufmann [1].

La idea de Einstein consiste en generalizar la teoría gravitatoria, o sea, obtener una teoría que no solamente se reduzca a la Relatividad General en primera aproximación, sino una teoría cuyas ecuaciones sigan un paralelismo con las de la teoría general de la Relatividad.

La teoría de campo unificado asimétrico de Einstein es considerada como una teoría de campo completa, es decir, monística y por tanto sólo se admite ecuaciones similares a la del caso exterior de la Relatividad General. La materia, por tanto, no es necesario introducirla en la teoría como un elemento extraño al campo, sino que debe de surgir de las ecuaciones de campo.

Las ecuaciones de la gravitación que se pretenden generalizar son las de la Relatividad General

$$D_r \boldsymbol{g}^{ik} = 0; \quad R_{ik} = 0 \tag{1}$$

donde la primera ecuación es la derivada covariante de la densidad del tensor métrico (las densidades las representamos con letra negrita) y la segunda es la anulación del tensor de Ricci. Además, en vista a su generalización, hay que tener presente que en la Relatividad General tanto el tensor métrico como la conexión son simétricas (y por tanto el vector de torsión es nulo) y también es simétrico el tensor de Ricci que sirve para componer la densidad lagrangiana de donde se derivan las ecuaciones (1).

La generalización de las ecuaciones gravitatorias son conseguidas, primeramente, suponiendo la asimetría del tensor métrico y de la conexión. Se observa que la parte simétrica del tensor métrico (que son 10 componentes) viene a representar el campo gravitatorio, mientras que las 6 componentes de la parte antisimétrica del tensor métrico deben corresponder al tensor de campo electromagnético. Aquí aparece una anómala discordancia, puesto que la parte simétrica del tensor métrico la asociaciomos con un potencial de campo, mientras que la parte simétrica la relacionamos con intensidades de campo, los cuales son derivados de potenciales por diferenciación.

Es necesario generalizar la propiedad de simetría de la Relatividad General. Einstein elige lo que llama simetría hermítica o invariancia por transposición. Sea una magnitud $H_{ik} = H_{ik}\left(g,\Gamma\right)$ que depende del tensor métrico y de la conexión. Decimos que tiene simetría hermítica si al cambiar el tensor métrico y la conexión por sus conjugados y luego intercambiar los índices *i* y *k* se obtiene la misma magnitud

$$H_{ik}\left(g,\Gamma\right) = H_{ki}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right).$$

Einstein utiliza otro concepto de simetría, diferente de la simetría hermítica antes definida y que llama condición de simetría: si en una ecuación física $H_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0$ se sustituye el tensor métrico y la conexión afín por sus conjugados la ecuación se mantiene, es decir

$$H_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0 \quad \Rightarrow \quad H_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)=0,$$

Nótese que si tiene simetría hermítica se cumple la condición de simetría, pero no se puede afirmar lo contrario.

Einstein persigue generalizar las ecuaciones (1) procurando que las expresiones generalizadas tengan la simetría hermítica. Por ello se ve en la necesidad de hacer una nueva definición de derivada covariante, para que tenga la simetría hermítica y con la que poder obtener una ecuación similar a la primera de (1). Igualmente es necesario (aunque no lo es en todas las deducciones que Einstein hizo de su teoría) generalizar el tensor de Ricci buscando la deseada simetría hermítica.

La primera ecuación (1) se generaliza al precio de requerir que el vector de torsión sea nulo o lo que es lo mismo a exigir que

$$\boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k} = 0$$

que tiene el significado físico de representar al primer grupo de ecuaciones de Maxwell.

Otro elemento guía de Einstein en la búsqueda de las ecuaciones de campo unificado es el principio de covariancia, al que Einstein llama principio general de la Relatividad. Entonces las ecuaciones de campo buscadas deben ser invariantes frente a transformaciones de coordenadas y previsiblemente deben ser ecuaciones tensoriales.

Por último, Einstein utiliza el principio de mínima simplicidad lógica posible como un elemento guía en su investigación. Aún con todo lo expuesto, en la deducción de las ecuaciones de campo unificado sigue habiendo un alto grado de arbitrareidad, pero poco más se puede hacer al respecto, ya que no tenemos suficientes argumentos físicos para elegir un camino u otro en la búsqueda de las ecuaciones de campo.

Para conseguir los objetivos antes trazados, Einstein va a utilizar el principio variacional en la mayoría de las deducciones que hizo de las ecuaciones de campo. La ventaja en la utilización de este principio radica en que las ecuaciones de campo resultante son compatibles, lo que no se puede asegurar si se utiliza otro método.

Al utilizar un principio variacional, Einstein se enfrenta al dilema de elegir la densidad lagrangiana. El camino más natural, que es el seguido por Einstein, es tomar densidades lagrangianas similares a la utilizada en la Relatividad General. Esto significa que va a utilizar el tensor de Ricci (o sus modificados) para construir conjuntamente con el tensor métrico la densidad lagrangiana [2]

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik}, \tag{2}$$

variando la acción respecto al tensor métrico y respecto a la conexión. Por tanto la teoría de Einstein es una teoría métrico-afín.

En ninguna de las deducciones que hizo Einstein utilizó la curvatura homotética, un tensor de segundo orden derivado de la contracción del tensor de curvatura. La razón hay que buscarla, quizás, en que para las ecuaciones que buscaba Einstein, la curvatura homotética es nula [3].

En algunas de las propuestas de Einstein no se utiliza el método variacional, sino que se obtienen las ecuaciones de campo mediante consideraciones genéricas, siempre tratando de generalizar los resultados de la teoría gravitatoria.

Es fácil advertir la debilidad de esos argumentos utilizados por Einstein para llegar a su teoría de campo unificado asimétrico. Por ejemplo, las ecuaciones de campo no tienen que tener la condición de simetría, podrían obedecer a otra simetría más compleja; ni la densidad lagrangiana tiene que ajustarse a la forma (2), pues hay otras posibilidades. Es decir, los argumentos esgrimidos por Einstein para obtener las ecuaciones de campo no son concluyentes.

Einstein en sus numerosas demostraciones quiso encontrar razones (quizás de orden estético) que fortalecieran sus argumentos de partida, aquí se encuentra la principal razón por las que abordó las deducciones ecuaciones de campo de catorce forma diferentes.

Einstein deduce cinco grupos diferentes de ecuaciones de campo aunque muy parecidos entre sí. Los dos principales grupos son las denominadas ecuaciones fuertes de campo

$$D_r g^{\underset{+-}{ik}} = \partial_r g^{ik} + g^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + g^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} = 0$$
$$\tau_i = 0$$
$$R_{ik} = 0$$

donde τ_i es el vector de torsión definido por

$$\tau_i = \Gamma_{ir}^{\ \ r} - \Gamma_{ri}^{\ \ r},$$

el otro grupo son las ecuaciones débiles

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0$$
$$\tau_i = 0$$
$$R_{(ik)} = 0$$
$$R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0,$$

donde, como es habitual, los paréntesis redondos significan simetrización y los cuadrados antisimetrización; la coma representa la derivación parcial respecto a las coordenadas.

Otro conjunto de ecuaciones de campo tiene una estructura intermedia entre las dos anteriores, por lo que la hemos llamado ecuaciones fuertes generalizadas

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{M}^i \delta_r^k - \boldsymbol{M}^k \delta_r^i\right) = 0$$
$$\tau_i = 0$$
$$\overline{R}^*_{ik} = -\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\ \ r} + \Gamma_{(rk),i}^{\ \ r}\right] - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{(tr)}^{\ \ r} = 0$$

donde $\overline{R}^*_{ik}$ es un tensor derivado del tensor de Ricci, mientras que $\boldsymbol{M}^i$ es una densidad vectorial definida por

$$\boldsymbol{M}^i = \frac{1}{2}\left(D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}} - D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ti}}\right) = \partial_r \boldsymbol{g}^{[ir]} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{(ir)}\tau_r .$$

Otro conjunto de ecuaciones matemáticamente correctas es

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r - \frac{1}{3}\delta_r^k \boldsymbol{g}^{it}\tau_t$$
$$R_{ik} = 0$$

caracterizada por tener un vector de torsión no nulo.

En una de sus últimas investigaciones, publicada poco antes de su muerte en 1955, Einstein dedujo las ecuaciones de campo

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r + \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ip}\tau_p \delta_r^k = 0$$
$$R_{ik} = 0$$

que tiene la propiedad de ser invariante frente a la denominada transformación lambda y de donde se deriva el conjunto débil de ecuaciones de campo con una adecuada elección de la conexión.

4-A. Organización del trabajo

En las secciones B y C obtenemos la ecuación de movimiento de una partícula tanto en el marco de la Relatividad Especial (o sea, en ausencia de campos), como en la Relatividad General (o sea, en presencia de campo gravitatorio). En esta última sección se deduce la ecuación de movimiento cuando, además de la gravedad, hay presencia de campo electromagnético.

Dedicamos la sección D a explicar de forma resumida el método de Einstein-Infeld-Hoffmann que será utilizado en todos los cálculos posteriores.

En el apartado E se vuelve a la Relatividad General con una idea de Infeld para obtener la ley de movimiento de una partícula cargada en el seno de un campo gravitatorio y electromagnético, obteniéndose en primera aproximación tanto la ley de gravitación de Newton como la ley de Coulomb.

Con la sección F se entra en la materia principal de la exposición. Utilizando el método de Einstein-Infeld-Hoffmann se concluye que no puede deducirse de la teoría de campo unificado asimétrico en su versión fuerte la ley de Coulomb, aunque se deduce la ley de Newton.

En el apartado G confirmamos que la ecuación de movimiento en la teoría unificada que examinamos no puede ser ni la geodésica métrica ni la afín, tal como ocurre en Relatividad Especial y General.

En la sección H se comprueba que tampoco la versión débil de la teoría de campo unificado asimétrico de Einstein da la ecuación de movimiento en un campo electromagnético.

Las componentes espaciales de la parte antisimétrica del tensor métrico se identifican con el campo eléctrico el cual se deriva del potencial electroestático. Pero cabe modificar este planteamiento. Esto es lo que se hace en la sección H, en donde añadimos al potencial electroestático (dependiente de la inversa de r), un término lineal en r. Con esta idea se encuentra la ley de Coulomb a partir de la teoría de campo unificado asimétrico en su versión débil, pero a costa de introducir un parámetro arbitrario.

Otra posibilidad es una idea de Klotz y Russell según la cual no se identifica las componentes $0,\alpha$ de la parte antisimétrica del tensor métrico con el tensor de campo electromagnético, sino que se define una asociación diferente. El resultado de esta propuesta es que se deduce la ley de Coulomb, entendida como la primera aproximación de la ley de Lorentz, aunque con el inconveniente de que aparecen otras fuerzas electroestáticas que son desconocidas en la teoría de Maxwell.

En la sección K se expone una idea de Bonnor consistente en modificar la ecuación de campo unificado, agregándole un término complementario. También esta idea tiene éxito, en el sentido de que se obtiene la ley de Lorentz en primera aproximación; no obstante, al igual que en la anterior propuesta es necesario introducir un parámetro indefinido.

En el apartado L tratamos de obtener la ley de movimiento a partir de una modificación de la teoría de campo unificado asimétrico, aquella versión que no exige la nulidad del vector de torsión. En este supuesto volvemos a obtener la ley de Lorentz en primera aproximación, siempre y cuando, utilicemos la sugerencia de Bonnor de complementar las ecuaciones de campo con un término que se encuentra multiplicado por una constante indefinida.

El trabajo concluye con el epígrafe de conclusiones y la bibliografía utilizada. El análisis de los intentos realizados para obtener la ecuación de movimiento a partir del tensor energía-momento de la teoría de campo unificado, los dejamos para otro artículo posterior.

B.- EL MOVIMIENTO EN RELATIVIDAD ESPECIAL

1-B. La ecuación de movimiento en Relatividad Especial

En ausencia de campos la geometría espacio-temporal es pseudo euclídia, en el sentido de que siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas, que llamamos pseudo cartesiano, respecto al cual las componentes del tensor métrico η_{ik} son los mismos en todos los puntos y tienen la forma diagonal $\eta_{ik}=(1,-1,-1,-1)$; entonces el elemento de línea es

$$ds^2=\eta_{ik}dx^i dx^k=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2.$$

El sistema de referencia definido por estas coordenadas es inercial, lo que quiere decir que respecto a este sistema una partícula aislada lleva, por la ley de la inercia, un movimiento uniforme y su ley de movimiento es

$$\frac{du^k}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad u^k=cte,$$

para otro sistema de referencia o bien para otro de coordenadas (por ejemplo, uno esférico), es necesario modificar la ecuación anterior. Si la ecuación de transformación de las coordenadas cuando se hace el cambio de sistema de referencia o de coordenadas es

$$dx'^{i} = A^{i}_{k} dx^{k} \quad \Leftrightarrow \quad dx^{k} = B^{k}_{i} dx'^{i}$$

entonces

$$\frac{du^{k}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(B^{k}_{i} u'^{i}\right) = B^{k}_{ir} u'^{r} u'^{i} + B^{k}_{j} \frac{du'^{j}}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du'^{j}}{ds} + B^{k}_{ir} A^{j}_{k} u'^{r} u'^{i} = 0 \tag{2}$$

ahora bien, la ley de transformación de la conexión afín es

$$\Gamma'^{\;j}_{ir} = B^{p}_{i} B^{q}_{r} A^{j}_{s} \Gamma_{pq}{}^{s} + B^{k}_{ir} A^{j}_{k}$$

pero en un sistema pseudo cartesiano $\Gamma_{pq}{}^{s} = 0$ entonces

$$\Gamma'^{\;j}_{ir} = B^{k}_{ir} A^{j}_{k}$$

y al llevar este resultado a (2) queda, quitando las primas para simplificar la expresión

$$\frac{du^{j}}{ds} + \Gamma_{ir}^{\;j} u^{r} u^{i} = 0, \tag{3}$$

que es la ecuación de movimiento de una partícula aislada en un sistema de coordenadas y de referencia genérico. Démonos cuenta que esta es la ecuación de movimiento en cualquier sistema de referencia (sea o no inercial) y para cualquier sistema de coordenadas. La ecuación (3) nos viene a decir que la derivada covariante de la tetravelocidad es nula, es decir

$$\frac{Du^{k}}{ds} = 0. \tag{4}$$

La acción de una partícula libre en ausencia de campos en un sistema inercial en coordenadas pseudo cartesianas es dada por

$$I = \int L dt = -mc \int ds = -mc^{2} \int \sqrt{1 - u^{2}/c^{2}}\, dt \tag{5}$$

donde L es la lagrangiana de la partícula, ya que de L se deriva el momento lineal de la partícula cuando se aplica las técnicas habituales, en efecto

$$p^{k} = -\frac{\partial L}{\partial u_{k}} = \frac{mu^{k}}{\sqrt{1 - u^{2}/c^{2}}}.$$

Otra forma de obtener la ecuación de movimiento es exigir que la acción de la partícula (5) sea una extremal. Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange a la lagrangiana L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{k}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_{k}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial u_{k}} = p^{k} = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{mu^{k}}{\sqrt{1 - u^{2}/c^{2}}} = cte, \tag{6}$$

lo que implica que tanto u^{k} como u tienen que ser constantes; en efecto, tomando $k = 0$

$$\frac{mu^{0}}{\sqrt{1 - u^{2}/c^{2}}} = \frac{m\, dx^{0}/d\tau}{\sqrt{1 - u^{2}/c^{2}}} = \frac{mc}{1 - u^{2}/c^{2}} = cte \quad \Rightarrow \quad u = cte$$

donde $d\tau$ es el elemento de tiempo propio de la partícula; entonces por (6) $u^{k} = cte$; la ecuación de movimiento en coordenadas pseudo cartesianas queda entonces

$$\frac{du^{k}}{ds} = 0,$$

que coincide con (4) cuando se utilizan otras coordenadas o cuando el sistema no es inercial.

2-B. Geodésica métrica y geodésica afín

Hay dos formas de definir la línea geodésica. Una de ellas es decir que la línea geodésica entre dos puntos es la línea de menor longitud entre ambos puntos, a esta definición la llamaremos geodésica métrica. La otra posibilidad es definir la geodésica como la línea que tiene la propiedad de que sus vectores tangentes en cualquiera de sus puntos son paralelos entre ellos, que recibirá el nombre de geodésica afín.

Como más adelante veremos ambas definiciones representan la misma línea si el espacio es de Riemann, pero en general los dos tipos de geodésicas son diferentes.

El vector unitario a una curva es

$$\mathbf{u}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

ds es la distancia entre dos puntos infinitesimales de la curva. Notemos que el anterior vector tiene de módulo unidad y es tangente a la curva. Si se trata de una geodésica afín, su vector tangente unitario **u**, debe ser el mismo en todo punto. Si utilizamos coordenadas cartesianas esta condición viene dada por

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds}=0$$

y para coordenadas curvilíneas cualesquiera

$$\frac{D\mathbf{u}}{ds}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{du^r}{ds}+\Gamma_{ik}{}^{r}u^iu^k=0, \tag{7}$$

la anterior por tanto es la condición que define a una geodésica afín.

Para determinar la ecuación de una geodésica métrica partimos de la distancia entre los puntos A y B.

$$s_{AB}=\int_A^B\sqrt{g_{ik}dx^idx^k}=\int_A^B\sqrt{g_{ik}\left[x^r(t)\right]\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}}dt=\int_A^B\sqrt{g_{ik}\left[x^r(t)\right]\dot{x}^i\dot{x}^k}dt=\int_A^B\sqrt{f\left(x^r,\dot{x}^r\right)}dt$$

donde el punto significa derivación respecto a un parámetro indefinido *t.* Para hallar la ecuación de la geódesica métrica se aplica la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial\dot{x}^r}\right)-\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial x^r}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^r}\right)-\frac{\partial f}{\partial x^r}+\frac{1}{2f}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^r}\frac{df}{dt}=0. \tag{8}$$

Si identificamos el parámetro t con la distancia s, entonces

$$f=g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k=1,$$

y (8) nos queda

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^r}\right)-\frac{\partial f}{\partial x^r}=0,$$

que al desarrollar se llega a

$$g_{kr}\ddot{x}^k+g_{rk}\ddot{x}^k+\left(\partial_q g_{kr}+\partial_k g_{rq}-\partial_r g_{kq}\right)\dot{x}^k\dot{x}^q=0$$

donde suponemos que el tensor métrico no es simétrico y que el punto significa derivación respecto a s. Descomponiendo g_{ik} en parte simétrica y antisimétrica se obtiene

$$2g_{(rk)}\ddot{x}^k+\left(\partial_q g_{(kr)}+\partial_k g_{(rq)}-\partial_r g_{(kq)}\right)\dot{x}^k\dot{x}^q=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}^i+L_{kq}{}^{i}\dot{x}^k\dot{x}^q=0 \tag{9}$$

donde $L_{kq}{}^{i}$ son los símbolos de Christoffel calculados con la parte simétrica del tensor métrico. La anterior es la ecuación de la geodésica métrica.

En el caso de un espacio de Riemann, en el que el tensor métrico es simétrico y la conexión son los símbolos de Christoffel, las ecuaciones (7) y (9) coinciden.

Ahora podemos decir el significado geométrico de los dos métodos por los que hemos obtenido la ecuación de movimiento en Relatividad Especial, el primero corresponde en afirmar que la trayectoria de una partícula tiene que ser una geodésica afín, mientras que el segundo método corresponde a decir que la trayectoria de la partícula tiene que ser una geodésica métrica; como el espacio-tiempo de la Relatividad Especial es pseudo euclídeo, o sea un tipo de espacio de Riemann, ambas formas de definir la ecuación de movimiento coinciden.

C.- EL MOVIMIENTO EN RELATIVIDAD GENERAL

1-C. El tensor energía-momento de un sistema de partículas

Vamos a considerar un sistema de N partículas puntuales de masa m_n, donde el súbíndice identifica a la partícula n. De momento vamos a considerar el espacio-tiempo pseudo euclídeo en coordenadas pseudo cartesianas. El tetramomento de la partícula n viene definido por [4], [5]

$$p_n^k=m_nu_n^k=m_n\frac{dx_n^k}{d\tau_n},$$

donde $d\tau_n$ representa el tiempo propio de la partícula, es decir lo que marca un reloj que acompaña a la partícula en su movimiento. Si definimos la delta de Dirac tridimensional por

$$\int f(\mathbf{r})\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)dV = f(\mathbf{r}_n)$$

la integración siendo efectuada para todo el espacio, donde **r** es la posición genérica de un punto del espacio y $\mathbf{r}_n$ es una posición determinada: el lugar ocupado por la partícula *n*; además, $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)$ es cero en todo punto excepto cuando $\mathbf{r}=\mathbf{r}_n$. Con la ayuda de la delta de Dirac se define el tetramomento lineal por unidad de volumen del conjunto de *N* partículas

$$\sum_n p_n^k \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n),$$

en efecto, si la anterior expresión la integramos para todo el volumen formado por el sistema de partículas

$$\int \sum_n p_n^k \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)dV = \sum_n p_n^k.$$

Si con g^k representamos la densidad de volumen de momento lineal y ε la densidad de energía, entonces por el significado del tensor de energía-momento

$$T^{0k} = cg^k; \quad T^{00} = \varepsilon; \quad T^{\alpha\beta} = g^{\alpha}u^{\beta}.$$

Por tanto el tensor energía-momento del sistema de partículas considerado es

$$T^{ik} = \sum_n p_n^i \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)\frac{dx_n^k}{dt} \tag{10}$$

Vamos a comprobar que la anterior expresión es un tensor en el espacio-tiempo de la Relatividad Especial. Definimos la función delta de Dirac en el espacio tetradimensional como

$$\int \Phi\left(x^{\alpha},x^{0}\right)\delta^{(4)}\left(x^{q}-x'^{q}\right)dx^{0} = \Phi\left(x^{\alpha},x'^{0}\right)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

y por tanto

$$\int \Phi\left(x^{q}\right)\delta^{(4)}\left(x^{q}-x'^{q}\right)d\Omega = \Phi\left(x'^{q}\right) \tag{11}$$

$d\Omega = dxdydzdx^0$ representa el volumen tetradimensional si se utilizan coordenadas pseudo cartesianas. Con esta definición (10) queda

$$T^{ik} = \int dx^0 \sum_n p_n^i(t)\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\frac{dx_n^k}{dt}$$

como la *t* es una variable muda, la podemos sustituir por el tiempo propio τ, entonces el tensor energía-momento es

$$T^{ik} = c\sum_n m_n \int \delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n}d\tau_n. \tag{12}$$

Pero (12) es válida en el espacio-tiempo pseudo euclídeo y en coordenadas pseudo cartesianas, para encontrar la expresión generalizada tengamos en cuenta que (10) es una definición y por tanto válida para cualquier sistema de coordenadas, es decir es invariante. $d\Omega$ no es invariante, pero si lo es

$$\sqrt{g}\,d\Omega$$

por tanto como $\Phi\left(x^q\right)$ es un invariante y también lo es (11) entonces

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{(4)}\left(x^q - x'^q\right)$$

es un invariante, o sea, $\delta^{(4)}\left(x^k - x'^k\right)$ es una densidad escalar, lo que significa que cuando tratamos con transformaciones genéricas de coordenadas (12) no es un tensor sino una densidad tensorial, por tanto

$$\boldsymbol{T}^{ik} = c\sum_n m_n \int \delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n}d\tau_n \tag{13}$$

o bien

$$T^{ik} = \frac{c}{\sqrt{g}}\sum_n m_n \int \delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n}d\tau_n \tag{14}$$

(13) o (14) serán las expresiones a utilizar en presencia de campo gravitatorio.

2-C. La ecuación de movimiento en la teoría general de la Relatividad

Se entiende por partícula de prueba aquella partícula puntual de masa despreciable, hasta el extremo de que no afecta al campo gravitatorio. Vamos en lo que sigue a determinar la ecuación de movimiento de una partícula de prueba en un campo gravitatorio [6].

Una primera posibilidad consiste en extender los resultados de la Relatividad Especial, haciendo uso del principio de correspondencia. Por tanto podemos decir que la ecuación de movimiento de una partícula de prueba es una geodésica (ya sea métrica o afín, porque ambas son la misma en un espacio de Riemann), o sea, la ecuación es la (4) o la (9). Pero en Relatividad General tenemos otra forma de obtener la ecuación de movimiento de una partícula.

La ecuación de campo gravitatorio para el caso interior es

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\chi T_i^k$$

donde se cumple la identidad de Bianchi, lo que significa

$$D_k\left(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R\right) = 0$$

por tanto también se cumplirá

$$D_k T_i^k = 0$$

que son las ecuaciones de conservación de la energía-momento de la materia. De esta última ecuación se puede deducir la ecuación de movimiento de una partícula.

Vamos a suponer que las fuentes del campo gravitatorio es un conjunto de partículas puntuales cuyo tensor energía-momento viene dado por (13). Como el tensor energía-momento es simétrico se cumple

$$D_k \boldsymbol{T}^{ik} = \partial_k \boldsymbol{T}^{ik} + \Gamma_{rk}^{\ i} \boldsymbol{T}^{rk},$$

que al aplicarlo a (12)

$$D_k \boldsymbol{T}^{ik} = c\sum_n m_n \int d\tau_n \left\{ \left[\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\right]_{,k} \frac{dx_n^i}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n} + \Gamma_{rk}^{\ i}\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\frac{dx_n^r}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n}\right\} \tag{15}$$

el primer sumando de la anterior integral se descompone según

$$\left[\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\right]_{,k}\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n} = -\frac{\partial}{\partial x_n^k}\left[\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\right]\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n} = -\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\frac{d}{d\tau_n}\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right) =$$

$$= -\frac{d}{d\tau_n}\left[\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\right] + \delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\frac{d^2x_n^i}{d\tau_n^2},$$

ahora bien

$$\int_A^B -\frac{d}{d\tau_n}\left[\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\right]d\tau_n = -\frac{dx_n^i}{d\tau_n}\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\Bigg|_A^B$$

elegidos los límites de la integración A y B fuera del sistema de partículas, la función delta de Dirac es nula y por lo tanto la integral anterior también se anula. Con esta simplificación (15) queda

$$D_k \boldsymbol{T}^{ik} = c\sum_n m_n \int d\tau_n \delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\left\{\frac{d^2x_n^i}{d\tau_n^2} + \Gamma_{rk}^{\ i}\frac{dx_n^r}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n}\right\} \tag{16}$$

donde los símbolos de Christoffel están evaluados en un punto genérico, pero como

$$f\left(x^k\right)\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right) \equiv \tilde{f}\left(x^k\right)\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right) = f\left(x_n^k\right)\delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)$$

entonces (16) queda

$$D_k \boldsymbol{T}^{ik} = c\sum_n m_n \int d\tau_n \delta^{(4)}\left(x^q - x_n^q\right)\left\{\frac{d^2x_n^i}{d\tau_n^2} + \tilde{\Gamma}_{rk}^{\ i}\frac{dx_n^r}{d\tau_n}\frac{dx_n^k}{d\tau_n}\right\}$$

donde $\tilde{\Gamma}_{rk}^{\ i}$ significa que los símbolos de Christoffel están calculados en el punto de coordenadas x_n^q es decir donde se encuentra la partícula *n*. Para que la anterior integral sea nula como exige la conservación de la energía y el momento se tiene que cumplir que sea nulo el integrando, es decir

$$\frac{d^2 x_n^i}{d\tau_n^2} + \tilde{\Gamma}_{rk}^{\ \ i} \frac{dx_n^r}{d\tau_n} \frac{dx_n^k}{d\tau_n} = 0$$

que es la ecuación de la geodésica que sigue la partícula *n*, reencontrando por las identidades de Bianchi la ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio.

3-C. La ecuación de movimiento en presencia de campo electromagnético deducida de la ley de conservación de la energía y el momento

La ecuación de campo gravitatorio con fuentes tiene la forma

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\chi T_{ik}$$

donde T_{ik} es el tensor energía-momento de las fuentes de campo gravitatorio que, en presencia de campo electromagnétíco, está formado por el tensor de energía-momento de la materia $T_{ik}^{(\mathrm{m})}$ y el del campo electromagnético $T_{ik}^{(\mathrm{e})}$

$$T_{ik} = T_{ik}^{(\mathrm{e})} + T_{ik}^{(\mathrm{m})}$$

donde

$$T_{ik}^{(\mathrm{m})} = \rho^{(\mathrm{m})} u_i u_k \,; \quad T_{ik}^{(e)} = -\varepsilon_0 F_k^{\ q} F_{iq} + \frac{\varepsilon_0}{4} g_{ik} F^{pq} F_{pq}$$

suponemos que la materia está formada por materia en polvo que no ejerce presión. $\rho^{(\mathrm{m})}$ es la densidad de materia de un elemento de volumen de la materia medido en su sistema propio y u^k es la tetravelocidad de ese elemento de volumen. F_{ik} es el tensor de campo electromagnético

$$F_{ik} = D_i \phi_k - D_k \phi_i = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}$$

ϕ_k es el tetrapotencial electromagnético definido por

$$\phi^k = (\phi, c\mathbf{A})$$

siendo ϕ el potencial electroestático y **A** el potencial magnético. En las expresiones anteriores los índices se suben y bajan con el tensor métrico.

Las ecuaciones de campo electromagnético en presencia de gravitación son

$$D_k F^{ik} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^i ; \quad D_p F_{ik} + D_k F_{pi} + D_i F_{kp} = 0,$$

j^k es la tetradensidad de corriente definida por

$$j^k = \frac{1}{c} \rho^{(\mathrm{e})} u^k$$

$\rho^{(\mathrm{e})}$ es la densidad de carga de un elemento de volumen medido en el sistema propio.

Podemos determinar la ecuación de movimiento de una carga eléctrica en un campo electromagnético por la ley de conservación de la energía y el momento, expresada por

$$D_k T_i^{\ k} = D_k T_i^{(\mathrm{m})k} + D_k T_i^{(\mathrm{e})k} = 0, \tag{17}$$

los índices los hemos puesto mixtos para facilitar el cálculo posterior, esta operación la podemos realizar puesto que la derivada covriante del tensor métrico (que sube y bajo los índices) es nula.

El primer sumando de (17) es

$$D_k T_i^{(\mathrm{m})k} = D_k \left[\rho^{(\mathrm{m})} u^k u_i \right] = D_k \left[\rho^{(\mathrm{m})} u^k \right] u_i + \rho^{(\mathrm{m})} u^k D_k u_i$$

la ecuación de continuidad en presencia de gravedad es

$$D_k \left[\rho^{(\mathrm{m})} u^k \right] = 0$$

y como

$$u^k D_k u_i = \frac{dx^k}{d\tau} \frac{Du_i}{dx^k} = \frac{Du_i}{d\tau} = a_i$$

siendo a_i la aceleracion del elemento de volumen considerado, entonces nos queda

$$D_k T_i^{(\mathrm{m})k} = \rho^{(\mathrm{m})} a_i$$

lo que podemos entender como la fuerza por unidad de volumen.

El segundo sumando de (17) es

$$D_k T_i^{(\mathrm{m})k} = D_k \left(-\varepsilon_0 F^{kq} F_{iq} + \frac{\varepsilon_0}{4} \delta_i^k F^{pq} F_{pq} \right) = -\varepsilon_0 F_{iq} D_k F^{kq} - \varepsilon_0 F^{kq} D_k F_{iq} + \frac{\varepsilon_0}{2} F^{pq} D_i F_{pq}$$

ahora se aplica la segunda ecuación de campo electromagnético

$$\frac{\varepsilon_0}{2} F^{pq} D_i F_{pq} = \frac{\varepsilon_0}{2} F^{pq} \left(-D_q F_{ip} - D_p F_{qi} \right) = -\frac{\varepsilon_0}{2} F^{pq} D_q F_{ip} - \frac{\varepsilon_0}{2} F^{pq} D_p F_{qi} = -\varepsilon_0 F^{pq} D_q F_{ip}$$

por lo tanto

$$D_k T_i^{(\mathrm{m})k} = -\varepsilon_0 F_{iq} D_k F^{kq} = -j^q F_{iq}$$

donde hemos aplicado la primera ecuación de campo electromagnético. Con todo lo anterior la ley de conservación (17) queda

$$\rho^{(\mathrm{m})} a_i = j^q F_{iq}$$

que no es más que la generalización de la fuerza de Lorentz en presencia de campo gravitatorio.

D.- EL MÉTODO DE EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN

1-D. Resumen del método de Einstein-Infeld-Hoffmann

Como hemos dicho Einstein, Infeld y Hoffmann tuvieron éxito en deducir la ecuación de movimiento de una partícula a partir de las ecuaciones de la Relatividad General [7]. El método parte de las ecuaciones de campo para el caso exterior, es decir

$$R_{ik} = 0$$

y considera que las partículas son singularidades (no necesariamente puntuales), o sea regiones donde no es de aplicación las ecuaciones de campo.

Para aplicar este método es necesario el uso de adaptaciones de los teoremas integrales de Stokes y Gauss. Según el primero de ellos si la superficie de integración Σ es cerrada, entonces se cumple

$$\oiint_\Sigma \nabla \wedge \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Según el teorema de Gauss si $\mathbf{A}$ es un vector de divergencia nula, entonces

$$\oiint_\Sigma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

no depende de la superficie de integración.

Si la función $F_{\alpha\beta}$ es antisimétrica en sus dos índices, entonces por los teoremas anteriores se cumple

$$\oiint_\Sigma F_{\alpha\beta,\beta} dS_\alpha = 0$$

y además es independiente de la superficie de integración.

El método de Einstein-Infeld-Hoffmann exige previamente readaptar la ecuación de campo que se descompone

$$2\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{rs} R_{rs} \right) = \Phi_{\alpha\beta} + 2\Lambda_{\alpha\beta} = 0$$

donde $\Phi_{\alpha\beta}$ tiene la propiedad de que su integral de superficie es idénticamente nula por los teoremas anteriores, entonces deberá cumplirse

$$\oiint_\Sigma \Lambda_{\alpha\beta} dS_\beta = 0 \tag{18}$$

integral que también es independiente de la superficie de integración. Esta integral no es idénticamente nula, es decir, de ella se obtienen unas ecuaciones que son las correspondientes al movimiento de una partícula material en el campo de otras particulas. La anterior integral es por tanto un condición de integrabilidad.

Posteriorente es necesario resolver la ecuación de campo gravitatorio por aproximaciones sucesivas, tomándose los primeros valores no nulos del tensor métrico, con los que se calcula la función $\Lambda_{\alpha\beta}$ a cuarto orden con respecto a la inversa de c. Ya entonces sólo queda calcular la integral (18), obteniendo como resultado la ecuación de movimiento.

E.- ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN PRESENCIA DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO OBTENIDA POR EL MÉTODO DE EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN

1-E. La ecuación de movimiento en presencia de campo electromagnético obtenida por el método de Einstein-Infeld-Hoffmann

Es posible establecer una unificación fenomenológica entre gravitación y electromagnetismo, lo que se ha dado en llamar teoría de Einstein-Maxwell. Consiste en completar las ecuaciones de la gravitación con el tensor energía-momento del campo electromagnético T_{ik}, obteniéndose las ecuaciones

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\chi T_{ik} \tag{19}$$

la constante χ es

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

T_{ik} representa el tensor de campo electromagnético, que suponemos está constituido por el campo producido por dos cargas eléctricas q_1 y q_2 y por un campo exterior uniforme de intensidades E_α^{ext} y B_α^{ext}. Vamos a suponer que las masas m_1 y m_2 asociado a las anteriores cargas son singularidades del campo y por tanto no aparecen en el tensor T_{ik}. Si suponemos campos débiles podemos despreciar las interacción gravitación-electromagnetismo.

Las componentes α, β del tensor de campo electromagnético es

$$T_{\alpha\beta} = -\varepsilon_0 \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} E^2 \right) - c^2 \varepsilon_0 \left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} B^2 \right),$$

donde los índices se suben y bajan con el tensor η_{ik} y además utilizamos coordenadas pseudo cartesianas. Como el campo magnético es de segundo orden, el campo eléctrico de orden cero y la constante χ es de cuarto orden, entonces el único término que hay que considerar, para el cálculo en primera aproximación, es la parte eléctrica del tensor de energía-momento, es decir

$$T_{\alpha\beta} = -\varepsilon_0 \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} E^2 \right)$$

que en el caso considerado de dos partículas cargadas y un campo externo es

$$T_{\alpha\beta} = -\varepsilon_0 \left[\left(-\phi_{,\alpha} - \phi'_{,\alpha} + E_\alpha^{ext} \right)\left(-\phi_{,\beta} - \phi'_{,\beta} + E_\beta^{ext} \right) - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \left(-\phi_{,\gamma} - \phi'_{,\gamma} + E_\gamma^{ext} \right)\left(-\phi_{,\gamma} - \phi'_{,\gamma} + E_\gamma^{ext} \right) \right]$$

donde ϕ es el potencial electroestático de la partícula 1 y ϕ' el potencial de la partícula 2. Para hacer la integración vamos a suponer que en el instante considerado la partícula 1 de coordenadas η^α se encuentra en el origen de coordenadas y la partícula 2 de coordenadas ξ^α se encuentra en un punto del eje z, tal como muestra la ilustración 1 (página 30). Con esta suposición el tensor energía-momento queda

$$T_{\alpha\beta} = -\varepsilon_0 \left[\begin{array}{l} \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\alpha}{r^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\alpha - \xi^\alpha}{r'^3} + E_\alpha^{et} \right)\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\beta}{r^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\beta - \xi^\beta}{r'^3} + E_\beta^{et} \right) - \\ -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\gamma}{r^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\gamma - \xi^\gamma}{r'^3} + E_\gamma^{et} \right)\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\gamma}{r^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^\gamma - \xi^\gamma}{r'^3} + E_\gamma^{et} \right) \end{array} \right].$$

Como la traza del tensor energía-momento del campo electromagnético es nulo, las ecuaciones de la Relatividad General quedan

$$R_{\alpha\beta} + \chi T_{\alpha\beta} = 0$$

o bien

$$\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{pq} R_{pq} \right) + \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{pq} T_{pq} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{\alpha\beta} + \chi S_{\alpha\beta} = 0. \tag{20}$$

Siguiendo el razonamiento del trabajo de Einstein-Infeld-Hoffmanna se hace la descomposición

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Phi_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta},$$

donde $\Phi_{\alpha\beta}$ es una función cuya integral de superficie es idénticamente nula. Además se comprueba que

$$\Lambda_{\alpha\beta,\beta} = 0$$

lo que significa que su integral de superficie no depende del límite de integración elegido, por tanto de (20) tendremos que la integral

$$\oiint_{\Sigma} \left(\Lambda_{\alpha\beta} + \chi S_{\alpha\beta} \right) dS_{\beta} = 0, \tag{21}$$

tampoco depende del límite de integración, nos encontramos por tanto con la condición de integrabilidad de la que se puede deducir la ecuación de movimiento.

Aceptamos como hipótesis que las fuentes electromagnéticas incluidas en el tensor de energía-momento no afectan, en una primera aproximación, al campo gravitatorio y que en la misma aproximación no existe interacción entre la gravedad y el electromagnetismo, lo que significa que despreciamos el producto de magnitudes eléctromagnéticas por magnitudes gravitatorias, es decir que si

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$$

donde h_{ik}, que representa el campo gravitatorio, no tiene que ser pequeño, entonces como la traza del tensor energía-momento es nulo se cumple

$$g^{ik}T_{ik} = \eta^{ik}T_{ik} + h^{ik}T_{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^{ik}T_{ik} = 0$$

donde despreciamos el producto $h^{ik}T_{ik}$ pues refleja la interacción gravitación-electromagnetismo; por tanto (21) se reduce a

$$\oiint_{\Sigma} \left(\Lambda_{\alpha\beta} + \chi T_{\alpha\beta} \right) dS_{\beta} = 0, \tag{22}$$

la integral de $\Lambda_{\alpha\beta}$ es la misma que la encontrada en Relatividad General sin fuentes, que según la investigación de Einstein-Infeld-Hofmann es

$$\oiint_{\Sigma_1} \overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}\, dS_{\beta} = \frac{8\pi}{c^4} G m_1 \ddot{\eta}_z + \frac{8\pi}{c^4} G m_1 \tilde{\psi}_{2,z}$$

donde $\tilde{\psi}_2$ es el potencial gravitatorio de la partícula 2 calculada en el punto donde se encuentra la partícula 1.En cuanto a la segunda integral de (22) tenemos después de simplificar

$$\oiint_{\Sigma_1} T_{\alpha\beta} dS_{\beta} = \oiint_{\Sigma_1} T_{\alpha\beta} \frac{x^{\beta}}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \oiint_{\Sigma_1} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x^{\beta}}{r^3} \frac{\xi^{\alpha}}{r'^3} - \frac{1}{4\pi} q_1 \frac{x^{\beta}}{r^3} E_{\alpha}^{ext} \right) \frac{x^{\beta}}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \frac{\xi^{\alpha}}{d} - q_1 E_{\alpha}^{ext},$$

entonces de (22)

$$\frac{8\pi}{c^4} G m_1 \ddot{\eta}_z + \frac{8\pi}{c^4} G m_1 \tilde{\psi}_{2,z} + \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \frac{\xi^{\alpha}}{d} - q_1 E_{\alpha}^{ext} \right) = 0$$

y en notación vectorial

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{\eta}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + q_1 \mathbf{E}^{ext}$$

donde notamos que $\mathbf{r}$ es ahora el vector que va de la partícula 2 a la partícula 1; la anterior expresión es la ecuación de movimiento en primera aproximación que incluye tanto la ley de Newton como la de Coulomb [8], [9], [10].

F.- APLICACIÓN DEL MÉTODO DE EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN A LA VERSIÓN FUERTE DE LA TEORÍA DE CAMPO UNIFICADO ASIMÉTRICO DE EINSTEIN

1-F. El tensor $M_{ik}^{\ \ r}$

En esta sección vamos a aplicar el método de Eisntein-Infeld-Hoffmann a la teoría de campo unificado asimétrico de Einstein en su versión fuerte, siguiendo las técnicas desarrolladas por Infeld [11], [12].

El tensor métrico g_{ik} se descompone en partes simétrica y antisimétrica

$$g_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad \rightarrow \quad a_{ik} = a_{ki}\,; \quad b_{ik} = -b_{ki}\,.$$

A partir de a_{ik} se calculan los símbolos de Christoffel en la forma habitual

$$L_{ik}^{\ \ r} = \frac{1}{2} a^{rs} \left(a_{is,k} + a_{ks,i} - a_{ik,s} \right),$$

donde a^{ik} es definida por

$$a^{ik} a_{kr} = \delta_r^i$$

y por tanto no son las componentes simétricas del tensor g^{ik}. Los símbolos de Christoffel $L_{ik}^{\ \ r}$ son simétricos.

La conexión afín se descompone según

$$\Gamma_{ik}^{\ \ r} = L_{ik}^{\ \ r} + M_{ik}^{\ \ r}$$

donde $M_{ik}^{\ \ r}$ es un tensor al ser la diferencia entre dos conexiones.

De las ecuaciones de campo unificado de Einstein sabemos que se cumple

$$D_r g_{\underset{+-}{ik}} = \partial_r g_{ik} - g_{sk} \Gamma_{ir}^{\ \ s} - g_{is} \Gamma_{rk}^{\ \ s} = 0$$

o descomponiendo el tensor métrico en partes simétrica y antisimétrica

$$\partial_r \left(a_{ik} + b_{ik} \right) - \left(a_{sk} + b_{sk} \right) \left(L_{ir}^{\ \ s} + M_{ir}^{\ \ s} \right) - \left(a_{is} + b_{is} \right) \left(L_{rk}^{\ \ s} + M_{rk}^{\ \ s} \right) = 0 \tag{23}$$

por definición de los símbolos de Christoffel se tiene

$$\partial_r a_{ik} - a_{sk} L_{ir}^{\ \ s} - a_{is} L_{rk}^{\ \ s} = 0$$

por tanto (23) queda

$$\partial_r b_{ik} - b_{sk} L_{ir}^{\ \ s} - b_{is} L_{rk}^{\ \ s} - a_{sk} M_{ir}^{\ \ s} - a_{is} M_{rk}^{\ \ s} - b_{sk} M_{ir}^{\ \ s} - b_{is} M_{rk}^{\ \ s} = 0,$$

o bien

$$D_r^* b_{ik} - a_{sk} M_{ir}^{\ \ s} - a_{is} M_{rk}^{\ \ s} - b_{sk} M_{ir}^{\ \ s} - b_{is} M_{rk}^{\ \ s} = 0 \tag{24}$$

donde hemos definido

$$D_r^* b_{ik} = \partial_r b_{ik} - b_{sk} L_{ir}^{\ \ s} - b_{is} L_{rk}^{\ \ s}$$

que es la derivada covariante en función de los símbolos de Christoffel.

Al rotar los tres índices de (24) obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
D_r^* b_{ik} - a_{sk} M_{ir}^{\ \ s} - a_{is} M_{rk}^{\ \ s} - b_{sk} M_{ir}^{\ \ s} - b_{is} M_{rk}^{\ \ s} &= 0 \\
D_k^* b_{ri} - a_{si} M_{rk}^{\ \ s} - a_{rs} M_{ki}^{\ \ s} - b_{si} M_{rk}^{\ \ s} - b_{rs} M_{ki}^{\ \ s} &= 0 \\
D_i^* b_{kr} - a_{sr} M_{ki}^{\ \ s} - a_{ks} M_{ir}^{\ \ s} - b_{sr} M_{ki}^{\ \ s} - b_{ks} M_{ir}^{\ \ s} &= 0,
\end{aligned}$$

sumando las dos primeras y restando la tercera

$$D_r^* b_{ik} + D_k^* b_{ri} - D_i^* b_{kr} - 2 a_{is} M_{rk}^{\ \ s} - 2 b_{rs} M_{ki}^{\ \ s} - 2 b_{sk} M_{ir}^{\ \ s} = 0$$

sumando y restando $2 D_i^* b_{kr}$ queda

$$-I_{rki} - a_{is} M_{rk}^{\ \ s} - b_{rs} M_{ki}^{\ \ s} - b_{sk} M_{ir}^{\ \ s} - D_i^* b_{kr} = 0 \tag{25}$$

donde hemos definido

$$I_{rki} = \frac{1}{2} \left(D_r^* b_{ki} + D_k^* b_{ir} + D_i^* b_{rk} \right),$$

al desarrollar las derivadas covariantes se encuentra que

$$I_{rki} = \frac{1}{2} \left(b_{ki,r} + b_{ir,k} + b_{rk,i} \right).$$

El signo de I_{ikr} cambia si hay una permutación impar de sus índices y queda inalterable si la permutación es par. Para que I_{ikr} sea distinto de cero es necesario que todos los subíndices sean diferentes entre sí.

Despejando $M_{rk}^{\ \ p}$ de (25) resulta

$$M_{rk}^{\ \ p} = a^{ip} \left(D_i^* b_{rk} - I_{rki} - b_{rs} M_{ki}^{\ \ s} - b_{sk} M_{ir}^{\ \ s} \right), \tag{26}$$

que es la relación que íbamos buscando y que nos va a permitir calcular el desarrollo de $M_{rk}^{\ \ p}$ poniéndolo en función de los desarrollos de b_{ik}, I_{ikr} y a^{ik}.

2-F. Desarrollo en serie de potencia de $M_{ik}{}^{r}$

Vamos a utilizar la relación (26) para obtener los primeros términos del desarrollo de $M_{ik}{}^{r}$ en serie de potencias de la inversa de *c*.

Las componentes del tensor métrico cabe desarrollarlas en series de potencias de la inversa de *c*

$$\begin{aligned}
a_{00} &= 1 + \overset{(2)}{a}_{00} + \overset{(4)}{a}_{00} + \ldots \\
a_{0\alpha} &= \overset{(3)}{a}_{0\alpha} + \overset{(5)}{a}_{0\alpha} + \ldots \\
a_{\alpha\beta} &= -\delta_{\alpha\beta} + \overset{(2)}{a}_{\alpha\beta} + \overset{(4)}{a}_{\alpha\beta} + \ldots \\
b_{0\alpha} &= \overset{(3)}{b}_{0\alpha} + \overset{(5)}{b}_{0\alpha} + \ldots \\
b_{\alpha\beta} &= \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta} + \overset{(4)}{b}_{\alpha\beta} + \ldots
\end{aligned}$$

donde el número entre paréntesis se refiere al coeficiente al que está elevada la inversa de *c* que aparece en el correspondiente término. Como veremos más adelante la parte simétrica del tensor métrico a_{ik} representa al campo gravitatorio, mientras que la parte antisimétrica b_{ik} corresponde al campo electromagnético.

Al aplicar (26) para las componentes $M_{ik}{}^{r}$

$$M_{00}{}^{0} = a^{i0}\left(D_i^* b_{00} - I_{00i} - b_{0s} M_{0i}{}^{s} - b_{s0} M_{i0}{}^{s}\right),$$

a^{i0} es al menos de orden 2; b_{00} es nulo por la propiedad antisimétrica, I_{00i} es nulo por tener dos índices iguales y b_{0s} es al menos de orden 3, por tanto tenemos

$$\overset{(2)}{M}_{00}{}^{0} = 0. \tag{27}$$

De igual manera se calcula

$$\overset{(2)}{M}_{00}{}^{\alpha} = 0\,;\quad \overset{(2)}{M}_{\alpha 0}{}^{0} = 0\,;\quad \overset{(2)}{M}_{0\alpha}{}^{0} = 0\,;\quad \overset{(2)}{M}_{0\beta}{}^{\alpha} = 0\,;\quad \overset{(2)}{M}_{\beta 0}{}^{\alpha} = 0\,;\quad \overset{(2)}{M}_{\alpha\beta}{}^{0} = 0. \tag{28}$$

Mientras que

$$\overset{(2)}{M}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -D_\gamma^* \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta} + \overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma} = -\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma} + \overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{29}$$

en cuyo cálculo hemos tenido en cuenta que

$$\overset{(0)}{a}{}^{\gamma\gamma} = -1$$

y que los símbolos de Christoffel son de segundo orden y por tanto la derivada covariante se identifica con la derivada parcial en esta aproximación.

Para los términos de tercer orden tenemos

$$\begin{gathered}
\overset{(3)}{M}_{00}{}^{0} = 0\,;\quad \overset{(3)}{M}_{00}{}^{\alpha} = 0\,;\quad \overset{(3)}{M}_{0\beta}{}^{\alpha} = -\overset{(3)}{b}_{0\beta,\alpha} + \overset{(3)}{I}_{0\beta\alpha}\,;\quad \overset{(3)}{M}_{\beta 0}{}^{\alpha} = -\overset{(3)}{b}_{\beta 0,\alpha} + \overset{(3)}{I}_{\beta 0\alpha} \\
\overset{(3)}{M}_{\alpha\beta}{}^{0} = \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,0} - \overset{(3)}{I}_{\alpha\beta 0}\,;\quad \overset{(3)}{M}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0\,;\quad \overset{(3)}{M}_{\alpha 0}{}^{0} = 0\,;\quad \overset{(3)}{M}_{0\alpha}{}^{0} = 0\,.
\end{gathered}$$

Finalmente los términos de cuarto orden en el desarrollo son

$$\overset{(4)}{M}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \overset{(0)}{a}{}^{\gamma\gamma}\left(\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma} - \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\beta\gamma} - \overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\alpha\gamma} - \overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{M}_{\beta\gamma}{}^{\delta} - \overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{M}_{\gamma\alpha}{}^{\delta}\right) + \overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon} - \overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\varepsilon}\right), \tag{30}$$

donde no hemos tenido en cuenta los términos del tipo $b_{0\alpha}$ ya que generan términos mayores de cuatro. Utilizando (29), la expresión (30) nos queda

$$\begin{aligned}
\overset{(4)}{M}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = {}& -\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\beta\gamma} + \overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\alpha\gamma} + \overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\beta\gamma\delta}\right) + \\
& + \overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta}\right) + \overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon} - \overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\varepsilon}\right),
\end{aligned} \tag{31}$$

que se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$\overset{(4)}{M}{}_{(\alpha\beta)}^{\gamma}=\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}+\overset{(2)}{I}_{\beta\gamma\delta}\right)+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}+\overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta}\right)$$
$$\overset{(4)}{M}{}_{[\alpha\beta]}^{\gamma}=-\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}{}_{\beta\gamma}^{\delta}+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{L}{}_{\alpha\gamma}^{\delta}+\overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma}+\overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon}-\overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\varepsilon}\right). \qquad (32)$$

Las restantes componentes de orden cuatro son

$$\overset{(4)}{M}{}_{00}^{0}=0\,;\quad \overset{(4)}{M}{}_{00}^{\alpha}=0\,;\quad \overset{(4)}{M}{}_{0\alpha}^{0}=b_{0\alpha,0}\,;\quad \overset{(4)}{M}{}_{\alpha0}^{0}=b_{\alpha0,0}\,;\quad \overset{(4)}{M}{}_{\alpha\beta}^{0}=0\,;\quad \overset{(4)}{M}{}_{0\beta}^{\alpha}=0\,. \qquad (33)$$

Con los términos calculados del desarrollo en serie de potencias de M_{ik}^{r} estamos en condiciones de calcular la conexión afín y con ella el tensor de Ricci, que es lo haremos más adelante.

3-F. Interpretación de b_{ik} como las componentes del campo electromagnético

En la aproximación cuasiestática que estamos considerando el campo eléctrico de una partícula puntual viene dado por

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}=-\nabla\phi$$

donde q es la carga eléctrica, ϕ es su potencial electroestático y ε_0 es la constante dieléctrica del vacío; mientras que el campo magnético producido por dicha carga que lleva una velocidad **u** es

$$\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\mathbf{u}\wedge\mathbf{E} \qquad (34)$$

donde estamos considerando no sólo pequeña la velocidad de la carga respecto a c, sino también pequeña su aceleración.

Si definimos

$$\varphi=\frac{k}{c^2}\phi$$

donde k es una constante indefinida; φ es de segundo orden respecto a la inversa de c, no obstante, no explicitaremos en lo sucesivo este orden; con esta definición las componentes α,β de b_{ik} a segundo orden son definidas por

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{,\gamma} \qquad (35)$$

encontramos que

$$\overset{(2)}{b}_{21}=\varepsilon_{213}\varphi_{,3}=\frac{k}{c^2}E_z\,;\quad \overset{(2)}{b}_{13}=\frac{k}{c^2}E_y\,;\quad \overset{(2)}{b}_{32}=\frac{k}{c^2}E_x\,,$$

o bien

$$\mathbf{E}=\frac{c^2}{k}\left(\overset{(2)}{b}_{32},\overset{(2)}{b}_{13},\overset{(2)}{b}_{21}\right).$$

Definimos la componete $0,\alpha$ de b_{ik} a tercer orden por

$$\overset{(3)}{b}_{0\alpha}=-\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{,\beta}\dot{\eta}^{\gamma}\,(36) \qquad (36)$$

que tiene la misma dimensión que $b_{\alpha\beta}$; η^{γ} es la coordenada espacial de la carga eléctrica y el punto significa derivación respecto al tiempo t. Entonces teniendo presente (36) encontramos la relación

$$\overset{(3)}{b}_{0\alpha}=\frac{k}{c}B_{\alpha}\,.$$

Notemos que el campo eléctrico es de orden 0 respecto a la inversa de c, sin embargo, el campo magnético es de segundo orden.

En resumen, hemos identificado el primer término del desarrollo de $b_{\alpha\beta}$ con el campo eléctrico y el primer término del desarrollo de $b_{0\alpha}$ con el campo magnético. Veremos a continuación que estas definiciones son compatibles con las ecuaciones de campo. Advertimos que estamos en el caso cuasiestático, que corresponde a velocidades y aceleraciones pequeñas. Notemos que $b_{\alpha\beta}$ y $b_{0\alpha}$ tienen la dimensión de L^{-2}, por tanto la constante k debe ser tal que b_{ik} tenga esa dimensión.

4-F. Solución de las ecuaciones de campo en primera aproximación

La teoría unificada de Einstein en su versión fuerte nos dice que el tensor de Ricci es nulo

$$R_{ik}=0 \quad \Rightarrow \quad R_{(ik)}=0\,; \quad R_{[ik]}=0.$$

Vamos a desarrollar la anterior ecuación al más bajo orden y obtener las ecuaciones de campo, que como veremos se dividen en dos grupos, uno correspondiente a las ecuaciones de la gravitación y el otro a las ecuaciones de campo electromagnético.

El tensor de Ricci es definido por

$$R_{ik}=\frac{\partial \Gamma_{ir}{}^{r}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial \Gamma_{ik}{}^{r}}{\partial x^{r}}+\Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}-\Gamma_{ik}{}^{t}\Gamma_{tr}{}^{r} \tag{37}$$

donde la conexión afín es

$$\Gamma_{ik}{}^{r}=L_{ik}{}^{r}+M_{ik}{}^{r},$$

$L_{ik}{}^{r}$ son los símbolos de Christoffel calculados a partir de la parte simétrica del tensor métrico.

El orden más pequeño de la componente 0,0 del tensor de Ricci es el segundo

$$\overset{(2)}{R}_{00}=\frac{\partial \overset{(2)}{\Gamma}_{0r}{}^{r}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial \overset{(2)}{\Gamma}_{00}{}^{r}}{\partial x^{r}}=\frac{\partial \overset{(2)}{L}_{0r}{}^{r}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial \overset{(2)}{L}_{00}{}^{r}}{\partial x^{r}}+\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{0r}{}^{r}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{00}{}^{r}}{\partial x^{r}}=\overset{(2)}{P}_{00}+\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{0\gamma}{}^{\gamma}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{00}{}^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}=\overset{(2)}{P}_{00} \tag{38}$$

no hemos tenido en cuenta los términos cruzados de la conexión afín [tercer y cuarto sumando de (37)] por ser de orden superior al segundo; P_{ik} representa el tensor de Ricci calculado a partir de los símbolos de Christoffel y hemos tenido en cuenta para hallar (38) las relaciones (27), (28) y (29).

También la componente α,β más baja del tensor de Ricci es de segundo orden

$$\begin{aligned}\overset{(2)}{R}_{\alpha\beta}&=\frac{\partial \overset{(2)}{\Gamma}_{\alpha r}{}^{r}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial \overset{(2)}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{r}}{\partial x^{r}}=\frac{\partial \overset{(2)}{L}_{\alpha r}{}^{r}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial \overset{(2)}{L}_{\alpha\beta}{}^{r}}{\partial x^{r}}+\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{\alpha r}{}^{r}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{\alpha\beta}{}^{r}}{\partial x^{r}}=\\&=\overset{(2)}{P}_{\alpha\beta}+\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{\alpha 0}{}^{0}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{\alpha\gamma}{}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial \overset{(2)}{M}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}=\overset{(2)}{P}_{\alpha\beta}-\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\gamma\beta}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}-\overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}\,,\end{aligned} \tag{39}$$

donde hemos tenido en cuenta que la función I_{ikr} es nula si hay dos índices iguales. Finalmente el desarrollo más bajo de las componentes $0,\alpha$ del tensor de Ricci es el tercero

$$\overset{(3)}{R}_{0\alpha}=\overset{(3)}{P}_{0\alpha}-\overset{(3)}{b}_{0\beta,\beta\alpha}+\overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta}-\overset{(3)}{I}_{0\alpha\beta,\beta}\,, \tag{40}$$

las ecuaciones (38), (39) y (40) se pueden descomponer en partes simétrica y antisimétrica, entonces las ecuaciones de campo se descomponen en dos grupos

$$\begin{aligned}R_{(ik)}=0 \quad &\Rightarrow \quad \overset{(2)}{R}_{(00)}=\overset{(2)}{P}_{00}=0\,; \quad \overset{(3)}{R}_{(0\alpha)}=\overset{(3)}{P}_{0\alpha}=0\,; \quad \overset{(2)}{R}_{(\alpha\beta)}=\overset{(2)}{P}_{\alpha\beta}=0\\R_{[ik]}=0 \quad &\Rightarrow \quad -\overset{(3)}{b}_{0\beta,\beta\alpha}+\overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta}-\overset{(3)}{I}_{0\alpha\beta,\beta}=0\,; \quad -\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\gamma\beta}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}-\overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}=0\end{aligned} \tag{41}$$

el primer grupo son las ecuaciones de campo gravitatorio de la Relatividad General, mientras que el segundo grupo son las ecuaciones de campo electromagnético, ambos conjuntos están evaluados al más bajo orden.

Otra de las ecuaciones de la teoría de campo unificado de Einstein es la anulación del vector de torsión

$$\tau_{i}=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ir}{}^{r}-\Gamma_{ri}{}^{r}\right)=0,$$

en la aproximación de menor orden

$$\overset{(2)}{\tau}_{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\overset{(2)}{M}_{\alpha r}{}^{r}-\overset{(2)}{M}_{r\alpha}{}^{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\overset{(2)}{M}_{\alpha\beta}{}^{\beta}-\overset{(2)}{M}_{\beta\alpha}{}^{\beta}\right)=\frac{1}{2}\left(-\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\beta}+\overset{(2)}{b}_{\beta\alpha,\beta}\right)=-\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\beta}$$

$$\overset{(3)}{\tau}_{0}=\frac{1}{2}\left(\overset{(3)}{M}_{0r}{}^{r}-\overset{(3)}{M}_{r0}{}^{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\overset{(3)}{M}_{0\alpha}{}^{\alpha}-\overset{(3)}{M}_{\alpha 0}{}^{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left(-\overset{(3)}{b}_{0\alpha,\alpha}+\overset{(3)}{b}_{\alpha 0,\alpha}\right)=-\overset{(3)}{b}_{0\alpha,\alpha}\,,$$

entonces por la anulación del vector de torsión queda

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\beta}=0\,;\quad \overset{(3)}{b}_{0\alpha,\alpha}=0 \tag{42}$$

que son dos de las ecuaciones de campo. Las restantes ecuaciones de campo electromagnético se derivan del segundo grupo de ecuaciones (41)

$$\begin{aligned}
&-\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\gamma\beta}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}-\overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}=0 \;\Rightarrow\; \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}=0 \;\Rightarrow\; \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}=0\\
&\overset{(3)}{b}_{0\beta,\beta\alpha}+\overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta}-\overset{(3)}{I}_{0\alpha\beta,\beta}=0 \;\Rightarrow\; \overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta}-\frac{1}{2}\overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta}=0 \;\Rightarrow\; \overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta}=0
\end{aligned} \tag{43}$$

en cuyo cálculo hemos usado las dos ecuaciones (42).

Es fácil comprobar que (35) y (36) son soluciones de las ecuaciones de campo (42) y (43). En efecto

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}=\varepsilon_{\alpha\beta\delta}\varphi_{,\delta\gamma\gamma}=0\,;\quad \overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta}=\frac{1}{c}\varepsilon_{0\alpha\delta\gamma}\varphi_{,\delta\gamma\gamma}\dot{\eta}^{\gamma}=0$$

ya que φ es por definición una función armónica, por tanto $\varphi_{,\gamma\gamma}=0$.

Al aplicar (35) y (36) a las otras dos ecuaciones de campo se encuentra

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{,\gamma\beta}=0\,;\quad \overset{(3)}{b}_{0\alpha,\alpha}=\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{,\beta\alpha}\dot{\eta}^{\gamma}=0$$

puesto que ambas ecuaciones son el producto de una expresión antisimétrica ($\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ o $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$) por una simétrica ($\varphi_{,\gamma\beta}$ o $\varphi_{,\beta\gamma}$). Queda comprobado que (35) y (36) son soluciones de las ecuaciones de campo electromagnético en primera aproximación.

Con las definiciones de campo eléctrico y magnético del epígrafe anterior, las ecuaciones de campo (42) y (43) puestas en notación vectorial son

$$\nabla\mathbf{E}=0;\quad \nabla\mathbf{B}=0;\quad \nabla^{2}\mathbf{E}=0;\quad \nabla^{2}\mathbf{B}=0. \tag{44}$$

Debemos indicar que hay una solución más general que satisfaga (43)

$$\varphi=\frac{a}{r}+br+er^{2}+f \tag{45}$$

como puede comprobarse por cálculo directo. Si establecemos que los campos eléctricos y magnéticos se anulan en el infinito, entonces el coeficiente e debe ser nulo; si además exigimos que ϕ sea finito en todo punto, b también debe ser cero.

5-F. Cálculo de las componentes del tensor de Ricci a cuarto orden

Para el cálculo de la ecuación de movimiento en primera aproximación es necesario calcular las componentes α,β del tensor de Ricci a cuarto orden

$$\overset{(4)}{R}_{\alpha\beta}=\overset{(4)}{\Gamma}{}^{r}_{\alpha r,\beta}-\overset{(4)}{\Gamma}{}^{r}_{\alpha\beta,r}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{t}_{\alpha r}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{r}_{t\beta}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{t}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{r}_{tr}\,,$$

teniendo presente las relaciones (27), (28), (29) y (31) se encuentra

$$\begin{aligned}
\overset{(4)}{R}_{\alpha\beta}&=\overset{(4)}{\Gamma}{}^{r}_{(\alpha r),\beta}-\overset{(4)}{\Gamma}{}^{r}_{\alpha\beta,r}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{t}_{\alpha r}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{r}_{t\beta}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{t}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{r}_{(tr)}=\\
&=\overset{(4)}{P}_{\alpha\beta}+\overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{(\alpha\gamma),\beta}-\overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{\alpha\beta,\gamma}+\overset{(2)}{L}{}^{\gamma}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{M}{}^{\delta}_{\gamma\beta}+\overset{(2)}{M}{}^{\gamma}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\gamma\beta}+\overset{(2)}{M}{}^{\gamma}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{M}{}^{\delta}_{\delta\beta}-\overset{(2)}{M}{}^{t}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{L}{}^{r}_{(tr)}
\end{aligned} \tag{46}$$

donde $P_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci en función de los símbolos de Christoffel. Su parte simétrica es

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}=\overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)}+\overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{(\alpha\gamma),\beta}-\overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{(\alpha\beta),\gamma}+\overset{(2)}{M}{}^{\gamma}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{M}{}^{\delta}_{\gamma\beta}\,, \tag{47}$$

donde hay que tener en cuenta que los dos factores del último sumando de (47) son antisimétricos y por tanto el producto es simétrico, también tenemos en consideración que el último sumando de (45) es antisimétrico en α, β y por tanto no aparece en (47), por último el segundo sumando de (47) es simétrico respecto a α,β como se demostró en (45). Encontramos a partir de la definición del tensor de Ricci y de las ecuaciones (27), (28) y (29)

$$\overset{(4)}{R}_{00}=\overset{(4)}{P}_{00}\,. \tag{48}$$

(47) se pone en función de b_{ik} usando las relaciones (27), (28) y (29), para ello hay que tener en cuenta que $I_{\alpha\beta\gamma}$ es distinta de cero solamente en el caso de que todos los índices sean diferentes, esto significa que la única componente que podría ser distinta de cero es I_{123} y sus permutaciones. Entonces tenemos

$$\overset{(2)}{I}_{123}=\frac{1}{2}\left(\overset{(2)}{b}_{12,3}+\overset{(2)}{b}_{23,1}+\overset{(2)}{b}_{31,2}\right)=-\frac{k}{2c^{2}}\left(\phi_{,33}+\phi_{,11}+\phi_{,22}\right)=-\frac{k}{2c^{2}}\nabla^{2}\phi=0$$

donde hemos utilizado (35), entonces (47) queda

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}-\overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)}=-\left(\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}\right)_{,\beta}+\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}\right)_{,\gamma}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta,\delta}. \tag{49}$$

Por la identidad

$$\varepsilon_{\delta\gamma\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}=-\delta_{\delta\alpha}\delta_{\varepsilon\mu}+\delta_{\delta\mu}\delta_{\varepsilon\alpha} \tag{50}$$

se encuentra

$$\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}=\varepsilon_{\delta\gamma\varepsilon}\varphi_{,\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\varphi_{,\mu\delta}=-\varphi_{,\gamma}\varphi_{,\gamma\alpha}$$

simplificando (49) queda

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}-\overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)}=\varphi_{,\gamma\beta}\varphi_{,\gamma\alpha}+\varphi_{,\gamma}\varphi_{,\gamma\alpha\beta}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}, \tag{51}$$

de donde obtenemos

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\alpha)}-\overset{(4)}{P}_{(\alpha\alpha)}=\varphi_{,\gamma\alpha}\varphi_{,\gamma\alpha}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\delta}, \tag{52}$$

entendemos que hay suma respecto a α; por la identidad (50)

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\delta}=\varepsilon_{\alpha\delta\mu}\varphi_{,\mu\gamma}\varepsilon_{\alpha\gamma\varepsilon}\varphi_{,\varepsilon\delta}=\left(\delta_{\delta\gamma}\delta_{\mu\varepsilon}-\delta_{\delta\varepsilon}\delta_{\mu\gamma}\right)\varphi_{,\mu\gamma}\varphi_{,\varepsilon\delta}=\varphi_{,\mu\gamma}\varphi_{,\mu\delta}-\varphi_{,\gamma\gamma}\varphi_{,\delta\delta}=\varphi_{,\mu\gamma}\varphi_{,\mu\delta}$$

hemos tomado $\varphi_{,\gamma\gamma}=0$ ya que φ es una función armónica; entonces (52) queda

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\alpha)}-\overset{(4)}{P}_{(\alpha\alpha)}=2\varphi_{,\gamma\alpha}\varphi_{,\gamma\alpha}. \tag{53}$$

6-F. Condición de integrabilidad

Definimos el tensor

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\beta}&=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}R_{rs}=R_{[\alpha\beta]}+R_{(\alpha\beta)}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}R_{(rs)}=\\&=R_{[\alpha\beta]}+\left[P_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}P_{rs}\right]+\left\{\left[R_{(\alpha\beta)}-P_{\alpha\beta}\right]-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}\left[R_{(rs)}-P_{rs}\right]\right\}=R_{[\alpha\beta]}+\Omega'_{(\alpha\beta)}+\Omega''_{(\alpha\beta)}=0,\end{aligned} \tag{54}$$

que es nulo por las ecuaciones de campo unificado de Einstein. La anterior expresión la podemos descomponer en parte simétrica y antisimétrica, siendo las dos nulas. La parte simétrica está formada por los dos últimos sumandos de (54).

Debemos de notar que (47) es el más pequeño orden en que se puede calcular el tensor de Ricci en donde se contemplen términos no exclusivamente gravitatorios. Por esta razón el orden en que tenemos que evaluar la anterior expresión es el cuarto y la integral que tenemos que calcular para hallar la ecuación de movimiento es

$$\oiint\left[\overset{(4)}{\Omega'}_{(\alpha\beta)}+\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}\right]dS_{\beta}=0 \tag{55}$$

de la primera integral se deriva la ecuación de movimiento en gravitación, la segunda integral es la que podría contener el efecto del electromagnetismo sobre la partícula cargada en primera aproximación, por eso la analizamos a continuación.

La integral

$$\oiint_{\Sigma}\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}dS_{\beta}$$

en general se descompone en una parte que es idénticamente nula y por tanto no contiene información alguna y otra parte que es la condición de integrabilidad, de donde sería posible deducir la ley de Coulomb.

De (51) y (52) obtenemos

$$\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)} = \overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)} - \overset{(4)}{P}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}\left[\overset{(4)}{R}_{(rs)} - \overset{(4)}{P}_{rs}\right] = \varphi_{,\gamma\beta}\varphi_{,\gamma\alpha} + \varphi_{,\gamma}\varphi_{,\gamma\alpha\beta} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\,\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta} - \delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma\delta}\varphi_{,\gamma\delta} \qquad (56)$$

donde hemos tenido en cuenta (43), reagrupando

$$\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)} = \left[\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\,\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta} + \delta_{\gamma\alpha}\varphi_{,\delta}\varphi_{,\delta\beta} - \delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma\delta}\varphi_{,\delta}\right]_{,\gamma},$$

la parte interior del paréntesis es

$$\overset{(4)}{F}_{\alpha\beta\gamma} = \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\,\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta} + \delta_{\gamma\alpha}\varphi_{,\delta}\varphi_{,\delta\beta} - \delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma\delta}\varphi_{,\delta} \quad \Rightarrow \quad \overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)} = \overset{(4)}{F}_{\alpha\beta\gamma,\gamma},$$

donde

$$\overset{(4)}{F}_{\alpha\beta\gamma} = -\overset{(4)}{F}_{\alpha\gamma\beta}$$

además por la anterior propiedad de antisimetría también se cumple

$$\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta),\beta} = \overset{(4)}{F}_{\alpha\beta\gamma,\gamma\beta} = 0$$

por tanto se cumplen las condiciones para que la integral

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}\, dS_{\beta}$$

sea independiente de la superficie de integración y como $\overset{(4)}{F}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}$ tiene la estructura de un rotacional

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \overset{(4)}{F}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}\, dS_{\beta} = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}\, dS_{\beta}$$

es idénticamente nula por el teorema de Stokes, por tanto no contiene ninguna información complementaria a la ecuación de movimiento, es decir la ecuación (55) coincide con la encontrada en la Relatividad General que da el movimiento de una partícula en primera aproximación en un campo gravitatorio.

7-F. La parte antisimétrica del tensor de Ricci

Las ecuaciones de campo de la teoría unificada de Einstein no sólo nos dice que la parte simétrica del tensor de Ricci es nula, sino que también son cero sus componentes antisimétricas. Cabe entonces preguntarse si la integral de la parte antisimétrica de (54) no reproduce la ley de Coulomb, es decir la ecuación de movimiento en un campo electromagnético en primera aproximación. Por las ecuaciones de campo tenemos

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} R_{[\alpha\beta]}\, dS_{\beta} = 0. \qquad (57)$$

Como de (55) no aparece la ecuación de movimiento con la fuerza de Coulomb, tampoco podría surgir de (57), porque entonces tendríamos el absurdo que de (55) tendríamos una ecuación de movimiento donde sólo apareciera el efecto gravitatorio y de la (57) obtuviéramos otra ecuación de movimiento diferente donde existiría la fuerza eléctrica.

Las componentes α,β antisimétricas del tensor de Ricci se calculan a partir de (46)

$$\overset{(4)}{R}_{[\alpha\beta]} = -\overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{[\alpha\beta],\gamma} + \overset{(2)}{M}{}^{\delta}_{\gamma\beta}\,\overset{(2)}{L}{}^{\gamma}_{\alpha\delta} + \overset{(2)}{M}{}^{\gamma}_{\alpha\delta}\,\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\gamma\beta} - \overset{(2)}{M}{}^{t}_{[\alpha\beta]}\,\overset{(2)}{L}{}^{r}_{(tr)}, \qquad (58)$$

que hay que poner en función de las componentes simétricas y antisimétricas del tensor métrico. Se puede comprobar que en (58) no aparece la derivada temporal de las coordenadas de la partícula, por tanto no puede aprecer su derivada segunda, lo que es necesario para formular la ecuación de movimiento. Para comprobar este extremo desarrollemos la componente α,β de cuarto orden de la parte antisimétrica del tensor de Ricci

$$\begin{aligned}\overset{(2)}{R}_{[\alpha\beta]} = &-\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\,\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\beta\gamma} + \overset{(2)}{b}_{\delta\beta,\gamma}\,\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\alpha\gamma} + \overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma} + \overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}_{,\gamma}\,\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\,\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\beta\gamma,\gamma} + \overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\,\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\alpha\gamma,\gamma} + \overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}\,\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon\gamma} - \\ &-\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta,\delta}\,\overset{(2)}{L}{}^{\gamma}_{\alpha\delta} - \overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\,\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\gamma\beta} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\,\overset{(2)}{L}{}^{r}_{(tr)}\end{aligned} \qquad (59)$$

donde hemos considerado nulas las componentes segundas de $I_{\alpha\beta\gamma}$ a segundo orden. Simplificando (59)

$$\overset{(4)}{R}_{[\alpha\beta]}=-\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+\overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}+\overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}{}_{,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\beta\gamma,\gamma}+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\alpha\gamma,\gamma}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(2)}{L}{}^{r}_{(\gamma r)} \tag{60}$$

ahora desarrollamos los símbolos de Christoffel, para lo cual vamos a tener en cuenta

$$\overset{(2)}{a}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}h\,;\quad \overset{(2)}{a}{}^{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}h$$

donde h es proporcional al potencial gravitatorio y es de segundo orden; entonces nos queda

$$\overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}{}_{,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon}=\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(2)}{h}_{,\gamma}$$

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\beta\gamma,\gamma}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\left(\overset{(2)}{a}_{\beta\delta,\gamma\gamma}+\overset{(2)}{a}_{\gamma\delta,\beta\gamma}-\overset{(2)}{a}_{\beta\gamma,\delta\gamma}\right)=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{h}_{,\gamma\gamma}\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{h}_{,\beta\gamma}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{h}_{,\beta\gamma}=0$$

$$\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{L}{}^{\delta}_{\alpha\gamma,\gamma}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\left(\overset{(2)}{a}_{\alpha\delta,\gamma\gamma}+\overset{(2)}{a}_{\delta\gamma,\alpha\gamma}-\overset{(2)}{a}_{\alpha\gamma,\delta\gamma}\right)=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{h}_{,\gamma\gamma}+\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta}\overset{(2)}{h}_{,\alpha\gamma}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta}\overset{(2)}{h}_{,\gamma\alpha}=0$$

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(2)}{L}{}^{r}_{(\gamma r)}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\left(\overset{(2)}{a}_{\gamma r,r}+\overset{(2)}{a}_{rr,\gamma}-\overset{(2)}{a}_{\gamma r,r}\right)=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(2)}{a}_{rr,\gamma}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(2)}{a}_{00,\gamma}+\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}a_{\delta\delta,\gamma}=2\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(2)}{h}_{,\gamma}$$

por otra parte tenemos

$$-\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+\overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}=-\frac{1}{2}\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}$$

finalmente (60) queda

$$\overset{(2)}{R}_{[\alpha\beta]}=-\frac{1}{2}\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+3\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(2)}{h}_{,\gamma}=-\frac{1}{2}\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+3\varepsilon_{\alpha\beta\delta}\overset{(2)}{\varphi}_{,\delta}\overset{(2)}{h}_{,\gamma} \tag{61}$$

al igualarlo a cero por la ecuación de campo se pueden resolver las componentes α,β del campo eléctrico a cuarto orden, pero como ya advertirmos tampoco este término contiene las derivadas temporales de las coordenadas de la partícula, por tanto a partir de la parte antisimétrica del tensor de Ricci no se puede determinar ninguna ecuación de movimiento.

(61) puede ponerse como

$$F_{\alpha\beta\gamma,\gamma}=\left(-\frac{1}{2}\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}+3\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}h\right)_{,\gamma}$$

pero ahora $F_{\alpha\beta\gamma}$ no es antisimétrica en los índices β y γ y su divergencia no es nula, por lo que no se pueden aplicar los teoremas integrales que nos llevan a la determinación de la ecuación de movimiento.

G.- LA GEODÉSICA EN LA TEORÍA DE CAMPO UNIFICADO ASIMÉTRICO DE EINSTEIN

1.G. La geodésica en la teoría de campo unificado asimétrico

Podría pensarse que se puede extender el resultado de la Relatividad General por el cual la ecuación de movimiento en la teoría de campo unificado asimétrico es una geodésica. Pero ahora hay que distinguir entre geodésica afín y métrica.

La geodésica métrica

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+L_{pq}^{\;k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}=0$$

no es una satisfactoria ecuación de movimiento, puesto que $L_{pq}^{\;k}$ está formado exclusivamente por la parte simétrica del tensor métrico y por tanto no participa en esa ecuación la parte antisimétrica, la que suponemos representa, de una manera u otra, al campo electromagnético. A lo más que podemos llegar con la geodésica métrica es a reproducir la ecuación de movimiento en un campo gravitatorio.

Pero la geodésica afín

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\Gamma_{pq}^{\;k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}=0$$

incluye la parte antisimétrica del tensor métrico, es decir, incluye los términos electromagnéticos. Cabe por averiguar si esta geodésica es la ecuación de movimiento de una partícula cargada en un campo gravitatorio y electromagnético.

La ecuación anterior la desarrollamos según

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\overset{(2)}{\Gamma}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+\overset{(3)}{\Gamma}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+\overset{(4)}{\Gamma}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+....=0$$

o bien

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\overset{(2)}{L}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+\overset{(3)}{L}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+\overset{(4)}{L}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+....\\&+\overset{(2)}{M}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+\overset{(3)}{M}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+\overset{(4)}{M}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+....=0\end{aligned}$$

ahora bien, las únicas componentes distintas de cero a orden 2 y 3 de M_{pq}^{k} son las que tienen índices espaciales, pero estas componentes son antisimétricas respecto a los índices inferiores, o sea

$$\overset{(2)}{M}{}_{\alpha\beta}^{\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0;\quad \overset{(3)}{M}{}_{\alpha\beta}^{\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

por tanto la ecuación de la geodésica afín quedará

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+L_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+\overset{(4)}{M}{}_{pq}^{k}\frac{dx^p}{d\tau}\frac{dx^q}{d\tau}+...=0$$

es decir, los términos electromagnéticos no aparecerán hasta el cuarto orden de la geodésica y aún en este caso sólo se encuentra el campo eléctrico y no el magnético. Pero sabemos que la ecuación de Lorentz, con términos eléctrico y magnético, es de segundo orden, por serlo así el campo magnético. Por tanto nos vemos obligados a concluir que ni la geodésica métrica ni la afín corresponden en la teoría de campo unificado asimétrico a la ecuación de movimiento de una partícula cargada [13].

H.- ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN LA VERSIÓN DÉBIL DE CAMPO UNIFICADO ASIMÉTRICO DE EINSTEIN

1-H. La ecuación de movimiento en la teoría débil de campo unificado asimétrico de Einstein

La teoría de campo unificado existe en una segunda forma, denominada débil por tener soluciones más restrictivas. La teoría se deriva de un principio variacional y también pretende ser una generalización de la Relatividad General. Las ecuaciones de campo de esta teoría son

$$\begin{aligned}&D_r\,\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0\\&\tau_i=0\\&R_{(ik)}=0\\&R_{[ik],r}+R_{[kr],i}+R_{[ri],k}=0,\end{aligned}$$

la última ecuación deriva de

$$R_{[ik]}=\frac{1}{2}\left(\partial_k b_i-\partial_i b_k\right) \tag{62}$$

donde b_i es un vector.

La parte antisimétrica del tensor de Ricci no es nula y tiene la forma de un rotacional, entonces la integral

$$\oiint_{\Sigma} R_{[\alpha\beta]}\,dS_\beta=\frac{1}{2}\oiint_{\Sigma}\nabla\wedge\mathbf{b}\cdot d\mathbf{S}$$

al ser evaluada sobre una superficie cerrada es idénticamente nula por el teorema de Stokes. Esto nos viene a decir que solamente interviene, a propósito de obtener la ecuación de movimiento, la parte simétrica del tensor de Ricci; o sea, lo mismo que ocurría en la teoría fuerte examinada anteriormente.

Los resultados antes alcanzados se pueden extender sin más a la teoría débil de campo unificado [14], concluyendo por tanto que tampoco en esta teoría se obtiene la ecuación de movimiento mediante el método de

Einstein-Infeld-Hofmann. Sin embargo hay que advertir que en esta versión débil ya no son válidas las ecuaciones de campo (43), como veremos en el siguiente epígrafe, las cuales fueron deducidas de la nulidad de la parte antisimétrica del tensor de Ricci. No obstante, las ecuaciones de campo (42) seguirán siendo de aplicación en la versión débil, pues se deducen de la nulidad del vector de torsión. Esta circunstancia en nada altera las conclusiones, ya que también en la versión débil el potencial electroestático coulombiano es una solución de las ecuaciones de campo (ver más abajo).

I.- MODIFICACIÓN DE LA EXPRESIÓN DEL POTENCIAL ELÉCTRICO

1-I. Modificación de las soluciones de las ecuaciones de campo

Hemos comprobado que ni de la versión fuerte ni de la débil de la teoría de campo unificado de Einstein se puede deducir la ecuación de movimiento de una partícula en el campo gravitatorio y electromagnético de otras partículas según el método desarrollado por Einstein-Infeld-Hoffmann. Pero cabe hacer readaptaciones que permitan deducir la ecuación de movimiento en primera aproximación, es decir deducir la ley de Coulomb. Una posibilidad es modificar las soluciones de las ecuaciones de campo anteriores y otro camino consiste en alterar las ecuaciones de campo.

Vamos a seguir el primer procedimiento y lo aplicamos a la teoría débil de campo unificado asimétrico [15]. Queremos primeramente obtener las ecuaciones de campo en primera aproximación. Las ecuaciones (20) siguen siendo válidas, en tanto en cuanto se derivan de la nulidad del vector de torsión. Sin embargo, las ecuaciones (43) hay que modificarlas para aplicarlas al caso de la teoría débil donde se cumple la ecuación

$$R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0 \tag{63}$$

aplicando lo anterior a los coeficientes α,β,δ a segundo orden

$$\overset{(2)}{R}_{[\alpha\beta],\delta} + \overset{(2)}{R}_{[\beta\delta],\alpha} + \overset{(2)}{R}_{[\delta\alpha],\beta} = 0, \tag{64}$$

la segunda ecuacion (39) nos da la parte antisimétrica del tensor de Ricci a segundo orden

$$\overset{(2)}{R}_{[\alpha\beta]} = -\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\gamma\beta} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma} - \overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}, \tag{65}$$

teniendo presente la definición de I_{ikr} y (42), resulta tras aplicar (65) en (64)

$$\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma\delta} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\beta\delta,\gamma\gamma\alpha} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\delta\alpha,\gamma\gamma\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\delta} + \overset{(2)}{b}_{\beta\delta,\alpha} + \overset{(2)}{b}_{\delta\alpha,\beta}\right)_{,\gamma\gamma} = 0 \tag{66}$$

utilizando (35) para desarrollar (66) se encuentra que con independencia de α y β se cumple

$$\overset{(2)}{\varphi}_{,\gamma\gamma\delta\delta} = 0, \tag{67}$$

para comprobar este extremo basta elegir, por ejemplo, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta = 3$ y desarrollar (66). (67) es una de las ecuaciones de campo conjuntamente con las dos de (42). Para obtener la última de las ecuaciones hay que evaluar la componente $0,\alpha$ de (63) a tercer orden, es decir

$$\overset{(3)}{R}_{[0\alpha],\beta} + \overset{(2)}{R}_{[\alpha\beta],0} + \overset{(3)}{R}_{[\beta 0],\alpha} = 0. \tag{68}$$

Por (40) y (39) tenemos que

$$\overset{(3)}{R}_{[0\alpha]} = -\overset{(3)}{b}_{0\beta,\beta\alpha} + \overset{(3)}{b}_{0\alpha,\beta\beta} - \overset{(3)}{I}_{0\alpha\beta,\beta}$$
$$\overset{(2)}{R}_{[\alpha\beta]} = -\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\gamma\beta} + \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma} - \overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma,\gamma},$$

desarrollando y simplificando queda

$$\overset{(3)}{R}_{[0\alpha]} = -\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{0\gamma,\gamma\alpha} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{0\alpha,\gamma\gamma} - \frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,0\gamma}$$
$$\overset{(2)}{R}_{[\alpha\beta]} = -\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma,\gamma\beta} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma} - \frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\alpha\gamma},$$

resultado que aplicamos a (68)

$$\frac{1}{2}\overset{(3)}{b}_{0\alpha,\gamma\gamma\beta}+\frac{1}{2}\overset{(3)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma 0}-\frac{1}{2}\overset{(3)}{b}_{0\beta,\gamma\gamma\alpha}=0.$$

Ahora aplicamos (35) y (36)

$$\frac{1}{2c}\left(\varepsilon_{\alpha\delta\varepsilon}\overset{(2)}{\varphi}_{,\delta\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta\delta}\overset{(2)}{\varphi}_{,\delta\varepsilon}-\varepsilon_{\beta\delta\varepsilon}\overset{(2)}{\varphi}_{,\delta\alpha}\right)_{,\gamma\gamma}\dot{\eta}^{\varepsilon}=0.$$

Falta desarrollar la anterior expresión para todos los posibles valores de α y β, los cuales deben ser distintos por la antisimetría de (64), encontrándose para cada una de las tres posibilidades $(\alpha,\beta=1,2;\ 1,3;\ 2,3)$

$$\overset{(2)}{\varphi}_{,\delta\delta\gamma\gamma}\dot{\eta}^{\varepsilon}=0,$$

como la partícula se encuentra en movimiento y por tanto alguna de las componentes de $\dot{\eta}^{\varepsilon}$ debe ser distinta de cero

$$\varphi_{,\delta\delta\gamma\gamma}=0, \qquad (69)$$

que coincide con (67).

La solución que habíamos considerado en los epígrafes anteriores era

$$\varphi=\frac{k}{c^2}\phi$$

donde ϕ es el potencial eléctrico

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

q es la carga eléctrica de la partícula y r es la «distancia» de la partícula al punto del campo. Esta solución satisface a las ecuaciones de campo, puesto que

$$\varphi_{,\gamma\gamma}=\frac{k}{c^2}\phi_{,\gamma\gamma}=0.$$

Otra posible elección de la función φ es

$$\varphi=\frac{k}{c^2}(\phi+pqr) \qquad (70)$$

siendo p una constante indefinida. Es fácil ver que esta solución cumple las ecuaciones de campo, en efecto

$$r_{,\gamma}=\frac{x^{\gamma}}{r};\quad r_{,\gamma\gamma}=\frac{2}{r};\quad r_{,\gamma\gamma\delta\delta}=\left(\frac{2}{r}\right)_{,\delta\delta}=0,$$

e igual propiedad tiene ϕ.

2-I. Ecuación de movimiento modificada

Damos por válida la versión débil de la teoría de campo unificado de Einstein a la que vamos a aplicar el método de Einstein-Infeld-Hoffmann para obtener la ecuación de movimiento de una partícula cargada en presencia de otra partícula.

Ya hemos comprobado anteriormente que sólo tenemos que manipular las componentes simétricas del tensor de Ricci, es decir que los posibles términos correspondientes a la parte electromagnética de la ecuación de movimiento están incluidas en la integral

$$\oiint_{\Sigma}\left\{\left[\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}-\overset{(4)}{P}_{\alpha\beta}\right]-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}\left[\overset{(4)}{R}_{(rs)}-\overset{(4)}{P}_{rs}\right]\right\}dS_{\beta}$$

para calcular su integrando es necesario previamente calcular las componentes α,β de la parte simétrica del tensor de Ricci, que es dada por (47); al utilizar (29) y la primera ecuación (32) encontramos

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}-\overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)}=\overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{(\alpha\gamma),\beta}-\overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{(\alpha\beta),\gamma}+\overset{(2)}{M}{}^{\gamma}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{M}{}^{\delta}_{\gamma\beta}=$$

$$=-\left(\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}\right)_{,\beta}+\left(\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma}\overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta}\right)_{,\beta}+\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}\right)_{,\gamma}-\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{I}_{\beta\gamma\delta}\right)_{,\gamma}-\left(\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta}\right)_{,\gamma}+$$

$$+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta,\delta}-\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{I}_{\gamma\beta\delta}-\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta,\delta}\overset{(2)}{I}_{\alpha\delta\gamma}+\overset{(2)}{I}_{\gamma\beta\delta}\overset{(2)}{I}_{\alpha\delta\gamma}.$$

Todos los términos anteriores los ponemos en función de $b_{\alpha\beta}$ y sus derivadas, desarrollando para ello $I_{\alpha\beta\delta}$ y tras simplificar nos queda

$$\begin{aligned}\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}-\overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)}&=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\beta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}+\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\alpha}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta,\delta}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\alpha\beta}-\frac{3}{4}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta,\beta}\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\alpha}+\\&+\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\delta\beta,\gamma}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma\gamma}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\delta\alpha}\overset{(2)}{b}_{\beta\delta,\gamma\gamma},\end{aligned}\tag{71}$$

donde hemos tenido en cuenta (42). Ahora calculamos la contracción de la anterior expresión encontrando

$$\overset{(4)}{R}_{(\varepsilon\varepsilon)}-\overset{(4)}{P}_{(\varepsilon\varepsilon)}=\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\varepsilon}\overset{(2)}{b}_{\gamma\varepsilon,\delta}-\frac{3}{2}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\varepsilon\varepsilon}-\frac{5}{4}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta,\varepsilon}\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\varepsilon}+\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\varepsilon\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\varepsilon\gamma,\delta}.\tag{72}$$

A continuación debemos poner las dos expresiones enteriores en función de φ utilizando (35) y usando la identidad

$$\varepsilon_{\delta\gamma\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}=-\delta_{\delta\alpha}\delta_{\varepsilon\mu}+\delta_{\delta\mu}\delta_{\varepsilon\alpha},$$

tendremos para el primer sumando de (71)

$$\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma,\beta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\delta\gamma\varepsilon}\varphi_{,\varepsilon\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\varphi_{,\mu\delta}=\frac{1}{2}\left(-\delta_{\delta\alpha}\delta_{\varepsilon\mu}+\delta_{\delta\mu}\delta_{\varepsilon\alpha}\right)\varphi_{,\varepsilon\beta}\varphi_{,\mu\delta}=-\frac{1}{2}\varphi_{,\mu\alpha}\varphi_{,\mu\beta}+\frac{1}{2}\varphi_{,\alpha\beta}\varphi_{,\mu\mu}$$

haciendo lo mismo para los restantes miembros y simplificando obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\overset{(4)}{\Omega}{}''_{(\alpha\beta)}&=\left[\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}-\overset{(4)}{P}_{\alpha\beta}\right]-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}\left[\overset{(4)}{R}_{(rs)}-\overset{(4)}{P}_{rs}\right]=\left[\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)}-\overset{(4)}{P}_{\alpha\beta}\right]-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left[\overset{(4)}{R}_{(\varepsilon\varepsilon)}-\overset{(4)}{P}_{(\varepsilon\varepsilon)}\right]=\\&=-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu\gamma}\varphi_{,\mu\gamma}+\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}-\frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu\mu}\varphi_{,\gamma\gamma}+\varphi_{,\mu\mu}\varphi_{,\alpha\beta}+\\&+\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu\alpha\beta}-\frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\mu\mu\beta}-\frac{1}{2}\varphi_{,\beta}\varphi_{,\mu\mu\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu\gamma\gamma},\end{aligned}\tag{73}$$

nótese que hemos tenido en cuenta (48) y que hemos eliminado la indicación de que φ es de segundo orden.

En el caso de que el parámetro p sea nulo y por tanto la función φ sea armónica, de (73) reencontramos (56). En efecto, en este caso modificamos la relación (73)

$$\overset{(4)}{\Omega}{}''_{(\alpha\beta)}=-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu\gamma}\varphi_{,\mu\gamma}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}+\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu\alpha\beta}\tag{74}$$

como φ es una función armónica $\varphi_{,\mu\mu}=0$. Aplicando la relación

$$\varepsilon_{\alpha\delta\mu}\varepsilon_{\beta\gamma\nu}=\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma}\delta_{\mu\nu}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\nu}\delta_{\mu\beta}+\delta_{\alpha\nu}\delta_{\delta\beta}\delta_{\mu\gamma}-\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\nu}\delta_{\mu\gamma}-\delta_{\alpha\nu}\delta_{\delta\gamma}\delta_{\mu\beta}-\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\beta}\delta_{\mu\nu},$$

se encuentra que

$$-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}=-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu\gamma}\varphi_{,\mu\gamma}+\varphi_{,\mu\alpha}\varphi_{,\mu\beta}$$

que al sustituirlo en (74) se encuentra (56). Entonces cuando el factor p es nulo no podemos encontrar, como ya hemos visto, la ley de Coulomb.

3-I. Estimación del valor del coeficiente *p*

Para obtener la corrección electromagnética a las ecuaciones de movimiento en primera aproximación tenemos que calcular la integral de superficie de (73)

$$\oiint_{\Sigma}\overset{(4)}{\Omega}{}''_{(\alpha\beta)}dS_{\beta},\tag{75}$$

antes de hacer este cálculo notemos que

$$\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}=\left(\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}\right)_{,\gamma}\quad\rightarrow\quad F_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta},$$

donde hemos tenido en cuenta (42). Como se cumple

$$F_{\alpha\beta\gamma} = -F_{\alpha\gamma\beta}$$

entonces

$$\oiint_{\Sigma} F_{\alpha\beta\gamma,\gamma} dS_{\beta}$$

es idénticamente nula por el teorema de Stokes puesto que el integrando es un rotacional. Por tanto este término lo podemos retirar de la integración de (75).

Directamente de (73) se comprueba que

$$\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta),\beta} = 0$$

donde hemos tenido en cuenta que b_{ik} es antisimétrico y se cumple (67), por tanto la integral (75) es independiente de la superficie de integración, o sea su resultado no puede depender de r, y esto sólo ocurre cuando el integrando de (75) depende de $1/r^2$, por tanto sólo los integrandos con esta características serán considerados más adelante.

Para simplificar los cálculos vamos a considerar que existen sólo dos partículas que denominaremos 1 y 2, entonces

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

por (70) tenemos

$$\varphi_1 = \frac{k}{c^2}(\phi_1 + pqr) = \frac{k}{c^2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + pqr\right)$$
$$\varphi_1 = \frac{k}{c^2}(\phi_2 + pqr') = \frac{k}{c^2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'} + pqr'\right)$$

donde r y r' vienen definidos en la ilustración 1.

Suponemos que en el momento de hacer la integración la partícula 1 de masa m_1 y carga q_1 se encuentra en el origen de coordenadas, $\eta^\alpha = (0,0,0)$, y la partícula 2, de masa m_2 y carga q_2 está en el eje z con la posición $\xi^\alpha = (0,0,d)$, entonces

$$r = \sqrt{\sum_\alpha \left(x^\alpha - \eta^\alpha\right)^2}; \quad r' = \sqrt{\sum_\alpha \left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)^2},$$

y en el momento considerado

$$r = \sqrt{\sum_\alpha \left(x^\alpha\right)^2}.$$

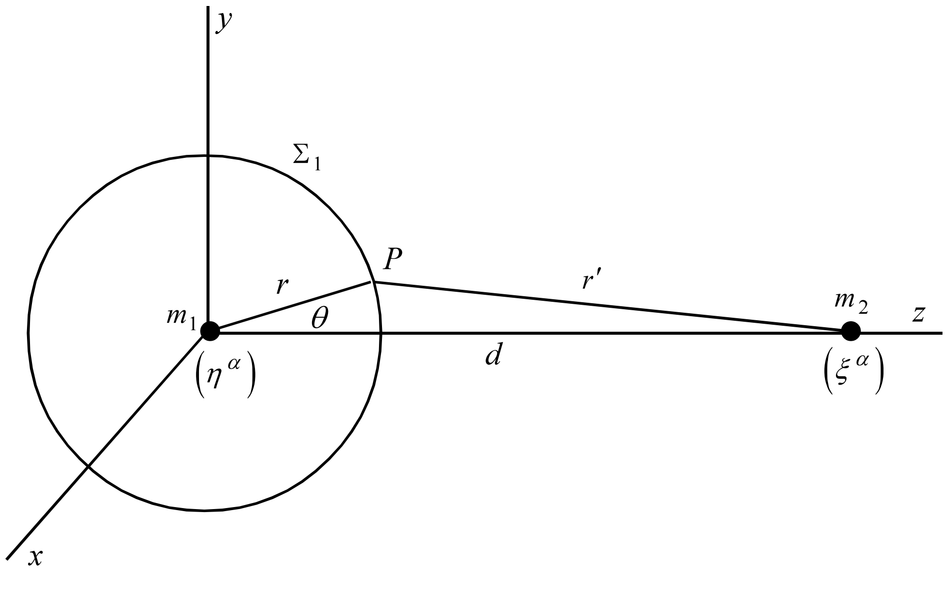

Ilustración 1

De la ilustración 1 se desprende que

$$r' = d\sqrt{1 + (r/d)^2 - 2r/d\cos\theta},$$

que se puede desarrollar

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{r}{d}\cos\theta\right) + O_2(r)$$

donde $O_2(r)$ representa términos de orden mayor que el primero en r/d. De la expresión anterior encontramos que

$$\frac{1}{r'^n} = \frac{1}{d^n}\left(1 + n\frac{r}{d}\cos\theta\right) + O_2(r). \tag{76}$$

Si hacemos el desarrollo hasta el segundo orden en r/d tenemos

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{r}{d}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{r^2}{d^2} + 3\frac{r^2}{d^2}\cos^2\theta\right) + O_3(r)$$

$O_3(r)$ representa expresiones de orden tercero y superior.

Para simplificar vamos a poner

$$\varphi = \frac{a}{r} + br$$

donde

$$a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{k}{c^2}; \quad b = \frac{k}{c^2}pq.$$

Al hacer la integración de (73) nos vamos a encontrar con tres tipos de términos según sean sus coeficientes, que podrán ser

$$a \cdot a; \quad a \cdot b; \quad b \cdot b,$$

los términos que pueden contener la fuerza de Coulomb son los del segundo tipo, por razones que veremos más adelante.

Vamos a hacer la integración sobre una esfera Σ_1 centrada en la partícula 1 de radio arbitrario *r*. La primera integral de (73) es

$$I_1 = -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma} \overset{(2)}{\varphi}_{,\mu\gamma}\, \overset{(2)}{\varphi}_{,\mu\gamma}\, dS_\beta.$$

Calculemos previamente el integrando

$$\left(\varphi_{1,\mu\gamma} + \varphi_{2,\mu\gamma}\right)\left(\varphi_{1,\mu\gamma} + \varphi_{2,\mu\gamma}\right) = \begin{bmatrix} -a\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r^3} + 3a\dfrac{x^\mu x^\gamma}{r^5} + b\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r} - b\dfrac{x^\mu x^\gamma}{r^3} - a'\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r'^3} + \\ +3a'\dfrac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^5} + b'\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r'} - b'\dfrac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^3} \end{bmatrix}.$$

$$\cdot\begin{bmatrix} -a\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r^3} + 3a\dfrac{x^\mu x^\gamma}{r^5} + b\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r} - b\dfrac{x^\mu x^\gamma}{r^3} - a'\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r'^3} + \\ +3a'\dfrac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^5} + b'\dfrac{\delta_{\mu\gamma}}{r'} - b'\dfrac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^3} \end{bmatrix}$$

donde las primas en *a* y *b* significan que la carga eléctrica que aparece es la q_2 (carga de la partícula 2), mientras que en la *a* y *b* sin primas la carga eléctrica es la q_1 (carga de la partícula 1).

Los únicos términos de la expresión anterior que tienen integrales no nulas porque de ellos se pueden derivar expresiones que dependiendo de la inversa de r^2 tienen de coeficientes ab' o $a'b$ son

$$\begin{aligned}\left(\varphi_{1,\mu\gamma} + \varphi_{2,\mu\gamma}\right)\left(\varphi_{1,\mu\gamma} + \varphi_{2,\mu\gamma}\right) \to -2a'b\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r^3}\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r'} + 2a'b\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r^3}\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^3} + \\ +6a'b\frac{x^\mu x^\gamma}{r^5}\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r'} - 6a'b\frac{x^\mu x^\gamma}{r^5}\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^3},\end{aligned} \tag{77}$$

donde hemos tenido en cuenta que $a'b = ab'$. Los anteriores miembros se simplifican por (76)

$$-2a'b\delta_{\alpha\beta}\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r^3}\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r'}\to -6\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$2a'b\delta_{\alpha\beta}\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r^3}\frac{\left(x^\mu-\xi^\mu\right)\left(x^\gamma-\xi^\gamma\right)}{r'^3}\to 2\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$6a'b\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu x^\gamma}{r^5}\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r'}\to 6\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$-6a'b\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu x^\gamma}{r^5}\frac{\left(x^\mu-\xi^\mu\right)\left(x^\gamma-\xi^\gamma\right)}{r'^3}\to 12\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta-18\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos^3\theta$$

donde sólo tenemos en cuenta los términos que depende de la inversa de r^2. Al sumar los anteriores términos se encuentra la integral

$$\begin{aligned}I_1 &\to -\frac{1}{2}14\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\phi+\\ &+\frac{1}{2}18\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^2}\cos^3\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\phi=\left(-\frac{28}{3}+\frac{36}{5}\right)\pi\frac{a'b}{d^2}\end{aligned}\tag{78}$$

hemos puesto $\alpha=3$ ya que en caso contrario habría una integral de $\sin\varphi$ o $\cos\varphi$ que daría un resultado nulo. Al desarrollar las restantes integrales de (48) encontraremos, como veremos más adelante, expresiones similares a (78), con valores numéricos diferentes, que al agruparlos nos dará

$$-16\pi N\frac{a'b}{d^2}=-8\pi N\frac{k^2}{c^4}p\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2}=-8\pi N\frac{1}{2}\frac{k^2}{c^4}pq_1\tilde{\phi}_{2,z}$$

donde *N* es un número que determinaremos mas adelante, $\tilde{\phi}_2$ es el potencial eléctrico de la partícula 2 en el punto donde se encuentra la partícula 1, el subíndice *z* significa que el potencial se deriva respecto a la coordenadas $\alpha=3$.

Como se demuestra en [7]

$$\oiint_{\Sigma_1}\left[\overset{(4)}{P}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}\overset{(4)}{P}_{rs}\right]dS_\beta=\frac{8\pi}{c^4}Gm_1\ddot{\eta}_z+\frac{8\pi}{c^4}Gm_1\tilde{\psi}_{2,z}$$

donde $\tilde{\psi}_2$ es el potencial gravitatorio de la partícula 2 en el punto donde se encuentra la partícula 1; m_1 y m_2 son las masas de las dos partículas interactuantes.

Entonces, no considerando los términos cuyos coeficientes sean del tipo $a\cdot a$ y $b\cdot b$ la condición de integrabilidad

$$\oiint_{\Sigma_1}\left[\overset{(4)}{\Omega}{}'_{(\alpha\beta)}+\overset{(4)}{\Omega}{}''_{(\alpha\beta)}\right]dS_\beta=0$$

será

$$\frac{8\pi}{c^4}Gm_1\ddot{\eta}_z+\frac{8\pi}{c^4}Gm_1\tilde{\psi}_{2,z}-8\pi N\frac{k^2}{c^4}pq_1\tilde{\phi}_{2,z}=0\quad\Rightarrow\quad m_1\ddot{\eta}_z=-m_1\tilde{\psi}_{2,z}+N\frac{k^2}{G}pq_1\tilde{\phi}_{2,z}$$

que correspondería a la ecuación de movimiento de una partícula en el campo gravitatorio y electromagnético de otra partícula en primera aproximación, siempre y cuando se cumpla

$$N\frac{k^2}{G}p=1\quad\Rightarrow\quad p=\frac{1}{N}\frac{G}{k^2}\tag{79}$$

que nos va a permitir estimar el orden de magnitud del parámetro *p*. De (35) encontramos que si *E* es el módulo del campo eléctrico y *b* representa el valor de la componente antisimétrica del tensor métrico

$$E\sim\frac{k}{c^2}b\quad\Rightarrow\quad k\sim\frac{Ec^2}{b}$$

como la alteración del espacio-tiempo por efecto del campo eléctrico debe ser muy pequeña aunque sea grande el campo eléctrico, significa que *b* debe tener un valor pequeño, entonces la anterior expresion nos viene a decir que *k* es un valor numérico muy grande. De (79) vemos que siendo *N* del orden la unidad, entonces *p* es un valor extremadamente pequeño.

Lo anteriormente deducido nos viene a decir que los términos obtenidos de (73) que tengan por coeficiente bb' deben ser muchísimo menor que los términos que contengan el coeficiente ab', motivo por el que aquellos pueden ser despreciados en el cálculo de la ecuación de movimiento en primera aproximación, tal como haremos más adelante.

4-I. Condición de integrabilidad

Por lo visto anteriormente tenemos que integrar (73) pero sólo tenemos que considerar los términos que tengan los coeficientes sean $a'b$ o ab', ya que los términos con coeficiente aa' se tienen que anular finalmente, pues son los derivados del potencial eléctrico ϕ, que como ya sabemos no dan condiciones de integrabilidad.

Antes de proceder a la integración de (73) necesitamos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\varphi_{,\mu} &= \varphi_{1,\mu} + \varphi_{2,\mu} = -a\frac{x^\mu}{r^3} + b\frac{x^\mu}{r} - a'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)}{r'^3} + b'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)}{r'} \\
\varphi_{,\mu\gamma} &= \varphi_{1,\mu\gamma} + \varphi_{2,\mu\gamma} = -a\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r^3} + 3a\frac{x^\mu x^\gamma}{r^5} + b\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r} - b\frac{x^\mu x^\gamma}{r^3} - a'\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r'^3} + \\
&\quad + 3a'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^5} + b'\frac{\delta_{\mu\gamma}}{r'} - b'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)}{r'^3} \\
\varphi_{,\mu\mu} &= \varphi_{1,\mu\mu} + \varphi_{2,\mu\mu} = 2b\frac{1}{r} - 3a'\frac{1}{r'^3} + 3a'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\mu - \xi^\mu\right)}{r'^5} + 3b'\frac{1}{r'} - b'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\mu - \xi^\mu\right)}{r'^3} \\
\varphi_{,\alpha\beta} &= \varphi_{1,\alpha\beta} + \varphi_{2,\alpha\beta} = -a\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} + 3a\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5} + b\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r} - b\frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} - a'\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r'^3} + \\
&\quad + 3a'\frac{\left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)\left(x^\beta - \xi^\beta\right)}{r'^5} + b'\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r'} - b'\frac{\left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)\left(x^\beta - \xi^\beta\right)}{r'^3} \\
\varphi_{,\mu\mu\alpha} &= \varphi_{1,\mu\mu\alpha} + \varphi_{2,\mu\mu\alpha} = -2b\frac{x^\alpha}{r^3} + 15a'\frac{x^\alpha - \xi^\alpha}{r'^5} - 15a'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)}{r'^7} - \\
&\quad - 5b'\frac{x^\alpha - \xi^\alpha}{r'^3} + 3b'\frac{\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\mu - \xi^\mu\right)\left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)}{r'^5} \\
\varphi_{,\mu\alpha\beta} &= \varphi_{1,\mu\alpha\beta} + \varphi_{2,\mu\alpha\beta} = 3a\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu}{r^5} + 3a\delta_{\mu\alpha}\frac{x^\beta}{r^5} + 3a\delta_{\mu\beta}\frac{x^\alpha}{r^5} - 15a\frac{x^\alpha x^\beta x^\mu}{r^7} - b\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu}{r^3} - b\delta_{\mu\alpha}\frac{x^\beta}{r^3} - \\
&\quad - b\delta_{\mu\beta}\frac{x^\alpha}{r^3} + 3b\frac{x^\alpha x^\beta x^\mu}{r^5} + 3a'\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu - \xi^\mu}{r'^5} + 3a'\delta_{\mu\alpha}\frac{x^\beta - \xi^\beta}{r'^5} + 3a'\delta_{\mu\beta}\frac{x^\alpha - \xi^\alpha}{r'^5} - \\
&\quad - 15a'\frac{\left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)\left(x^\beta - \xi^\beta\right)\left(x^\mu - \xi^\mu\right)}{r'^7} - b'\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu - \xi^\mu}{r'^3} - b'\delta_{\mu\alpha}\frac{x^\beta - \xi^\beta}{r'^3} - b'\delta_{\mu\beta}\frac{x^\alpha - \xi^\alpha}{r'^3} + \\
&\quad + 3b'\frac{\left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)\left(x^\beta - \xi^\beta\right)\left(x^\mu - \xi^\mu\right)}{r'^5}
\end{aligned} \tag{80}$$

recordamos que sólo nos interesan los términos que contienen ab' o $a'b$.

La segunda integral de (73) es

$$I_2 = -\frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\mu\mu}\varphi_{,\gamma\gamma}dS_\beta = 0$$

ya que por la tercera ecuación (80) vemos que no es posible encontrar un término que teniendo de coeficiente ab' o $a'b$ dependa de la inversa de r^2.

La integral I_3

$$I_3 = \oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\mu\mu}\varphi_{,\alpha\beta}dS_\beta$$

contiene los siguientes términos que nos interesan

$$-3ab'\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\frac{1}{r'} \to -3\frac{a'b}{d^2}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2}\cos\theta$$

$$9ab'\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}\frac{1}{r'}\to 9\frac{a'b}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta \quad (\alpha=3)$$
$$ab'\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\frac{\left(x^\mu-\xi^\mu\right)\left(x^\mu-\xi^\mu\right)}{r'^3}\to\frac{a'b}{d^2}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2}\cos\theta$$
$$-3ab'\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}\frac{\left(x^\mu-\xi^\mu\right)\left(x^\mu-\xi^\mu\right)}{r'^3}\to -3\frac{a'b}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta \quad (\alpha=3)$$

que simplificando queda

$$\left(\varphi_{1,\mu\mu}+\varphi_{2,\mu\mu}\right)\left(\varphi_{1,\alpha\beta}+\varphi_{2,\alpha\beta}\right)=3\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos\theta-2\frac{ab'}{d^2}\frac{1}{r^2}\delta_{\alpha\beta}\cos\theta-3\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta$$

sus integrales son

$$I_{31}\to 6\frac{ab'}{d^2}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^\beta}{r}\frac{1}{r^3}\cos^2\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=8\pi\frac{ab'}{d^2}$$
$$I_{32}\to -2\frac{ab'}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{8}{3}\pi\frac{ab'}{d^2}$$

donde hemos tomado $\alpha=3$ puesto que cualquier otra opción daría una integral nula por aparecer la integral de $\cos\varphi$ o $\sin\varphi$. Sumando obtenemos

$$I_3=\frac{16}{3}\pi\frac{ab'}{d^2}.$$

La integral I_4 es

$$I_4=\oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu\alpha\beta}dS_\beta$$

de la tabla (80) obtenemos los términos que dependiendo de la inversa de r^2 tienen por coeficiente a ab' o $a'b$

$$ab'\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu}{r^3}\frac{x^\mu-\xi^\mu}{r'^3}\to -\frac{ab'}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$
$$ab'\delta_{\mu\alpha}\frac{x^\mu}{r^3}\frac{x^\beta-\xi^\beta}{r'^3}\to -\frac{ab'}{d^2}\frac{1}{r^2}\cos\theta \quad (\alpha=\beta=3)$$
$$ab'\delta_{\mu\beta}\frac{x^\mu}{r^3}\frac{x^\alpha-\xi^\alpha}{r'^3}\to -\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3} \quad (\alpha=3)$$
$$-3ab'\frac{x^\mu}{r^3}\frac{\left(x^\alpha-\xi^\alpha\right)\left(x^\beta-\xi^\beta\right)\left(x^\mu-\xi^\mu\right)}{r'^5}\to 3\frac{ab'}{d^2}\frac{1}{r^2}\cos\theta \quad (\alpha=\beta=3)$$
$$3ab'\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu}{r^5}\frac{x^\mu-\xi^\mu}{r'}\to 3\frac{ab'}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta-3ab'\delta_{\alpha\beta}\frac{\cos\theta}{r^4}d\frac{1}{d}\left(-\frac{1}{2}\frac{r^2}{d^2}+3\frac{r^2}{d^2}\cos^2\theta\right)=$$
$$=\frac{9}{2}\frac{ab'}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta-9\frac{ab'}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos^3\theta$$
$$3ab'\delta_{\mu\alpha}\frac{x^\beta}{r^5}\frac{x^\mu-\xi^\mu}{r'}\to 3\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta-3ab'\frac{x^\beta}{r^5}d\frac{1}{d}\left(-\frac{1}{2}\frac{r^2}{d^2}+3\frac{r^2}{d^2}\cos^2\theta\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}-6\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta \quad (\alpha=3)$$
$$3ab'\delta_{\mu\beta}\frac{x^\alpha}{r^5}\frac{x^\mu-\xi^\mu}{r'}\to 3\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^2}\frac{1}{r^2}\cos\theta-9\frac{ab'}{d^2}\frac{1}{r^2}\cos^3\theta \quad (\alpha=\beta=3)$$
$$-15ab'\frac{x^\alpha x^\beta x^\mu}{r^7}\frac{x^\mu-\xi^\mu}{r'}\to -\frac{45}{2}\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta+45\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^4\theta \quad (\alpha=3)$$
$$a'b\delta_{\alpha\beta}\frac{x^\mu}{r^3}\frac{x^\mu-\xi^\mu}{r'^3}\to -\frac{ab'}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$
$$a'b\delta_{\mu\alpha}\frac{x^\beta}{r^3}\frac{x^\mu-\xi^\mu}{r'^3}\to -\frac{ab'}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3} \quad (\alpha=1)$$

$$a'b\delta_{\mu\beta}\frac{x^{\alpha}}{r^{3}}\frac{x^{\mu}-\xi^{\mu}}{r'^{3}}\rightarrow-\frac{ab'}{d^{2}}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\quad(\alpha=\beta=3)$$
$$-3a'b\frac{x^{\alpha}x^{\beta}x^{\mu}}{r^{5}}\frac{x^{\mu}-\xi^{\mu}}{r'^{3}}=3\frac{a'b}{d^{2}}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\cos^{2}\theta$$

y ya podemos calcular I_4

$$I_{41}=-\frac{ab'}{d^{2}}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{4\pi}{3}\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{42}=-\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{4\pi}{3}\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{43}=-\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-4\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{44}=3\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=4\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{45}=\frac{9}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi-9\frac{ab'}{d^{2}}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos^{3}\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{6}{5}\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{46}=\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi-6\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\cos^{2}\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-2\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{47}=3\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\cos^{2}\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi+\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi-$$
$$-9\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos^{3}\theta\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{6}{5}\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{48}=-\frac{45}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\cos^{2}\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi+45\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\cos^{4}\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=6\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{49}=-\frac{ab'}{d^{2}}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{4}{3}\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{410}=-\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-4\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{411}=-\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{4}{3}\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$
$$I_{412}=3\frac{a'b}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\cos^{2}\theta\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=4\pi\frac{a'b}{d^{2}}$$

donde siempre hemos puesto $\alpha=3$ pues en caso contrario la integral es nula. Sumando todos los términos

$$I_4=\left(-\frac{12}{5}-\frac{4}{3}\right)\pi\frac{ab'}{d^{2}}.$$

Vamos ahora a calcular I_5

$$I_5=-\frac{1}{2}\oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\mu\mu\beta}dS_{\beta}$$

cuyos términos son

$$-\frac{1}{2}5ab'\frac{x^{\alpha}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}-\xi^{\beta}}{r'^{3}}\rightarrow\frac{5}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\quad(\alpha=\beta=3)$$
$$\frac{1}{2}3ab'\frac{x^{\alpha}}{r^{3}}\frac{\left(x^{\mu}-\xi^{\mu}\right)\left(x^{\mu}-\xi^{\mu}\right)\left(x^{\beta}-\xi^{\beta}\right)}{r'^{5}}\rightarrow-\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\quad(\alpha=\beta=3)$$

$$-\frac{1}{2}2a'b\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\alpha}-\xi^{\alpha}}{r'^{3}}\rightarrow\frac{a'b}{d^{2}}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\quad(\alpha=3)$$

de donde se derivan las integrales

$$I_{51}=\frac{5}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{10}{3}\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$

$$I_{52}=-\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-2\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$

$$I_{53}=\frac{a'b}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=4\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$

cuya suma es

$$I_{5}=\frac{16}{3}\pi\frac{ab'}{d^{2}}.$$

En cuanto a la integral I_6

$$I_{6}=-\frac{1}{2}\oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\beta}\varphi_{,\mu\mu\alpha}dS_{\beta}$$

se descompone en

$$-\frac{1}{2}5ab'\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\alpha}-\xi^{\alpha}}{r'^{3}}\rightarrow\frac{5}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\quad(\alpha=3)$$

$$\frac{1}{2}3ab'\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{\left(x^{\mu}-\xi^{\mu}\right)\left(x^{\mu}-\xi^{\mu}\right)\left(x^{\alpha}-\xi^{\alpha}\right)}{r'^{5}}\rightarrow-\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\quad(\alpha=3)$$

$$-\frac{1}{2}2a'b\frac{x^{\alpha}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}-\xi^{\beta}}{r'^{3}}\rightarrow\frac{a'b}{d^{2}}\frac{1}{r^{3}}\cos\theta\quad(\alpha=\beta=3)$$

de donde se obtienen las integrales

$$I_{61}\rightarrow\frac{5}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=10\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$

$$I_{62}\rightarrow-\frac{3}{2}\frac{ab'}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^{3}}\frac{x^{\beta}}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=-6\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$

$$I_{63}\rightarrow\frac{a'b}{d^{2}}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^{3}}\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r}r^{2}\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{4}{3}\pi\frac{ab'}{d^{2}}$$

cuya suma es

$$I_{6}=\frac{16}{3}\pi\frac{ab'}{d^{2}}.$$

Por último calculamos I_7

$$I_{7}=-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu\gamma\gamma}dS_{\beta}$$

que se descompone en los siguientes términos

$$-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}5ab'\frac{x^{\mu}}{r^{3}}\frac{x^{\mu}-\xi^{\mu}}{r'^{3}}\rightarrow\frac{5}{2}\delta_{\alpha\beta}\frac{ab'}{d^{2}}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}3ab'\frac{x^{\mu}}{r^{3}}\frac{\left(x^{\gamma}-\xi^{\gamma}\right)\left(x^{\gamma}-\xi^{\gamma}\right)\left(x^{\mu}-\xi^{\mu}\right)}{r'^{5}}\rightarrow-\frac{3}{2}\delta_{\alpha\beta}\frac{ab'}{d^{2}}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta$$

$$-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}2a'b\frac{x^{\mu}}{r^{3}}\frac{x^{\mu}-\xi^{\mu}}{r'^{3}}\rightarrow\delta_{\alpha\beta}\frac{a'b}{d^{2}}\frac{1}{r^{2}}\cos\theta$$

y de aquí se derivan las integrales

$$I_{71} \rightarrow \frac{5}{2}\delta_{\alpha\beta}\frac{ab'}{d^2}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{10}{3}\pi\frac{ab'}{d^2}$$

$$I_{72} \rightarrow -\frac{3}{2}\delta_{\alpha\beta}\frac{ab'}{d^2}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = -2\pi\frac{ab'}{d^2}$$

$$I_{73} \rightarrow \delta_{\alpha\beta}\frac{a'b}{d^2}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi\frac{ab'}{d^2}$$

de suma

$$I_7 = \frac{8}{3}\pi\frac{ab'}{d^2}.$$

Finalmente sumamos todos los resultados

$$I = \oiint_{\Sigma} \overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)} dS_\beta ,= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 =$$

$$= \left(\left(-\frac{28}{3}+\frac{36}{5}\right)+0+\frac{16}{3}+\left(-\frac{12}{5}-\frac{4}{3}\right)+\frac{16}{3}+\frac{16}{3}+\frac{8}{3}\right)\pi\frac{a'b}{d^2} = 8\frac{8}{5}\pi\frac{ab'}{d^2}$$

de este resultado y de (31)

$$\oiint\left[\overset{(4)}{\Omega'}_{(\alpha\beta)}+\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}\right]dS_\beta = \frac{8\pi}{c^4}Gm_1\ddot{\eta}_z + \frac{8\pi}{c^4}Gm_1\tilde{\psi}_{2,z} + \frac{k^2}{c^4}8\pi\frac{8}{5}pq\tilde{\phi}_{2,z} = 0$$

entonces si tomamos como valor de p aquel que cumple

$$p = -\frac{5}{8}\frac{G}{k^2}$$

entonces aparece en la ecuación de movimiento la ley de Coulomb

$$m_1\ddot{\eta}_z = -m_1\tilde{\psi}_{2,z} + q_1\tilde{\phi}_{2,z} = -G\frac{m_1 m_2}{d^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

con lo que queda demostrado, que al menos en primera aproximación, podemos recuperar la ley de Coulomb.

Vectorialmente la anterior relación queda

$$m_1\ddot{\boldsymbol{\eta}}_1 = -m_1\nabla\psi_2 + q_1\nabla\phi_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Si ahora aplicamos la condición de integrabilidad pero haciendo la integración respecto a una superficie que englobe a la partícula 2, obtenemos la ecuación de movimiento de esta segunda partícula.

Recordamos que además de este término eléctromagnético existe otro término eléctrico que tiene el coeficiente bb' y cuya estructura es

$$N\pi p^2 q_1 q_2\frac{\mathbf{r}}{r}$$

o sea, también tiene dirección radial, pero su módulo no depende de la distancia, sino que siempre toma el mismo valor y, que como ya hemos señalado, tiene un valor extremadamente pequeño por depender de p^2 .

J.- MODIFICACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

1-J. Relación entre el campo electromagnético y el tensor métrico

Un problema que se encuentra con las teoría asimétricas consiste en el significado que se le adjudica a las partes simétrica y antisimétrica del tensor métrico. Hasta ahora hemos considerado que la parte simétrica del tensor métrico corresponde a los potenciales del campo gravitatorio, mientras que la parte antisimétrica la hacemos proporcional a las intensidades de campo eléctrico y magnético.

La razón de hacer esta elección no es otra que tanto $g_{[ik]}$ como el tensor de campo electromagnético son antisimétricos, pero a falta de razón más poderosa se puede indagar otra forma de relacionar el campo electromagnético y la parte antisimétrica del tensor métrico.

Hay que advertir en este punto lo extraño que resulta que la parte simétrica del tensor métrico se relacione con el potencial gravitatorio (y no con su intensidad), mientras que la parte antisimétrica se relaciona con intensidades de campo y no con potenciales.

Una idea sugerida por Klotz y Russell [16] es definir la intensidad de campo electromagnétíco f_{ik} por

$$f_{ik} = p' g^{pq} D_{pq} b_{\underset{+-}{ik}}$$

donde p' es una constante.

El único término que existe a segundo orden es

$$\overset{(2)}{f}_{ik} = p' \overset{(0)}{g}{}^{pq} D_{pq} \overset{(2)}{b}_{\underset{+-}{ik}} = p'\eta^{pq} D_{pq} \overset{(2)}{b}_{\underset{+-}{ik}} \approx p'\eta^{pq} \overset{(2)}{b}_{ik,pq}$$

el campo eléctrico son las componentes α,β es decir

$$\overset{(2)}{f}_{\alpha\beta} = p'\eta^{pq} \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,pq} = p \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma} - p \overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,00} \approx p \overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma} \tag{81}$$

hemos tenido en cuenta que la derivación respecto a la coordenada temporal aumenta en uno el orden y de aquí que las derivadas temporales del tensor métrico no los hayamos considerado; nótese que $p = -p'$.

Las ecuaciones de campo son (42) y (66)

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\beta} = 0; \quad \left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\delta} + \overset{(2)}{b}_{\beta\delta,\alpha} + \overset{(2)}{b}_{\delta\alpha,\beta} \right)_{,\gamma\gamma} = 0. \tag{82}$$

Con la nueva definición de campo eléctrico la ecuación (35) queda

$$\overset{(2)}{f}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{,\gamma}$$

donde φ es proporcional al potencial coulombiano ϕ, es decir

$$\varphi = \frac{k}{c^2}\phi. \tag{83}$$

Por (81) se tiene que

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma\gamma} = \frac{1}{p}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{,\gamma}, \tag{84}$$

si definimos la función Φ por

$$\Phi_{,\gamma\gamma} = \varphi \tag{85}$$

que también es de segundo orden, entonces por (56)

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta} = \frac{1}{p}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Phi_{,\gamma} \tag{86}$$

es decir nos encontramos con una ecuación análoga a la (35) salvo que intercambiamos φ por Φ. De la segunda ecuación (82) habíamos visto que se deducía (67), pero ahora con Φ en vez de φ, por tanto tenemos

$$\Phi_{,\delta\delta\gamma\gamma} = 0,$$

que tiene como solución

$$\Phi = \frac{a}{r} + br + er^2 + f$$

como se puede comprobar directamente. También se encuentra que

$$\Phi_{,\gamma\gamma} = \frac{2b}{r} + 6e,$$

por (83) y (85)

$$\varphi = \frac{2b}{r} + 6e = \frac{k}{c^2}\phi = \frac{k}{c^2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + k' \right) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}\frac{k}{c^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q; \quad e = \frac{1}{6}\frac{kk'}{c^2}$$

donde k' es una constante indeterminada que en nada afecta al campo eléctrico. Démenos cuenta que el potencial eléctrico φ sigue siendo una función armónica, pero ya no es indeterminada como ocurre en electromagnetismo, donde el cero del potencial es arbitrario. Ahora fijamos la función potencial, de tal manera que en el infinito el potencial eléctrico es

$$\varphi_\infty = 6e.$$

2-J. Condición de integrabilidad

Aplicando las ecuaciones (29) y (32) en (47) nos queda

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)} - \overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)} = \overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{(\alpha\gamma),\beta} - \overset{(4)}{M}{}^{\gamma}_{(\alpha\beta),\gamma} + \overset{(2)}{M}{}^{\gamma}_{\alpha\delta} \overset{(2)}{M}{}^{\delta}_{\gamma\beta} =$$
$$= \left[\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma} \left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta} \right) \right]_{,\beta} - \left[\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta} \left(-\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\beta\gamma\delta} \right) + \overset{(2)}{b}_{\delta\beta} \left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta} \right) \right]_{,\gamma} + \tag{87}$$
$$+ \left(-\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma} + \overset{(2)}{I}_{\alpha\delta\gamma} \right) \left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\gamma\beta\delta} \right),$$

que ahora tenemos que poner en función de Φ.

Para hacer el cálculo tenemos en cuenta que $I_{\alpha\beta\delta}$ es distinto de cero solamente cuando sus tres subíndices son distintos de cero, en el caso de que los subíndices sean 1, 2 y 3

$$I_{123} = \frac{1}{2}\left(b_{12,3} + b_{23,1} + b_{31,2} \right) = \frac{1}{2p}\left(\varepsilon_{12\gamma}\Phi_{,\gamma} + \varepsilon_{23\gamma}\Phi_{,\gamma} + \varepsilon_{31\gamma}\Phi_{,\gamma} \right) =$$
$$= \frac{1}{2p}\left(\Phi_{,33} + \Phi_{,11} + \Phi_{,22} \right) = \frac{1}{2p}\Phi_{,\gamma\gamma} = \frac{1}{2p}\varphi$$

en la que hemos utilizado (57); como $I_{\alpha\beta\delta}$ cambia de signo con las permutaciones impares tenemos

$$I_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi. \tag{88}$$

Al calcular los distintos sumandos de (59) utilizamos (20), (57), (58), (60) y

$$\varepsilon_{\delta\gamma\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\alpha\mu} = -\delta_{\delta\alpha}\delta_{\varepsilon\mu} + \delta_{\delta\mu}\delta_{\varepsilon\alpha}$$

encontrando

$$\left[\overset{(2)}{b}_{\delta\gamma} \left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta} \right) \right]_{,\beta} = \frac{1}{p^2}\Phi_{,\gamma\alpha}\Phi_{,\gamma\beta} + \frac{1}{p^2}\Phi_{,\gamma}\Phi_{,\gamma\alpha\beta}$$

$$-\left[\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta} \left(-\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\beta\gamma\delta} \right) + \overset{(2)}{b}_{\delta\beta} \left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta} \right) \right]_{,\gamma} = \frac{1}{p^2}\varepsilon_{\alpha\delta\varepsilon}\varepsilon_{\beta\gamma\mu}\Phi_{,\varepsilon\gamma}\Phi_{,\mu\delta} + \frac{1}{p^2}\varepsilon_{\delta\beta\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\Phi_{\varepsilon\gamma}\Phi_{\mu\delta} -$$
$$- \frac{1}{2p^2}\Phi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2p^2}\Phi_{,\beta}\varphi_{,\alpha} + \frac{1}{p^2}\delta_{\alpha\beta}\Phi_{,\gamma}\varphi_{,\gamma}$$

$$\left(-\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta,\gamma} + \overset{(2)}{I}_{\alpha\delta\gamma} \right) \left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta,\delta} + \overset{(2)}{I}_{\gamma\beta\delta} \right) = \varepsilon_{\alpha\delta\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\beta\mu}\Phi_{\varepsilon\gamma}\Phi_{,\mu\delta} + \frac{1}{2p^2}\delta_{\alpha\beta}\varphi^2$$

tras hacer alguna simplificación (59) queda

$$\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)} - \overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{p^2}\Phi_{,\gamma\alpha}\Phi_{,\gamma\beta} + \frac{1}{p^2}\Phi_{,\gamma}\Phi_{,\gamma\alpha\beta} + \frac{1}{2p^2}\delta_{\alpha\beta}\varphi^2 + \frac{1}{p^2}\varepsilon_{\alpha\delta\varepsilon}\varepsilon_{\beta\gamma\mu}\Phi_{,\varepsilon\gamma}\Phi_{,\mu\delta} -$$
$$- \frac{1}{2p^2}\Phi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2p^2}\Phi_{,\beta}\varphi_{,\alpha} + \frac{1}{p^2}\delta_{\alpha\beta}\Phi_{,\gamma}\varphi_{,\gamma}.$$

Igualando α y β la anterior expresión es

$$\overset{(4)}{R}_{(\mu\mu)} - \overset{(4)}{P}_{(\mu\mu)} = \frac{2}{p^2}\Phi_{,\gamma\mu}\Phi_{,\gamma\mu} + \frac{3}{p^2}\Phi_{,\gamma}\varphi_{,\gamma} + \frac{1}{2p^2}\varphi^2,$$

ya estamos en condiciones de calcular la función

$$\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)} = \left[\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)} - \overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)} \right] - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{pq}\left[\overset{(4)}{R}_{(pq)} - \overset{(4)}{P}_{(pq)} \right] = \left[\overset{(4)}{R}_{(\alpha\beta)} - \overset{(4)}{P}_{(\alpha\beta)} \right] - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left[\overset{(4)}{R}_{(\mu\mu)} - \overset{(4)}{P}_{(\mu\mu)} \right],$$

puesto que como ya demostramos

$$\overset{(4)}{R}_{00} - \overset{(4)}{P}_{00} = 0.$$

La condición de integrabilidad que produciría la parte electromagnética de la ecuación de movimiento es

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \overset{(4)}{\Omega''}{}_{(\alpha\beta)}\, dS_\beta$$

al igual que en casos anteriores vamos a considerar por razón de simplicidad solamente dos partículas, siendo Σ_1 la superficie esférica que engloba a la partícula 1.

Es posible hacer la descomposición

$$\overset{(4)}{\Omega''}{}_{(\alpha\beta)} = \overset{(4)}{F}{}_{\alpha\beta\delta,\delta} + \overset{(4)}{S}{}_{\alpha\beta}$$

donde

$$\begin{aligned}
\overset{(4)}{F}{}_{\alpha\beta\delta} &= \frac{1}{p^2}\delta_{\alpha\delta}\Phi_{,\gamma\beta}\Phi_{,\gamma} - \frac{1}{p^2}\delta_{\alpha\beta}\Phi_{,\gamma\delta}\Phi_{,\gamma} - \frac{1}{2p^2}\delta_{\alpha\delta}\varphi_{,\beta}\Phi + \frac{1}{2p^2}\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\delta}\Phi \\
\overset{(4)}{S}{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4p^2}\delta_{\alpha\beta}\varphi^2 - \frac{1}{2p^2}\Phi_{,\beta}\varphi_{,\alpha} + \frac{1}{2p^2}\varphi_{,\alpha\beta}\Phi
\end{aligned} \qquad (89)$$

como se puede comprobar por cálculo directo, teniendo en cuenta que como φ es una función armónica $\varphi_{,\gamma\gamma} = 0$.

Se tiene la propiedad

$$\overset{(4)}{F}{}_{\alpha\beta\delta} = -\overset{(4)}{F}{}_{\alpha\delta\beta} \quad \Rightarrow \quad \overset{(4)}{F}{}_{\alpha\beta\delta,\delta\beta} = 0 \qquad (90)$$

$\overset{(4)}{F}{}_{\alpha\beta\delta,\delta}$ es un rotacional y por tanto su integral de superficie es nula por el teorema de Stokes

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \overset{(4)}{F}{}_{\alpha\beta\delta,\delta}\, dS_\beta = 0$$

además por (90) y por el teorema de Gauss se encuentra que la integral anterior no depende de la superficie de integración.

Por lo tanto la condición de integrabilidad viene dada solamente por la integral de $S_{\alpha\beta}$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \overset{(4)}{\Omega''}{}_{(\alpha\beta)}\, dS_\beta = \oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \overset{(4)}{S}{}_{\alpha\beta}\, dS_\beta . \qquad (91)$$

Se comprueba por cálculo directo que

$$S_{\alpha\beta,\beta} = 0$$

lo que significa que la integral (91) no depende de la superficie de integración, o más concretamente, no puede depender de la coordenada *r*. Entonces, como utilizamos coordenadas esféricas, sólo es necesario considerar en el integrando de (91) aquellos términos que dependan de la inversa de r^2, los restantes términos deben anularse entre sí, pues dependerían de *r*, lo cual no puede ser.

3-J. Ecuación de movimiento

La corrección a la ecuación de movimiento de la Relatividad General viene de la integral (91). Para hacer esta operación vamos a suponer la existencia de dos partículas, la 1 y la 2, que tienen de cargas y masas m_1, m_2, q_1, q_2. El límite de integración será la superficie esférica Σ_1 centrada en la partícula 1, la situación de las partículas será la dada en la ilustración 1. De esta forma obtendremos la corrección a la ecuación de movimiento de la partícula 1. Procediendo de igual manera pero integrando respecto a una superficie centrada en la partícula 2, obtendremos la corrección de la ecuación de movimiento de esa partícula.

Para desarrollar la segunda función (89) partimos de

$$\Phi = \frac{a}{r} + br + er^2 + f$$

donde *a*, *b*, *e* y *f* son constantes que pueden depender de la carga eléctrica de la partícula. Según hemos visto

$$\varphi = \Phi_{,\gamma\gamma} = \frac{2b}{r} + 6e,$$

y finalmente

$$\varphi_{,\alpha} = -2b\frac{x^\alpha}{r^3}; \quad \varphi_{,\alpha\beta} = -2b\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^3} + 6b\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}; \quad \Phi_{,\beta} = -a\frac{x^\beta}{r^3} + b\frac{x^\beta}{r} + 2ex^\beta .$$

Vamos a calcular la primera de las tres integrales (89), es decir

$$\frac{1}{4p^2}\oiint_{\Sigma_1}\delta_{\alpha\beta}\varphi^2 dS_\beta = \frac{1}{4p^2}\oiint_{\Sigma_1}\varphi^2 dS_\alpha$$

como estamos considerando dos partículas

$$\varphi^2 = \left(\frac{2b}{r} + 6e + \frac{2b'}{r'} + 6e'\right)\left(\frac{2b}{r} + 6e + \frac{2b'}{r'} + 6e'\right)$$

r' tiene el significado dado en la ilustración 1. El único término de la anterior expresión que genera términos que dependen de la inversa de r^2 es

$$\frac{4b^2}{r^2}$$

y su integral es

$$\frac{1}{4p^2}\oiint_{\Sigma_1}\frac{4b^2}{r^2}dS_\alpha = \frac{1}{p^2}\oiint_{\Sigma_1}\frac{b^2}{r^2}\frac{x^\alpha}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

en la anterior integral $\alpha = 3$ (dada la especial elección de las coordenadas dada en la ilustración 1) porque en caso contrario aparecerían integrales de $\sin\varphi$ o de $\cos\varphi$ que serían nulas, por tan

$$\frac{2\pi b^2}{p^2}\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta d\theta = 0$$

entonces el primer término de $\overset{(4)}{S}_{\alpha\beta}$ no da condiciones de integrabilidad.

El segundo término de la segunda ecuación (85) es

$$\Phi_{,\beta}\varphi_{,\alpha} = \left[-a\frac{x^\beta}{r^3} + b\frac{x^\beta}{r} + 2ex^\beta - a'\frac{x^\beta - \xi^\beta}{r'^3} + b'\frac{x^\beta - \xi^\beta}{r'} + 2e'\left(x^\beta - \xi^\beta\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left(-2b\frac{x^\alpha}{r^3} - 2b'\frac{x^\alpha - \xi^\alpha}{r'^3}\right)$$

los únicos términos que van a producir integrales que dependen de la inversa de r^2 son

$$-a\frac{x^\beta}{r^3}2b'\frac{\xi^\alpha}{r'^3} \to -2ab'\frac{x^\beta}{r^3}\frac{1}{d^2} \quad (\alpha = 3)$$

$$-b\frac{x^\beta}{r}2b\frac{x^\alpha}{r^3} \to -2b^2\frac{x^\beta}{r^3}\cos\theta \quad (\alpha = 3)$$

$$-a'\frac{\xi^\beta}{r'^3}2b\frac{x^\alpha}{r^3} \to -2a'b\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{d^2} \quad (\alpha = 3 \ \ \beta = 3)$$

$$b'\frac{\xi^\beta}{r'}2b\frac{x^\alpha}{r^3} \to 2bb'\frac{1}{r^2}\cos\theta \quad (\alpha = 3 \ \ \beta = 3)$$

$$2e'\xi^\beta 2b\frac{x^\alpha}{r^3} \to 4be'\frac{1}{r^2}d\cos\theta \quad (\alpha = 3 \ \ \beta = 3)$$

las integrales derivadas de las siguientes expresiones son

$$\oiint_{\Sigma_1}-2ab'\frac{x^\beta}{r^3}\frac{1}{d^2}dS_\beta = \oiint_{\Sigma_1}-2ab'\frac{x^\beta}{r^3}\frac{1}{d^2}\frac{x^\beta}{r}\sin\theta d\theta d\varphi = -8\pi\frac{ab'}{d^2}$$

$$\oiint_{\Sigma_1}-2b^2\frac{x^\beta}{r^3}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}\sin\theta d\theta d\varphi = -2b^2\oiint_{\Sigma_1}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi = 0$$

$$\oiint_{\Sigma_1}-2a'b\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{d^2}\frac{r\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta d\varphi = -2\frac{a'b}{d^2}\oiint_{\Sigma}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{8\pi}{3}\frac{a'b}{d^2}$$

$$\oiint_{\Sigma_1}2bb'\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta d\varphi = 2bb'\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3}bb'$$

$$\oiint_{\Sigma_1} 4be'\frac{1}{r^2}d\cos\theta\,\frac{r\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta d\varphi = 4be'd\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{16\pi}{3}be'd$$

por tanto de la integral del segundo sumando obtenemos

$$-\frac{1}{2p^2}\left(-8\pi\frac{ab'}{d^2}-\frac{8\pi}{3}\frac{a'b}{d^2}+\frac{8\pi}{3}bb'+\frac{16\pi}{3}be'd\right).$$

Finalmente el tercer sumando de la integral es

$$\varphi_{,\alpha\beta}\Phi = \left[-2b\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^3}+6b\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}-2b'\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r'^3}+6b'\frac{\left(x^\alpha-\xi^\alpha\right)\left(x^\beta-\xi^\beta\right)}{r'^5}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{a}{r}+br+er^2+f+\frac{a'}{r'}+b'r'+e'r'^2+f'\right)$$

los únicos términos que dan integrales que dependen de la inversa de r^2 son

$$-2b\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^3}br \rightarrow -2b^2\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}$$

$$-2b\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^3}\frac{a'}{r'} \rightarrow -2\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$-2b\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^3}b'r' \rightarrow 2bb'\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$-2b\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^3}e'r'^2 \rightarrow 4be'd\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$6b\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}br = 6b^2\frac{x^\beta}{r^3}\cos\theta \quad (\alpha=3)$$

$$6b\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}\frac{a'}{r'} \rightarrow 6\frac{a'b}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta \quad (\alpha=3)$$

$$6b\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}b'r' \rightarrow -6bb'\frac{x^\beta}{r}\cos^2\theta \quad (\alpha=3)$$

$$6b\frac{x^\alpha x^\beta}{r^5}e'r'^2 \rightarrow -12be'd\frac{x^\beta}{r}\cos^2\theta \quad (\alpha=3),$$

donde hemos puesto

$$r' \approx d - r\cos\theta; \qquad r'^2 \approx d^2 - 2rd\cos\theta.$$

y sus integrales

$$\oiint_{\Sigma_1} -2b^2\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = -2b^2\oiint_{\Sigma_1}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi = 0$$

$$\oiint_{\Sigma_1} -2\frac{a'b}{d^2}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = -2\frac{a'b}{d^2}\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{8\pi}{3}\frac{a'b}{d^2}$$

$$\oiint_{\Sigma_1} 2bb'\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = 2bb'\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3}bb'$$

$$\oiint_{\Sigma_1} 4be'd\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = 4be'd\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{16\pi}{3}be'd$$

$$\oiint_{\Sigma_1} 6b^2\frac{x^\beta}{r^3}\cos\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = 6b^2\oiint_{\Sigma_1}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi = 0$$

$$\oiint_{\Sigma_1} 6\frac{a'b}{d^2}\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = 6\frac{a'b}{d^2}\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = 8\pi\frac{a'b}{d^2}$$

$$\oiint_{\Sigma_1} -6bb'\frac{x^\beta}{r}\cos^2\theta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = -6bb'\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = -8\pi bb'$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} -12be'd\frac{x^\beta}{r^3}\cos^2\theta\,\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = -12be'd\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = -16\pi be'd$$

donde se ha puesto $\alpha = 3$ pues en caso contrario la integral es nula. Reuniendo todos los términos, se encuentra que para el tercer sumando de la integral es

$$\frac{1}{2p^2}\left(\frac{16\pi}{3}\frac{a'b}{d^2} - \frac{16\pi}{3}bb' - \frac{32\pi}{3}be'd\right).$$

Con esto resultados encontramos que la integral (63) es

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} \overset{(4)}{S}_{\alpha\beta}\, dS_\beta = \frac{1}{p^2}\left(4\pi\frac{ab'}{d^2} + 4\pi\frac{a'b}{d^2} - 4\pi bb' - 8\pi be'd\right).$$

Si reunimos este resultado con la condición de integrabilidad obtenida en la Relatividad General se obtiene

$$\oint\!\!\!\oint\left[\overset{(4)}{\Omega'}_{(\alpha\beta)} + \overset{(4)}{S}_{(\alpha\beta)}\right]dS_\beta = \frac{8\pi}{c^4}Gm_1\ddot{\eta}_z + \frac{8\pi}{c^4}Gm_1\tilde{\psi}_{2,z} + \frac{1}{p^2}\left(4\pi\frac{ab'}{d^2} + 4\pi\frac{a'b}{d^2} - 4\pi bb' - 8\pi be'd\right) = 0.$$

Ahora hay que ver el valor de las constantes que aparecen en la anterior expresión.Ya habíamos comprobado que

$$b = \frac{1}{2}\frac{k}{c^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q$$

si queremos que la condición de integrabilidad reproduzca la ley de Coulomb es necesario que la constante a sea proporcional a la carga eléctrica, como este es un coeficiente de segundo orden ponemos

$$a = \frac{h}{c^2}q$$

donde h es una constante que tiene que ser negativa, lo que significa que p tiene que ser un número real, entonces $ab' = a'b$. Para obtener la ley de Coulomb es necesario que se cumpla la relación

$$\frac{1}{2}\frac{kh}{p^2G} = -1.$$

La constante e no tienen que depender de la carga eléctrica, pero vamos a suponer que tiene esta dependencia

$$e = \frac{l}{c^2}q$$

definición que tiene en cuenta que e es de segundo orden, l es una constante. Reuniendo todos los resultados se obtiene la ecuación de movimiento

$$m_1\ddot{\eta}_z = -m_1\tilde{\psi}_{2,z} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{d^2} + c_1qq' + c_2qq'd$$

que puesta en notación vectorial queda

$$m_1\boldsymbol{\eta} = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\mathbf{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\mathbf{r} + c_1\frac{qq'}{r}\mathbf{r} + c_2qq'\mathbf{r} \tag{92}$$

donde **r** es el vector que va de la partícula 1 que sufre la fuerza, a la partícula 2 que produce esa fuerza. Como ya sabemos el procedimiento anterior se puede aplicar a la partícula 2, encontrándose una ecuación análoga.

4-J. Interpretación de la ecuación de movimiento

La ecuación (92) además de tener el término gravitatorio de la ley de Newton y el término eléctrico de la ley de Coulomb, contiene dos términos de origen eléctrico desconocidos en la teoría electromagnética. Una de ellas es una fuerza radial constante, repulsiva cuando las cargas tienen el mismo signo. La otra fuerza es proporcional a la distancia y también radial, sin poder especificar el sentido de la fuerza, pues no se sabe cuál es el signo de la constante l.

Las constantes c_1 y c_2 de (92) tienen los valores

$$c_1 = \frac{1}{8}\frac{k^2}{p^2G}\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}; \quad c_2 = \frac{1}{2}\frac{kl}{p^2G}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Las dos fuerzas complementarias que aparecen en (92) tienen que ser extremadamente débiles, lo que explicaría que no son observables. Para ello es necesario que tanto c_1 como c_2 sean constantes muy pequeñas. Esta circunstancia se da cuando

$$p^2 >> \frac{1}{8}\frac{k^2}{G}\frac{1}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}; \quad l \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{k}{4},$$

como puede comprobarse directamente.

Observamos que la fuerza radial constante que aparece en (92) también surgía en la propuesta de Narlikar Rao [15], al igual que lo supuesto aquí, era tan débil que se explicaba que no fuese observable. No obstante, la fuerza proporcional a la distancia que aparece en (92) es exclusiva de la teoría de Klotz que estamos examinando.

K.- MODIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO

1-K. Modificación en las ecuaciones de campo

Ya hemos señalado los problemas que surgen cuando se trata de obtener la ecuación de movimiento de las ecuaciones de campo unitario, ya sea en su versión fuerte como en la débil. Un planteamiento que se ha ensayado es modificar estas ecuaciones, agregándole algún término que nos permita obtener la ecuación de movimiento mediante el método de Einstein-Infeld-Hoffmann [17], [18].

La densidad lagrangiana de la teoría de campo de Einstein es

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} \tag{93}$$

donde R_{ik} es el tensor de Ricci; al variar respecto a la densidad del tensor métrico y de la conexión se obtienen las dos ecuaciones de campo

$$R_{ik} = 0; \quad D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r + \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t\delta_r^k = 0,$$

τ_i es el vector de torsión definido por

$$\tau_i = \Gamma_{is}{}^{s} - \Gamma_{si}{}^{s},$$

si ahora hacemos un cambio de conexión, tal que la nueva conexión tenga asociado un tensor de tensión nulo, encontramos las ecuaciones de campo en su versión débil

$$\begin{aligned} &D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &\tau_i = 0 \\ &R_{(ik)} = 0 \\ &R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[r,i],k} = 0, \end{aligned}$$

de donde se deriva la identidad

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{[ir]} = 0.$$

La idea de Bonnor consiste en agregarle un término a la densidad lagrangiana (93) lo que nos permitirá obtener la correcta ecuación de movimiento en primera aproximación por el método de Einstein-Infeld-Hoffmann. La nueva densidad lagrangiana es

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} + p^2 \boldsymbol{g}^{ik} g_{[ki]}, \tag{94}$$

hay que observar el parecido del término añadido con la densidad lagrangiana del campo electromagnético.

2-K. Ecuaciones de campo

Para obtener las ecuaciones de campo hay que variar (94) tanto con respecto a la densidad del tensor métrico como con respecto a la conexión y posteriormente poner la condición de la nulidad del tensor de tensión. Si ponemos la variación del segundo sumando de (94) como

$$\delta\left(p^2 \boldsymbol{g}^{ik} g_{[ki]}\right) = p^2 U_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik}$$

y teniendo en cuenta que el segundo sumando de (94) no afecta al resultado de la variación respecto a la conexión, se encuentra finalmente las ecuaciones de campo

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = 0$$
$$\tau_i = 0$$
$$R_{(ik)} + p^2 U_{(ik)} = 0$$
$$R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[r,i],k} + p^2 \left\{ U_{[ik],r} + U_{[kr],i} + U_{[r,i],k} \right\} = 0,$$

3-K. Relaciones matemáticas

Vamos a determinar las componentes del tensor U_{ik}, para ello partimos de

$$\delta\left(\boldsymbol{g}^{ik} g_{[ki]}\right) = g_{[ki]} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ik} \delta g_{[ki]}$$

teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{g}^{ik} \delta g_{[ki]} = \left(\boldsymbol{g}^{(ik)} + \boldsymbol{g}^{[ik]}\right) \delta g_{[ki]} = \boldsymbol{g}^{[ik]} \delta g_{[ki]} = \boldsymbol{g}^{[ik]} \delta g_{ki}$$

entonces

$$\delta\left(\boldsymbol{g}^{ik} g_{[ki]}\right) = g_{[ki]} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{[ik]} \delta g_{ki}, \quad (95)$$

ahora es necesario expresar δg_{ki} en función de $\delta \boldsymbol{g}^{ik}$ para poder obtener U_{ik}

$$\delta \boldsymbol{g}^{ik} = \delta \sqrt{g} g^{ik} + \sqrt{g} \delta g^{ik} \quad \Rightarrow \quad g_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik} = 4 \delta \sqrt{g} + \sqrt{g} g_{ik} \delta g^{ik} \tag{96}$$

como

$$\delta \sqrt{g} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{pq} \delta g^{pq} = -\frac{1}{2} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq} + \frac{1}{2} g_{pq} g^{pq} \delta \sqrt{g} \quad \Rightarrow \quad \delta \sqrt{g} = \frac{1}{2} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq},$$

al sustituirlo en (96) queda

$$\sqrt{g} \delta g^{ik} = \delta \boldsymbol{g}^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq}. \tag{97}$$

Ahora vamos a relacionar la variación de las componentes covariantes del tensor métrico con la correspondiente variación de las componentes contravariantes. Variando

$$g_{pq} g^{rq} = \delta_p^r$$

se llega a

$$\delta g_{pt} = -g_{rt} g_{pq} \delta g^{rq},$$

que conjuntamente con la ecuación (97) se llega a

$$\sqrt{g} \delta g_{pt} = -g_{rt} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{rq} + \frac{1}{2} g_{rt} g_{pq} g^{rq} g_{ab} \delta \boldsymbol{g}^{ab}$$

y simplificando

$$\sqrt{g} \delta g_{pq} = -g_{rt} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{rq} + \frac{1}{2} g_{pt} g_{ab} \delta \boldsymbol{g}^{ab}. \tag{98}$$

Ya estamos en condiciones de continuar con la expresión (95). Sustituyendo (98) en (95)

$$\delta\left(\boldsymbol{g}^{ik} g_{[ki]}\right) = g_{[ki]} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{[ik]} \delta g_{ki} = g_{[ki]} \delta \boldsymbol{g}^{ik} - g^{[ik]} g_{ri} g_{kq} \delta \boldsymbol{g}^{rq} + \frac{1}{2} g^{[ik]} g_{ki} g_{ab} \delta \boldsymbol{g}^{ab} =$$
$$= g_{[ki]} \delta \boldsymbol{g}^{ik} - g^{[mn]} g_{im} g_{nk} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \frac{1}{2} g^{[mn]} g_{nm} g_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik} = \left(g_{[ki]} - g^{[mn]} g_{im} g_{nk} + \frac{1}{2} g^{[mn]} g_{nm} g_{ik} \right) \delta \boldsymbol{g}^{ik}$$

por tanto encontramos definitivamente

$$U_{ik} = g_{[ki]} - g^{[mn]} g_{im} g_{nk} + \frac{1}{2} g^{[mn]} g_{nm} g_{ik}. \tag{99}$$

Vamos a continuación a obtener una expresión para la parte simétrica de U_{ik}

$$U_{(ik)} = -\frac{1}{2} g^{[mn]} \left(g_{im} g_{nk} + g_{km} g_{ni} \right) + \frac{1}{2} g^{[mn]} g_{nm} g_{(ik)},$$

desarrollando el primer sumando

$$g^{[mn]} \left(g_{im} g_{nk} + g_{km} g_{ni} \right) = g^{[mn]} \left[\left(g_{(im)} + g_{[im]} \right) \left(g_{(nk)} + g_{[nk]} \right) + \left(g_{(km)} + g_{[km]} \right) \left(g_{(ni)} + g_{[ni]} \right) \right], \quad (100)$$

al multiplicar expresiones antisimétricas en los índices mudos *m* y *n* por expresiones simétricas encontramos un resultado nulo

$$g^{[mn]}g_{(im)}g_{(nk)}+g^{[mn]}g_{(km)}g_{(ni)}=0$$
$$g^{[mn]}g_{[im]}g_{[nk]}+g^{[mn]}g_{[km]}g_{[ni]}=0$$

entonces (100) queda

$$g^{[mn]}\left(g_{im}g_{nk}+g_{km}g_{ni}\right)=g^{[mn]}\left(g_{(im)}g_{[nk]}+g_{(im)}g_{[nk]}+g_{(km)}g_{[ni]}+g_{[km]}g_{(ni)}\right)$$

con lo que concluimos que

$$U_{(ik)}=-\frac{1}{2}g^{[mn]}\left(g_{(im)}g_{[nk]}+g_{[im]}g_{(nk)}+g_{(km)}g_{[ni]}+g_{[km]}g_{(ni)}\right)+\frac{1}{2}g^{[mn]}g_{nm}g_{(ik)}. \tag{101}$$

Ahora vamos a obtener la parte antisimétrica de U_{ik}. Antisimetrizando (99) tenemos

$$U_{[ik]}=g_{[ki]}-\frac{1}{2}g^{[mn]}\left(g_{im}g_{nk}-g_{km}g_{ni}\right)+\frac{1}{2}g^{[mn]}g_{nm}g_{[ik]},$$

al igual que antes desarrollamos el paréntesis de la anterior expresión y encontramos las identidades

$$g^{[mn]}g_{(im)}g_{[nk]}-g^{[mn]}g_{[km]}g_{(ni)}=0$$
$$g^{[mn]}g_{[im]}g_{(nk)}-g^{[mn]}g_{(km)}g_{[ni]}=0$$

entonces nos queda

$$U_{[ik]}=g_{[ki]}-\frac{1}{2}g^{[mn]}\left(g_{(im)}g_{(nk)}+g_{[im]}g_{[nk]}-g_{(km)}g_{(ni)}-g_{[km]}g_{[ni]}\right)+\frac{1}{2}g^{[mn]}g_{nm}g_{[ik]}. \tag{102}$$

4-K. Relación entre las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico

Si descomponemos el tensor métrico en parte simétrica y antisimétrica

$$g_{ik}=g_{(ik)}+g_{[ik]}=a_{ik}+b_{ik}$$

se deduce ([1], pp- 25-33) que su determinante es

$$g=a+b+\frac{a}{2}a^{im}a^{kr}b_{mr}b_{ik} \tag{103}$$

donde *a* y *b* son los determinantes de a_{ik} y b_{ik} respectivamente; a^{ik} es definido por la condición

$$a^{ir}a_{ik}=\delta_k^r.$$

Calculando la derivada del determinante del tensor métrico

$$dg=gg^{ik}dg_{ik}=gg^{[ik]}da_{ik}+gg^{(ik)}db_{ik}\quad\Rightarrow\quad g^{[ik]}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial b_{ik}}. \tag{104}$$

De (56)

$$\frac{\partial g}{\partial b_{pq}}=\frac{\partial b}{\partial b_{pq}}+\frac{a}{2}a^{im}a^{kr}\frac{\partial}{\partial b_{pq}}\left(b_{mr}b_{ik}\right)=\frac{\partial b}{\partial b_{pq}}+aa^{im}a^{kr}\delta_m^p\delta_r^q b_{ik}=\frac{\partial b}{\partial b_{pq}}+aa^{ip}a^{kq}b_{ik}$$

como *b* es de cuarto orden respecto a b_{ik}, podemos despreciar su derivada que será de tercer orden respecto a b_{ik}, cantidades que son al menos de segundo orden respecto a la inversa de *c*, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial b_{pq}}=aa^{ip}a^{kq}b_{ik}\approx a\eta^{ip}\eta^{kq}b_{ik}$$

donde la derivada está calculada a segundo orden o superior. Al mismo orden, por (104) tenemos

$$g^{[ik]}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial b_{ik}}\approx\eta^{ip}\eta^{kq}b_{pq}$$

ya que al menor orden, es decir orden 0, $g=a$. De la anterior expresión encontramos

$$\overset{(2)}{g}{}^{[\alpha\beta]}=\overset{(2)}{b}{}_{\alpha\beta}$$
$$\overset{(2)}{g}{}^{[0\alpha]}=-\overset{(2)}{b}{}_{0\alpha},$$

relaciones matemáticas que usaremos posteriormente.

5-K. Cálculo de U_{ik} en función de b_{ik}

De la ecuación (102) se puede obtener las componentes $U_{[\alpha\beta]}$ a segundo orden

$$\overset{(2)}{U}_{[\alpha\beta]}=\overset{(2)}{g}_{[\beta\alpha]}-\frac{1}{2}\overset{(2)}{g}{}^{[mn]}\left(\delta_{\alpha m}\delta_{n\beta}-\delta_{\beta m}\delta_{n\alpha}\right)=-2\overset{(2)}{g}_{[\alpha\beta]}=-2\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta},$$

mientras que las componentes $U_{[0\alpha]}$ a tercer orden

$$\overset{(3)}{U}_{[0\alpha]}=-\overset{(3)}{b}_{0\alpha}.$$

las componentes 0,0 a cuarto orden se obtienen de (101)

$$\overset{(4)}{U}_{00}=-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta}.$$

En cuanto a las componentes simétricas de $U_{\alpha\beta}$ a cuarto orden se deriva de (101)

$$\overset{(4)}{U}_{(\alpha\beta)}=2\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}, \tag{105}$$

todas las demás componentes a orden menor de cuatro son nulas. (105) va a ser expresión que vamos a utilizar para el cálculo de la ecuación de movimiento.

6-K. Condición de integrabilidad

Seguimos para definir la condicion de integrabildiad de donde se deducirán las ecuaciones de movimiento, las mismas técnicas ya utilizadas en el método de Einstein-Infeld-Hoffmann. Primeramente hacemos el cálculo

$$\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}=\overset{(4)}{U}_{(\alpha\beta)}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{pq}\overset{(4)}{U}_{(pq)}$$

o desarrollando

$$\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}=\overset{(4)}{U}_{(\alpha\beta)}+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(-U_{\gamma\gamma}+U_{00}\right)$$

para lo que previamente calculamos

$$\overset{(4)}{U}_{(\gamma\gamma)}=-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta};\qquad \overset{(4)}{U}_{00}=-\frac{1}{2}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta},$$

al simplificar resulta

$$\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}=\overset{(4)}{U}_{(\alpha\beta)}=2\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}.$$

La condición de integrabilidad es la expresión (55) pero con el añadido de $\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}$, es decir

$$\oiint\left[\overset{(4)}{\Omega'}_{(\alpha\beta)}+\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}+\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}\right]dS_{\beta}=0$$

como ya sabemos, la primera integral reproduce la ecuación de movimiento en un campo gravitatorio, la segunda integral es idénticamente nula como hemos visto, por tanto la parte electromagnético debe estar en la tercera de las integrales.

7-K. Cálculo de la integral

Introduciendo el potencial φ tenemos

$$\begin{aligned}\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}=2\overset{(2)}{b}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{b}_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}\overset{(2)}{b}_{\gamma\delta}&=\varepsilon_{\alpha\gamma\mu}\varphi_{,\mu}\varepsilon_{\gamma\beta\nu}\varphi_{,\nu}+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta\mu}\varphi_{,\mu}\varepsilon_{\gamma\delta\nu}\varphi_{,\nu}=\\&=2\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}-\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu}\end{aligned} \tag{106}$$

donde hemos utilizado para simplificar la expresión anterior la identidad

$$\varepsilon_{\delta\gamma\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}=-\delta_{\delta\alpha}\delta_{\varepsilon\mu}+\delta_{\delta\mu}\delta_{\varepsilon\alpha}.$$

De (106) es fácil comprobar que

$$\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta),\beta}=0,$$

entonces la integral

$$\oiint_{\Sigma_1}\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}dS_\beta=\oiint_{\Sigma_1}\left(2\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}-\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu}\right)dS_\beta \tag{107}$$

no depende de la superficie de integración, es decir no depende de r, por tanto sólo las partes del integrando que dependan de la inversa del cuadrado de r tienen que ser consideradas.

Como hemos hecho en casos anteriores, elegimos un sistema compuesto exclusivamente por dos partículas que en el momento de hacer la integración están dispuestas como indica la ilustración 1 (página 30). Elegimos una superficie esférica Σ_1 de radio r en torno a la partícula 1. La primera de las integrales (107) es

$$2\oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}dS_\beta=2\frac{k^2}{c^4}\oiint_{\Sigma_1}\left(\phi_{1,\alpha}+\phi_{2,\alpha}\right)\left(\phi_{1,\beta}+\phi_{2,\beta}\right)dS_\beta=$$

$$=2\frac{k^2}{c^4}\oiint_{\Sigma}\left(-\frac{x^\alpha}{r^3}-\frac{x^\alpha-\xi^\alpha}{r'^3}\right)\left(-\frac{x^\beta}{r^3}-\frac{x^\beta-\xi^\beta}{r'^3}\right)dS_\beta\to 2\frac{k^2}{c^4}\oiint_{\Sigma_1}\left(-\frac{x^\alpha}{r^3}\frac{\xi^\beta}{r'^3}-\frac{x^\beta}{r^3}\frac{\xi^\alpha}{r'^3}\right)dS_\beta$$

donde sólo hemos tenido en cuenta los integrales cuyos integrandos dependan de la inversa del cuadrado de r. Siguiendo las técnicas ya varias veces expuestas se llega al resultado

$$2\oiint_{\Sigma_1}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}dS_\beta=\frac{k^2}{c^4}\left(-\frac{8\pi}{3d^2}-\frac{8\pi}{d^2}\right)$$

donde $\alpha=3$ y en caso contrario el resultado es nulo. En cuanto a la segunda integral de (107) tenemos

$$\oiint_{\Sigma_1}-\delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\mu}dS_\beta=\frac{k^2}{c^4}\frac{8\pi}{3d^2}$$

finalmente encontramos

$$\oiint_{\Sigma_1}\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}dS_\beta=-\frac{k^2}{c^4}\frac{8\pi}{d^2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{8\pi}{c^4}\frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2}$$

como

$$\oiint\left[\overset{(4)}{\Omega'}_{(\alpha\beta)}+\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}+p^2\overset{(4)}{\overset{*}{U}}_{(\alpha\beta)}\right]dS_\beta=0$$

y teniendo en cuenta que $\overset{(4)}{\Omega''}_{(\alpha\beta)}$ no da ninguna condición de integrabilidad y por (55) tenemos

$$m_1\ddot{\eta}_z+m_1\tilde{\psi}_{2,z}-\frac{p^2k^2}{4\pi\varepsilon_0G}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2}=0$$

para reproducir la ley de Coulomb es necesario que la constante p sea

$$p^2=\frac{4\pi\varepsilon_0G}{k^2}.$$

Volvemos a recordar que en la aproximación que estamos considerando no es posible obtener la fuerza de origen magnético que actúa sobre una carga eléctrica en movimiento, tal como aparece en la ley de Lorentz, ya que la intensidad de campo magnético **B** es de segundo orden respecto a la inversa de c y la ecuación de movimiento que encontramos es de orden 0.

L.- ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN LA TEORÍA DE CAMPO ASIMÉTRICO DE EINSTEIN CON VERSIÓN DE TORSIÓN NO NULO

1-L.Las ecuaciones de campo unificado asimétrico de Einstein con vector de torsión no nulo

Si tomamos como densidad lagrangiana la expresión

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}$$

y variamos la correspondiente acción tanto respecto a la conexión como respecto a la densidad del tensor métrico, tomadas todas estas componentes como independientes, se llega a las dos ecuaciones de campo [1]

$$\begin{aligned}&\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{tk}\Gamma_{tr}^{\;\;i}+\boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{rt}^{\;\;k}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rt}^{\;\;t}-\left(\partial_t\boldsymbol{g}^{it}+\boldsymbol{g}^{tp}\Gamma_{tp}^{\;\;i}\right)\delta_r^k=0\\&R_{ik}=0.\end{aligned}\tag{108}$$

Con carácter general se tiene

$$\begin{aligned}D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}&=\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\;\;i}+\boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\;\;k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\left(\Gamma_{sr}^{\;\;s}+\Gamma_{rs}^{\;\;s}\right)=\\&=\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\;\;i}+\boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\;\;k}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rs}^{\;\;s}+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s},\end{aligned}\tag{109}$$

si ahora contraemos r y k queda

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}=\partial_r\boldsymbol{g}^{ir}+\boldsymbol{g}^{sr}\Gamma_{sr}^{\;\;i}-\boldsymbol{g}^{ir}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s},\tag{110}$$

si contraemos los índices r e i en la ecuación (109) llegamos a

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}=\partial_r\boldsymbol{g}^{ri}+\boldsymbol{g}^{rs}\Gamma_{rs}^{\;\;i}+\boldsymbol{g}^{ri}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s},$$

por tanto de las dos últimas expresiones encontramos

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}-D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}=2\partial_r\boldsymbol{g}^{[ir]}-\boldsymbol{g}^{(ir)}\tau_r\tag{111}$$

ecuación válida en general, se cumplan o no las ecuaciones de campo (108). Nótese que

$$\tau_r=\Gamma_{rs}^{\;\;s}-\Gamma_{sr}^{\;\;s}.$$

Al aplicar (110) a la primera ecuación (108) tenemos

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s}-D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}}\delta_r^k-\boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{[ts]}^{\;\;\;s}\delta_r^k=0.\tag{112}$$

Si lo que ahora hacemos es contraer r e i en (112) encontramos

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}-\boldsymbol{g}^{ri}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s}-D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}-\boldsymbol{g}^{ir}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s}=0.$$

si comparamos esta ecuación, derivada de las ecuaciones de campo (108), con la ecuación de carácter general (111) encontramos

$$\partial_r\boldsymbol{g}^{[ir]}=0\tag{113}$$

que aparece como una ecuación derivada de las ecuaciones de campo (108). Anotemos que (113) no implica la anulación del vector de torsión.

Si contraemos r y k en (112) encontramos

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}=-\frac{5}{3}\boldsymbol{g}^{ir}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s},$$

al insertar esta ecuación en (112) se halla

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{[rs]}^{\;\;\;s}-\frac{2}{3}\boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{[ts]}^{\;\;\;s}\delta_r^k=\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r-\frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t\delta_r^k\tag{114}$$

que cabe entenderla como otra forma de la primera de las ecuaciones de campo (108).

Resumiendo, la teoría de campo unificado asimétrico de vector de torsión no nulo se puede expresar a partir de las dos ecuaciones de campo

$$\begin{aligned}&D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r-\frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t\delta_r^k\\&R_{ik}=0,\end{aligned}\tag{115}$$

de las que se deriva la ecuación

$$\partial_r\boldsymbol{g}^{[ir]}=0.\tag{116}$$

La primera ecuación (115) cabe ponerla en función de la conexión, para ello tenemos presente (110) y la definición de vector de torsión, encontrándose el resultado

$$\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\;\;i}+\boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\;\;k}-\boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\;\;s}+\frac{1}{3}\delta_r^k\boldsymbol{g}^{it}\left(\Gamma_{ts}^{\;\;s}-\Gamma_{st}^{\;\;s}\right)=0$$

al mutiplicar la anterior expresión por $g_{iq}g_{pk}$ se encuentra

$$g_{iq}g_{pk}g^{ik}\partial_r\sqrt{g}=-\sqrt{g}g_{iq}g_{pk}\partial_r g^{ik}+g_{iq}g_{pk}\left[-\mathbf{g}^{sk}\Gamma_{sr}{}^{i}-\mathbf{g}^{is}\Gamma_{rs}{}^{k}+\mathbf{g}^{is}\Gamma_{rs}{}^{s}-\frac{1}{3}\delta_r^k\mathbf{g}^{it}\left(\Gamma_{ts}{}^{s}-\Gamma_{st}{}^{s}\right)\right],$$

al simplificar queda

$$\frac{1}{\sqrt{g}}g_{pq}\partial_r\sqrt{g}=\partial_r g_{pq}-g_{sq}\Gamma_{pr}{}^{s}-g_{ps}\Gamma_{rq}{}^{s}+g_{pq}\Gamma_{rs}{}^{s}-\frac{1}{3}g_{pr}\left(\Gamma_{qs}{}^{s}-\Gamma_{sq}{}^{s}\right),\qquad(117)$$

si ahora multiplicamos toda la expresión anterior por g^{pq} queda después de simplificar

$$g^{pq}\partial_r g_{pq}=-\frac{2}{3}\Gamma_{sr}{}^{s}+\frac{8}{3}\Gamma_{rs}{}^{s}$$

a partir de esta expresión calculamos que

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_r\sqrt{g}=-\frac{1}{3}\Gamma_{sr}{}^{s}+\frac{4}{3}\Gamma_{rs}{}^{s}.$$

Insertando este último resultado en (117) encontramos tras la simplificación

$$\partial_r g_{pq}-g_{sq}\Gamma_{pr}{}^{s}-g_{ps}\Gamma_{rq}{}^{s}+\frac{1}{3}g_{pq}\left(\Gamma_{sr}{}^{s}-\Gamma_{rs}{}^{s}\right)+\frac{1}{3}g_{pr}\left(\Gamma_{sq}{}^{s}-\Gamma_{qs}{}^{s}\right)=0\qquad(118)$$

que es equivalente a la primera ecuación de campo (108).

2-L. Cálculo del coeficiente $N_{ik}{}^{r}$

La conexión la descomponemos

$$\Gamma_{ik}{}^{r}=L_{ik}{}^{r}+M_{ik}{}^{r}$$

donde $L_{ik}{}^{r}$ son los símbolos de Christoffel calculados con la parte simétrica del tensor métrico. Al insertar esta ecuación en (118) y descomponer el tensor métrico en parte simétrica a_{ik} y antisimétrica b_{ik} tenemos [19]

$$\begin{gathered}D_r^*a_{pq}+D_r^*b_{pq}-a_{sq}M_{pr}{}^{s}-a_{ps}M_{rq}{}^{s}-b_{sq}M_{pr}{}^{s}-b_{ps}M_{rq}{}^{s}+\\+\frac{2}{3}\left(a_{pq}+b_{pq}\right)M_{[sr]}{}^{s}+\frac{2}{3}\left(a_{pr}+b_{pr}\right)M_{[sq]}{}^{s}=0\end{gathered}\qquad(119)$$

D^* representa la derivada covariante calculada con los símbolos de Christoffel, por tanto tenemos

$$D_r^*a_{pq}=0.$$

Con el anterior resultado (119) queda

$$\begin{gathered}D_r^*b_{pq}-a_{sq}M_{pr}{}^{s}-a_{ps}M_{rq}{}^{s}-b_{sq}M_{pr}{}^{s}-b_{ps}M_{rq}{}^{s}+\\+\frac{2}{3}a_{pq}M_{[sr]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{pq}M_{[sr]}{}^{s}+\frac{2}{3}a_{pr}M_{[sq]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{pr}M_{[sq]}{}^{s}=0\end{gathered}$$

podemos obtener otras dos ecuaciones como la anterior rotando los tres índices y obtenemos las tres ecuciones

$$\begin{gathered}D_r^*b_{pq}-a_{sq}M_{pr}{}^{s}-a_{ps}M_{rq}{}^{s}-b_{sq}M_{pr}{}^{s}-b_{ps}M_{rq}{}^{s}+\\+\frac{2}{3}a_{pq}M_{[sr]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{pq}M_{[sr]}{}^{s}+\frac{2}{3}a_{pr}M_{[sq]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{pr}M_{[sq]}{}^{s}=0\\D_q^*b_{rp}-a_{sp}M_{rq}{}^{s}-a_{rs}M_{qp}{}^{s}-b_{sp}M_{rq}{}^{s}-b_{rs}M_{qp}{}^{s}+\\+\frac{2}{3}a_{rp}M_{[sq]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{rp}M_{[sq]}{}^{s}+\frac{2}{3}a_{rq}M_{[sp]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{rq}M_{[sp]}{}^{s}=0\\D_p^*b_{qr}-a_{sr}M_{qp}{}^{s}-a_{qs}M_{pr}{}^{s}-b_{sr}M_{qp}{}^{s}-b_{qs}M_{pr}{}^{s}+\\+\frac{2}{3}a_{qr}M_{[sp]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{qr}M_{[sp]}{}^{s}+\frac{2}{3}a_{qp}M_{[sr]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{qp}M_{[sr]}{}^{s}=0,\end{gathered}$$

ahora sumamos las dos primeras y restamos la tercera, encontrando

$$\begin{gathered}D_r^*b_{pq}+D_q^*b_{rp}-D_p^*b_{qr}-2a_{ps}M_{rq}{}^{s}-2b_{sq}M_{pr}{}^{s}-2b_{rs}M_{qp}{}^{s}+\\+\frac{4}{3}a_{rp}M_{[sq]}{}^{s}+\frac{4}{3}b_{pq}M_{[sr]}{}^{s}+\frac{4}{3}b_{rq}M_{[sp]}{}^{s}=0\end{gathered}$$

si sumamos y restamos $2D_p^*b_{qr}$ y introducimos la función definida como

$$I_{rqp}=\frac{1}{2}\left(D_r^{*}b_{qp}+D_p^{*}b_{rq}+D_q^{*}b_{pr}\right)$$

encontramos

$$a_{ps}M_{rq}{}^{s}-\frac{2}{3}a_{rp}M_{[sq]}{}^{s}=D_p^{*}b_{rq}-I_{rqp}-b_{sq}M_{pr}{}^{s}-b_{rs}M_{qp}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{pq}M_{[sr]}{}^{s}+\frac{2}{3}b_{rq}M_{[sp]}{}^{s}$$

multiplicando ambos miembros por a^{pn} y definiendo el nuevo tensor

$$N_{rq}{}^{n}=M_{rq}{}^{n}-\frac{2}{3}\delta_r^n M_{[sq]}{}^{s} \tag{120}$$

se llega finalmente a

$$N_{rq}{}^{n}=a^{pn}\left(D_p^{*}b_{rq}-I_{rqp}-b_{sq}N_{pr}{}^{s}-b_{rs}N_{qp}{}^{s}\right) \tag{121}$$

que es idéntica a (26) con tal de sustituir las $N_{ik}{}^{r}$ por las $M_{ik}{}^{r}$. La ecuación (121) nos va a permitir hallar los términos del desarrollo del tensor $N_{ik}{}^{r}$.

Hay que anotar que el tensor $M_{ik}{}^{r}$ está relacionado con el vector de torsión; en efecto

$$\tau_r=\Gamma_{rs}{}^{s}-\Gamma_{sr}{}^{s}=M_{rs}{}^{s}-M_{sr}{}^{s}=2M_{[rs]}{}^{s}$$

donde hemos tenido en cuenta que los símbolos de Christoffel son simétricos. Como el vector de torsión es distinto de cero en la teoría que examinamos, se cumplirá que

$$N_{ik}{}^{r}\neq M_{ik}{}^{r}$$

si el vector de torsión fuera nulo entonces $N_{ik}{}^{r}$ y $M_{ik}{}^{r}$ serían idénticos.

3-L. Desarrollo en serie de potencias de $N_{ik}{}^{r}$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartdo 2-F se encuentran los primeros términos del desarrollo de $N_{ik}{}^{r}$ utilizando (121). Los términos a segundo orden son

$$\overset{(2)}{N}_{00}{}^{0}=0;\quad \overset{(2)}{N}_{00}{}^{\alpha}=0;\quad \overset{(2)}{N}_{0\alpha}{}^{0}=0;\quad \overset{(2)}{N}_{0\beta}{}^{\alpha}=0;\quad \overset{(2)}{N}_{\beta 0}{}^{\alpha}=0;\quad \overset{(2)}{N}_{\alpha\beta}{}^{0}=0;\quad \overset{(2)}{N}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=-\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}+\overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{122}$$

los de tercer orden

$$\begin{gathered}\overset{(3)}{N}_{00}{}^{0}=0;\quad \overset{(3)}{N}_{00}{}^{\alpha}=0;\quad \overset{(3)}{N}_{0\beta}{}^{\alpha}=-\overset{(3)}{b}_{0\beta,\alpha}+\overset{(3)}{I}_{0\beta\alpha};\quad \overset{(3)}{N}_{\beta 0}{}^{\alpha}=-\overset{(3)}{b}_{\beta 0,\alpha}+\overset{(3)}{I}_{\beta 0\alpha}\\ \overset{(3)}{N}_{\alpha\beta}{}^{0}=\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,0}-\overset{(3)}{I}_{\alpha\beta 0};\quad \overset{(3)}{N}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=0;\quad \overset{(3)}{N}_{\alpha 0}{}^{0}=0;\quad \overset{(3)}{N}_{0\alpha}{}^{0}=0.\end{gathered} \tag{123}$$

Finalmente los términos de cuarto orden son

$$\begin{gathered}\overset{(4)}{N}_{00}{}^{0}=0;\quad \overset{(4)}{N}_{00}{}^{\alpha}=0;\quad \overset{(4)}{N}_{0\alpha}{}^{0}=b_{0\alpha,0};\quad \overset{(4)}{N}_{\alpha 0}{}^{0}=b_{\alpha 0,0};\quad \overset{(4)}{N}_{\alpha\beta}{}^{0}=0;\quad \overset{(4)}{N}_{0\beta}{}^{\alpha}=0\\ \overset{(4)}{N}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=-\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}_{\beta\gamma}{}^{\delta}+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{L}_{\alpha\gamma}{}^{\delta}+\overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}+\overset{(2)}{I}_{\beta\gamma\delta}\right)+\\ +\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}+\overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta}\right)+\overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon}-\overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\varepsilon}\right),\end{gathered} \tag{124}$$

la segunda de las expresiones anteriores se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{gathered}\overset{(4)}{N}_{(\alpha\beta)}{}^{\gamma}=\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\beta\gamma,\delta}+\overset{(2)}{I}_{\beta\gamma\delta}\right)+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\left(-\overset{(2)}{b}_{\gamma\alpha,\delta}+\overset{(2)}{I}_{\gamma\alpha\delta}\right)\\ \overset{(4)}{N}_{[\alpha\beta]}{}^{\gamma}=-\overset{(4)}{b}_{\alpha\beta,\gamma}+\overset{(2)}{b}_{\alpha\delta}\overset{(2)}{L}_{\beta\gamma}{}^{\delta}+\overset{(2)}{b}_{\delta\beta}\overset{(2)}{L}_{\alpha\gamma}{}^{\delta}+\overset{(4)}{I}_{\alpha\beta\gamma}+\overset{(2)}{a}{}^{\gamma\varepsilon}\left(\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\varepsilon}-\overset{(2)}{I}_{\alpha\beta\varepsilon}\right).\end{gathered} \tag{125}$$

4-L. Ecuaciones de campo

La primera de las ecuaciones de campo (115) nos permite determinar la conexión afín en función de las componentes del tensor métrico y sus derivadas. De esta primera ecuación hemos determinado las expresiones para el tensor $N_{ik}{}^{r}$ del que podemos determinar los valores de $M_{ik}{}^{r}$. Notemos al respecto que cada uno de los tres conjuntos de ecuaciones (122), (123) y (124) está formado por 64 ecuaciones con 64 incógnitas, que son las

$M_{ik}^{\ \ r}$.

Ahora nos vamos a centrar en la segunda de las ecuaciones (115). Vamos a definir una nueva conexión afín

$$\Gamma^{*\ r}_{ik} = L_{ik}^{\ \ r} + N_{ik}^{\ \ r} = L_{ik}^{\ \ r} + M_{ik}^{\ \ r} - \frac{2}{3}\delta_i^r M_{[sk]}^{\ \ \ s} = \Gamma_{ik}^{\ \ r} - \frac{2}{3}\delta_i^r M_{[sk]}^{\ \ \ s}, \tag{126}$$

al definir el tensor de Ricci por la expresión

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ir}^{\ \ r}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ \ r}}{\partial x^r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r}$$

encontramos al sustituir (126)

$$R^*_{ik} = R_{ik} + \frac{2}{3}\left(M_{[sk],i}^{\ \ \ \ s} - M_{[si],k}^{\ \ \ \ s}\right) \tag{127}$$

donde R^*_{ik} es el tensor de Ricci calculado con la conexión estrellada y R_{ik} es el tensor de Ricci pero calculado a partir de la conexión afín $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$. Si usamos el vector de torsión la ecuación de campo (127) queda

$$R^*_{ik} = R_{ik} + \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right).$$

La segunda ecuación de campo (115) es $R_{ik} = 0$ o bien

$$R^*_{ik} - \frac{2}{3}\left(M_{[sk],i}^{\ \ \ \ s} - M_{[si],k}^{\ \ \ \ s}\right) = 0$$

que se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$R^*_{(ik)} = 0$$
$$R^*_{[ik]} - \frac{2}{3}\left(M_{[sk],i}^{\ \ \ \ s} - M_{[si],k}^{\ \ \ \ s}\right) = 0$$

o bien

$$R^*_{(ik)} = 0$$
$$R^*_{[ik],r} + R^*_{[kr],i} + R^*_{[ri],k} = 0.$$

Como $N_{ik}^{\ \ r}$ es idéntico a $M_{ik}^{\ \ r}$ calculado en 1-F, el tensor R^*_{ik} es el mismo que el calculado en 4-F y 5-F.

Ahora no es nulo el vector de torsión, pero se cumple (113)

$$\partial_k \boldsymbol{g}^{[ik]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_k \sqrt{g} g^{ik} + \sqrt{g}\partial_r g^{ik} = 0$$

como g es de al menos de orden 0, al igual que g^{pq}, el menor orden, distinto del trivial, de $\partial_k g_{pq}$ es el 2 y el de $g^{[ik]}$ es también el segundo, por tanto para obtener (113) tanto a orden 2 como 3 hay que utilizar

$$\partial_r g^{ik} = 0. \tag{128}$$

Como comprobamos en 4-K

$$g^{[ik]} \approx \eta^{ip}\eta^{kq} b_{pq}$$

entonces (128) se descompone en las dos ecuaciones

$$\overset{(2)}{b}_{\alpha\beta,\beta} = 0; \quad \overset{(3)}{b}_{0\beta,\beta} = 0$$

análogas a las encontrada con la versión fuerte de la teoría de campo unificado asimétrico. El otro conjunto de ecuaciones es la (66) como deducida en el epígrave 1-I.

Por todo lo expuesto concluimos que al aplicar el método de Einstein-Infeld-Hoffaman a la teoría de campo con vector de torsión no nulo no podemos encontrar la ecuación de movimiento de una partícula cargada.

M.- CONCLUSIONES

El propósito de este artículo es la de exponer los diversos intentos realizados para poder deducir la ecuación de movimiento de una partícula cargada a partir de las diversas versiones de la teoría de campo unificado asimétrico de Einstein. El objetivo es obtener en primera aproximación la ecuación de movimiento, es decir, deducir tanto la ley de Newton de la gravitación como la ley de Coulomb, estando la fuerza magnética fuera de nuestro propósito al corresponder a la segunda aproximación.

Hemos comenzado refiriéndonos a la ecuación de movimiento en Relatividad Especial y en Relatividad General, demostrando por varios métodos, que la ecuación de movimiento corresponde a una geodésica en el espacio tiempo. También hemos logrado obtener la ecuación de movimiento de una partícula cargada a partir de la teoría de Einstein-Maxwell, representada por la ecuación de la Relatividad General con el añadido del tensor energía-momento del campo electromagnético.

En el resto de la exposición utilizamos el método desarrollado por Einstein, Infeld y Hoffmann, por el cual las partículas son consideradas como singularidades, es decir, zonas (puntuales o no) donde no es de aplicación las ecuaciones de campo.

Las investigaciones de Infeld [11] y Callaway [14] muestran que el método anterior no funciona, o sea, que no se logra obtener la ecuación de movimiento de una partícula cargada, aunque siempre se deduce la ecuación de movimiento en el campo gravitatorio.

Por tanto es necesario modificar las presupuestos de partida, que son: uso de las versiones débil o fuerte de campo unificado asimétrico; identificación de la parte antisimétrica del tensor métrico con el tensor de campo electromagnético e identificar el potencial electroestático con el potencial coulombiano (dependencia del potencial de la inversa de la distancia).

En nuestra exposición tratamos las diversas teorías que, con más o menos éxito, se han planteado. Narlikar y Rao [14] agregan un término al potencial electroestático que es lineal a la distancia; Klotz y Russell [16] han modificado la identificación de la parte antisimétrica del tensor métrico con el tensor de campo electromagnético; Bonnor [17] añade un término suplementario a la densidad lagrangiana del campo, modificando por consiguiente sus ecuaciones; finalmente, siguiendo una sugerencia de Mishra y Abrol [19], se comprueba que la versión de la teoría de campo unificado asimétrico de vector de torsión no nulo tampoco genera la ecuación de movimiento.

Si bien es cierto que de algunas de las propuestas se puede deducir la ecuación de movimiento en primera aproximación a partir de las ecuaciones de campo, se nota arbitrariedad en las propuestas, establecidas *ad hoc* para resolver el problema en cuestión.

Es interesante recordar el poco impacto que estos resultados negativos tuvieron en Einstein, quien insistía que la materia no podía introducirse en la teoría como una singularidad, puesto que su teoría sólo tendría sentido si era capaz de interpretar a la materia como una solución de campo libre de singularidades. Por otra parte, Einstein creía que, tal vez, las fuerzas electromagnéticas, tendrían una interpretación estadística y que sólo podrían deducirse a partir de soluciones exactas de la teoría de campo.

N.- BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica

1.- SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: «Einstein y las ecuaciones de campo unificado asimétrico», viXra:1602.0297, 2015. En este artículo se encuentra toda la bibliografía original de Einstein y otros investigadores sobre la teoría de campo unificado asimétrico.
Descarga gratuita en: http://vixra.org/abs/1602.0297.

2.- SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *Teoría de campo relativista. Fundamentos físico-matemáticos de los campos físicos*, eWT Ediciones, 2014. En este libro se encuentran los fundamentos del método lagrangiano aplicado a los campos relativistas.
Descarga gratuita de en: https://www.academia.edu/8326920/Teor%C3%ADa_de_campo_relativista.

3.- SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásic de campo*, eWT Ediciones, 2015. Aquí se encuentra un detallada explicación de las bases matemáticas para el estudio de las teorías unificadas relativistas.
Descarga gratuita en: https://independent.academia.edu/WSegura.

4.- WEINBERG, Steven: *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley and Sons, 1972, pp. 43-46. Se calcula el tensor de energía-momento para un sistema de partículas con la ayuda de la función delta de Dirac.

5.- SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *Gravitoelectromagnetismo y principio de Mach*, eWT Ediciones,

2013, pp. 237-239. Se calcula el tensor de energía-momento para un sistema de partículas con la ayuda de la función delta de Dirac.
Descarga gratuita en: https://www.academia.edu/9826657/Gravitoelectromagnetismo_y_principio_de_Mach.

6.- INFELD, Leopold y PLEBANSKI, Jerzy: *Motion and Relativity*, Pergamon Press, 1960, pp. 44-48.

7.- SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: «La teoría de Einstein-Infeld-Hoffmann», viXra:1605.0001, 2016. Descarga gratuita en: http://vixra.org/abs/1605.0001. Contiene referencias a la bibliografía original.

8.- INFELD, L.: «On equations of motion in general Relativity Theory», en *Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité*, Birkhäuser, 1956, pp. 206-209.

9.- WALLACE, P. R.: «Relativistic Equations of Motion in electromagnetic Theory», *American Journal of Mathematics* **63-4** (1941) 729-740.

10.- INFELD, L.; WALLACE, P. R.: «The Equations of Motion in Electrodynamics», *Physical Review* **57** (1940) 797-806.

11.- INFELD, L.: «The new Einstein theory and the equations of motion», *Acta Physica Polonica* **X** (1950) 284-293.

12.- INFELD, Leopold: «The New Einstein Theory and the Equations of Motion», *Nature* **4234** (1950) 1075.»

13.- IKEDA, M.: «On the Approximate Solutions of the Unified Field theory of Einstein and Schrödinger», *Progress of Theorical Physics* **7-1** (1952) 127-128.

14.- CALLAWAY, Joseph: «The Equations of Motion in Einstein's New Unified Field Theory», *Physical Review* **92** (1953) 1567-1570.

15.- NARLIKAR, V.V.; RAO, B. R.: «The equations of motion of particles in the unified field theory of Einstein (1953)», *Proceedings of the National Academy of Sciences India* **21-A-6** (1955) 409-415.

16.- KLOTZ, A. H.; RUSSELL, G. K.: «The equations of motion in Einstein's unified field theory», *Acta Pysica Polonica* **B-3** (1972) 649-657.

17.- BONNOR, W. B.: «The equations of motion in the non-symmetric unified field theory», *Proceedings of the Royal Society of London A* **226** (1954) 366-377.

18.- BONNOR, W. B.: «Les équations du mouvement en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger», *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **15** (1957)133-145.

19.-MISHRA, R. S.; ABROL, M. L.: «Equations of motion in unified field theory I», *Tensor New Series* **10** (1960) 151-160.