INDEX

FIGURES

TABLES

Introduzione

In [6][12] si è esaminata la storia dietro alla congettura RH e sono state introdotte le celebri espressioni di Eulero:

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\prod_{p=prime}(1-p^{-s})^{-1} \qquad (1)$$

E' noto che Riemann giunse, col prolungamento analitico, a due equazioni fondamentali, *l'equazione integrale* della zeta e *l'equazione funzionale* che, nell'ordine, qui ricordiamo:

$$\varsigma(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\oint_{C}\frac{u^{s-1}}{e^{-u}-1}du \qquad (2)$$

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=(s-1)\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} \qquad (3)$$

Dove la *funzione gamma* è definita come:

$$\Gamma(s):=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt=\int_{0}^{\infty}\frac{t^{s}}{e^{-t}}\frac{dt}{t}$$

Tutti gli zeri introdotti dalla funzione gamma per s=-2,-4,... sono chiamati "*zeri banali*"; mentre gli altri zeri sono noti come "*zeri non banali*" della funzione zeta di Riemann.

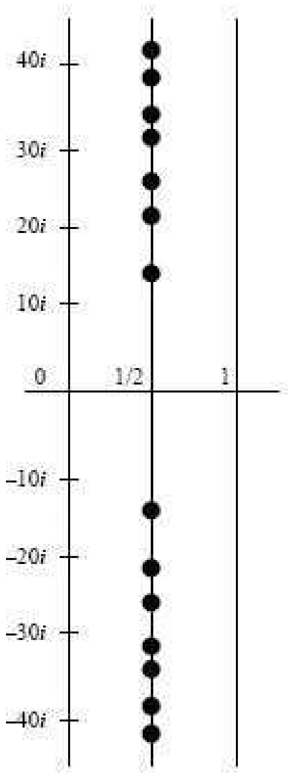
Richiamiamo brevemente quanto affermano le due congetture d'interesse nell'articolo.

Bernhard Riemann

RH - Riemann Hypothesis "*Per ogni zero non banale $s=\sigma+it$ in ζ, allora $\sigma=1/2$ (o equivalentemente tutti gli zeri non banali di $\zeta(s)$ vivono sulla linea critica)*".

Congettura sulla molteplicità degli zeri non banali "*Tutti gli zeri non banali sono semplici ovvero con molteplicità 1*".

Sono proprio queste due ultime congetture a costituire gli ultimi baluardi che resistono alla logica analitica dimostrativa!



+

Figura 1 – striscia critica e linea critica σ=1/2

La maggiore difficoltà nella risoluzione della RH finora è stata la complessità dell'equazione integrale e dell'equazione funzionale, difficili da manipolare o da sfruttare per evidenziarne parte reale e parte immaginaria.

Per indagare nella striscia critica è possibile, invece, sfruttare la *serie di Dirichlet* η *o serie alternante* η *(vedi [6])*:

$$\eta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s}}=(1-2^{1-s})\zeta(s) \quad \text{s=}\sigma\text{+it}, \ \sigma>1$$
$$\eta(1-s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-s}}=(1-2^{s})\zeta(1-s) \quad \text{s=}\sigma\text{+it}, \ \sigma<0 \qquad (4)$$

Riemann Hypothesis – proposta di soluzione

Iniziamo a dimostrare alcuni Lemmi.

Lemma A

"*Gli zeri della zeta di Riemann non possono stare in regioni per cui* $|\zeta(s)|-|\zeta(1-s)|\neq 0$ *ma sono presenti solo laddove* $|\zeta(s)|=|\zeta(1-s)|=0$"

Dimostrazione

L'equazione simmetrica funzionale classica è espressa nel seguente modo:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \qquad (5)$$

Dove s=σ+it

Se prendiamo il valore assoluto di entrambi i lati della (5) è:

$$|\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)||\zeta(s)|=|\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)||\zeta(1-s)| \qquad (6)$$

E' evidente che per tutti i numeri complessi è:

$$|\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)|>0 \qquad |\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)|>0 \qquad (7)$$

Quindi se fosse vero che:

$$|\zeta(s)|-|\zeta(1-s)|\neq 0 \qquad (8)$$

è evidente che almeno uno dei due termini della (8) sarebbe diverso da zero; ma dalla (5) ne conseguirebbe che se uno dei termini è positivo lo è anche l'altro; per cui nessun "zero non banale" si può avere in una zona in cui è vera la (8). ([1])

Per cui gli zeri non banali sono per forza situati in una regione per cui è vero che:

$$|\zeta(s)|=|\zeta(1-s)|=0 \quad ({}^2) \qquad (9)$$

Con questo il ***Lemma A è dimostrato***.

Lemma B
"*La zeta di Riemann è iniettiva e nella striscia critica esiste una sola retta critica*"

Dimostrazione
Ipotizziamo *per assurdo* che esistano più rette critiche per diversi valori di σ, sulle quali potrebbero essere presenti zeri non banali.

E' chiaro che ogni retta critica interseca l'asse reale in un solo punto, per cui il numero di linee critiche equivale al numero di intersezioni con l'asse reale; di conseguenza il valore di σ all'intersezione può essere ottenuto risolvendo la (9) con s=σ:

$$|\zeta(\sigma)|=|\zeta(1-\sigma)| \qquad (10)$$

[1] La (8) è falsa per il concetto di zero come soluzione di un'equazione!

[2] La (9) ha in sè il concetto di simmetria che "condiziona" nell'attendersi che gli zeri non banali possano stare anche a coppia rispetto alla retta critica. Per cui la (9) da sola potrebbe non essere convincente circa il fatto che gli zeri non banali sono sulla retta critica

Proposta di dimostrazione
alle
Ipotesi di Riemann e
Congettura molteplicità degli zeri

Sommario

In questo documento gli autori riprendono i lavori [6][11][12] e presentano una proposta di dimostrazione dell'ipotesi di Riemann e della congettura sulla molteplicità degli zeri non banali della zeta di Riemann.

Abstract

In this paper the authors continue the works [6] [11] [12] and present a proposal for a demonstration on the Riemann Hypothesis and the conjecture on the multiplicity of non-trivial zeros of the Riemann's zeta.

Invece di utilizzare la continuazione analitica della zeta di Riemann per Re(s)>0 faremo uso della serie alternante η o serie di Dirichlet η , vista nella (4):

$$\zeta(\sigma)=\frac{1}{1-2^{1-\sigma}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}} \qquad (11)$$

Se esaminiamo la derivata prima della (11) è:

$$\zeta'(\sigma)=[\frac{-2^{1-\sigma}\ln 2}{(1-2^{1-\sigma})^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}}-\frac{1}{1-2^{1-\sigma}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}}\ln n]<0$$

Essa è valida per tutti i valori σ nella striscia critica.

Poichè la derivate prima è negativa, ciò indica che la funzione zeta è strettamente decrescente e che, quindi, "*la zeta di Riemann è una funzione iniettiva*".

L'iniettività comporta che ad ogni valore del dominio (il valore σ) corrisponde un valore (almeno uno e non più di uno) del codominio (i valori di ξ); per cui affinchè sia vera la (10) ciò può avvenire solo per σ=1/2.

Contrariamente se fosse

$$|\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)|\neq|\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)|\Rightarrow|\zeta(s)|\neq|\zeta(1-s)|$$

Ma qui non troveremo "zeri non banali" come visto nel Lemma A. Per trovare gli zeri non banali ([3]) è:

$$\zeta(s)=\zeta(1-s)=0\Rightarrow|\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)| = |\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)|$$

Ora per trovare i valori di σ per tutte le rette critiche ipotizzate, si potrebbe usare la seguente espressione (12):

$$\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \pi^{-\frac{1-\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) \qquad (12)$$

Esaminiamo separatamente le derivate prime rispetto a σ dei due componenti, parte pi greco e parte gamma, della (12) e poi ricomponiamo il tutto; per cui:

$$\frac{d\pi^{-\frac{\sigma}{2}}}{d\sigma}=-\frac{1}{2}\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\ln\pi<0$$

Qui emerge l'iniettività su σ nella striscia critica.

---

[3] gli zeri soluzione di un'equazione, la (9) o la (10).

Inoltre è:

$$\frac{d\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{d\sigma} = -\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left[\frac{1}{\sigma/2} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\sigma/2} - \frac{1}{n}\right)\right] < 0$$

Anche qui la funzione gamma è iniettiva su σ.

Ora se mettiamo insieme le due parti e scriviamo:

$$g(\sigma) = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = g(1-\sigma) = \pi^{-\frac{1-\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)$$

Nel complesso, quindi, la derivata di g(σ) è negativa e g è iniettiva e ciò può avvenire solo per σ=1/2 per cui "*esiste una sola retta critica nella striscia critica*", ***il che dimostra anche il Lemma B***.

Lemma C

"Gli zeri non banali della zeta di Riemann, situati in una regione per cui è vero che $|\zeta(s)| = |\zeta(1-s)| = 0$*, sono gli stessi di quelli per cui è vero che* $\eta(s)=\eta(1-s) = 0$*"*

Dimostrazione

In precedenza con Lemma A e Lemma B abbiamo visto che esiste una sola retta critica e che gli zeri non banali possono essere localizzati solo dove è vera la (9).

Dalle (4) è evidente che:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = K(s) \qquad (13)$$

Dalla (13), attraverso le (4), è:

$$\frac{\frac{\eta(s)}{(1-2^{1-s})}}{\frac{\eta(1-s)}{(1-2^{s})}} = K(s) \qquad (14)$$

$$\eta(s) = K(s)\frac{(1-2^{1-s})}{(1-2^{s})}\eta(1-s) = C(s)\eta(1-s) \qquad (15)$$

La (15) è ***l'equazione funzionale*** $\boldsymbol{\eta}$***,*** che cercavamo.

La (15) afferma che nella striscia critica finchè $\eta(s)\neq\eta(1-s)$ non ci possono essere zeri ([4]); difatti se nella striscia critica, esclusa la retta critica, ci fossero degli zeri significherebbe che ovunque

[4] è equivalente alla (9)

η(s)=η(1-s)=0; ma dalla (15) C(s) = 0/0 (indeterminate), il che è impossibile perchè C(s) è determinato (di fatti dipende da K(s)). Inoltre siamo sicuri che gli "zeri banali" sono solo nella funzione Γ(s) tramite K(s); mentre con η(s) trattiamo gli zeri non banali.

Riemann Hypothesis

"*Tutti gli zeri non banali della zeta di Riemann sono sulla retta critica*"

Dimostrazione della RH

Il lemma A, Lemma B e Lemma C ci hanno portati a concludere che esiste una sola retta critica, che gli zeri non banali non possono stare ovunque nella striscia critica e che è possibile per analizzare gli zeri utilizzare l'equazione funzionale (15).

Il metodo che useremo adesso si basa sul fatto che una qualsiasi funzione complessa di variabile complessa è riconducibile alla somma di due funzioni complesse di variabili reali (s=σ+it) ; inoltre la funzione è analitica([5]):

$$\begin{aligned} \eta(s) &= u(\sigma,t) + i\,v(\sigma,t) \\ \eta(1-s) &= u'(\sigma,t) + i\,v'(\sigma,t) \end{aligned} \qquad (16)$$

Gli zeri di η(s) sono, difatti, legati agli zeri di u e v.

In tal caso potremo annullare le singole funzioni u e v per trovare gli zeri di η; difatti, nel seguito, annulleremo prima la parte immaginaria e vedremo come, per questo, si semplifica la parte reale. Infine vedremo dove e come si annulla anche la parte reale, il che ci porterà a delle conclusioni sugli zeri della η e, di conseguenza, della zeta di Riemann attraverso la (13) e (14).

Le (16) sono esprimibili in forma trigonometrica in funzione delle variabili (σ,t), tenendo presente le (4) e che:

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^{\sigma+it}} = \frac{1}{n^\sigma}\bullet n^{-it} = \frac{1}{n^\sigma}\bullet e^{-it\ln n} = \frac{1}{n^\sigma}\bullet(\cos t\ln n - i\sin t\ln n)$$

Per cui è:

$$\begin{aligned} u(\sigma,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(t\ln n)}{n^\sigma} \\ v(\sigma,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(t\ln n)}{n^\sigma} \\ u'(\sigma,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(t\ln n)}{n^{1-\sigma}} \\ v'(\sigma,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(t\ln n)}{n^{1-\sigma}} \end{aligned} \qquad (17)$$

[5] Il che vuol dire anche che per essa sono vere le equazioni di Cauchy-Riemann

Ora per avere v=0 e v′=0 è necessario che sia:

$$\sin(t \ln n)=0 \quad \Rightarrow \quad t_{n,k} = \pm\frac{K\pi}{\ln n}, \quad n=1,2,3,\ldots \quad k=0,1,2,\ldots$$

Interessante notare che $t_{n,k}$ può dar luogo ad infinite coppie di valori al variare di (n,k).

Per tale valore di $t_{n,k}$ le parti reali u e u′ si semplificano perchè è

$$\cos(t_{n,k} \ln n) = (-1)^k$$

per cui le (17) diventano:

$$\begin{aligned} u(\sigma, t_{nk}) &= (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}} \\ u'(\sigma, t_{nk}) &= (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-\sigma}} \end{aligned} \qquad (18)$$

Quand′è che le serie espresso dalle (18) possono convergere a zero? E′ il *quesito chiave degli ultimi passi della dimostrazione*, che segue il metodo esposto precedentemente.

Tra i vari teoremi che si possono considerare sulle serie esiste il seguente **Teorema**: *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie alternante di termine generale infinitesimo e sia* $|a_n| > |a_{n+1}|$ *allora la serie converge e* $|S - S_n| < |a_{n+1}|$.

Nel Teorema con S si intende la somma infinita della serie e Sn la somma solo dei primi n termini. Se intendiamo nelle (18) S – Sn = u - u_n abbiamo a che fare con serie alternanti con termini infinitesimi poichè n è al denominatore e quando n→∞ abbiamo un infinitesimo; per cui le due serie delle (18) convergono a zero; cioè riusciamo a trovare che:

$$|u - u_n| < \left|\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}\right|$$
$$|u' - u'_n| < \left|\frac{1}{(n+1)^{1-\sigma}}\right|$$

Allora al tendere di n all′infinito le due serie tendono a zero, ovvero:

$$\lim_{n\to\infty} |u - u_n| = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} |u' - u'_n| = 0$$

Da qui ne consegue che :

$$\lim_{n\to\infty} u - u_n = \lim_{n\to\infty} u' - u'_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{1-\sigma}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{1-\sigma}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma = \lim_{n\to\infty} 1\text{-}\sigma \quad \text{per cui } \sigma = 1/2$$

La convergenza a zero delle due serie, comporta che i due valori σ e 1- σ, al tendere di n all'infinito, si incontrano a ½ quindi, la convergenza avviene sulla retta critica a σ=1/2. Ora poichè l'annullamento di u e v individua gli zeri non banali, siamo arrivati alla conclusione che gli zeri non banali stanno sulla retta critica a σ=1/2. Il procedimento non ci ha portato a nessuna contraddizione ma alla conferma che "*E' solo sulla retta critica che possono stare gli zeri non banali della zeta di Riemann*".

CVD

Congettura sulla molteplicità degli zeri - proposta di soluzione

Congettura sulla molteplicità degli zeri non banali "*Tutti gli zeri non banali sono semplici ovvero con molteplicità 1*".

Richiamo teorico A

Sappiamo che:

$$\varsigma(s) = \prod_{p=prime} (1-p^{-s})^{-1}$$

Tale espressione ci consente di scrivere:

$$\ln \varsigma(s) = -\sum_{p=prime} \ln(1-p^{-s}) = \sum_{p=primes} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-ks}}{k} \qquad (19)$$

In (19) abbiamo applicato l'integrazione di Newton legata all'espressione:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Se la precedente espressione è integrata per x e si cambia segno per avere (1-x) al numeratore, allora otteniamo:

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Introduciamo ora la *funzione di von Mangoldt* (anche chiamata funzione lambda):

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & if\ n=p^k,\ \ p\ \ prime,\ k \geq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (20)$$

Per cui è:

$$\ln \varsigma(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n\ \ n^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} \qquad (21)$$

Da cui derivando ulteriormente:

$$\frac{\varsigma'(s)}{\varsigma(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (22)$$

Richiamo teorico B

Dato un polinomio di grado qualsiasi e con variabile reale o complessa, la ricerca delle radici è possibile effettuarla iterativamente con vari metodi; ad esempio:

- Metodo iterativo
- Metodo di Newton
- Metodo di Sturm e Teorema relativo
- etc.

Nel prosieguo faremo uso solo del metodo di Newton (vedi [10]).

Ricordiamo che se una funzione f(z) ammette una radice α tale che f(α)=0 allora è possibile esprimere per le funzioni meromorfiche $f:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{C}}$ **una mappa di Newton** $N_f(z)$ nel seguente modo:

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \qquad (23)$$

Ora è noto che:

1. Se α è uno zero semplice di f(z) allora f(α)=0 e $N_f(\alpha)=\alpha$ e $N'_f(\alpha)=0$ e inoltre

$$N_f(z) - \alpha = O((z-\alpha)^2), \quad z \to \alpha$$

2. Se α è uno zero multiplo di f(z) allora f(α)=0 e $N_f(\alpha)=\alpha$ e $|N'_f(\alpha)|<1$ e inoltre

$$|N_f(z) - \alpha| \leq C|z-\alpha|, \quad 0 < C < 1, \; z \to \alpha$$

In generale se fossimo interessati ai valori delle radici, sarebbe possibile partire da un valore z_0 prossimo ad α e ,con varie iterazioni, si arriverebbe ad un n-esimo termine tale che $Nf_n(\alpha)=\alpha$.

Tuttavia alla dimostrazione non serve trovare effettivamente i valori delle radici ma solo di poter dire qualcosa sulla molteplicità di tali radici; da qui nasce la successiva dimostrazione.

Dimostrazione della congettura

Nel caso della zeta di Riemann la (23) diventa:

$$N_\varsigma(z) = z - \frac{\varsigma(z)}{\varsigma'(z)} \qquad (24)$$

La (24) attraverso la (22) diventa:

$$N_\varsigma(z) = z + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}} \qquad (25)$$

Da qui è:

$$N_{\varsigma}(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\alpha}}} \quad (26)$$

La (26) diventa:

$$N_{\varsigma}(\alpha) \sim \alpha$$

perchè

$$\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{|\alpha|}}} << 1 \quad (27)$$

dove per la funzione di von Mongoldt nella (26) vale la (20); inoltre abbiamo una sommatoria di funzioni di von Mongoldt, per cui non è nullo il termine sotto il numeratore della (26). Inoltre al secondo membro della (26) ci sono solo costanti per cui è anche:

$$N'_{\varsigma}(\alpha) = 0 \quad (28)$$

La radice α è un numero complesso nella (27)per cui si può intendere con $|\alpha|$ il modulo.

Per cui dai richiami A e B visti prima possiamo affermare, attraverso il metodo di Newton sulla ricerca delle radici che: "*Tutti gli zeri non banali della zeta di Riemann sono semplici ovvero con molteplicità 1*".

CVD