Составные логические переменные и симметричные логические структуры в задачах булевой алгебры.

Дмитрий Емшанов[*]

10 октября 2009 года

В данной работе рассмотрены структуры данных, которые являются основой для нового представления формулы 3-SAT.

Начальной структурой является *СЛП* (*составная логическая переменная)*, рассматриваемая в первой части работы.

Во второй части работы приведено описание преобразования формулы 3-SAT к виду 2.5-SAT, построенному на основе *СЛП*.

Третья часть работы посвящена расширенному представлению *СЛП,* именуемому *СЛС (симметричной логической структурой);* рассматриваются их множества и методы эффективного поиска *выполняющих наборов* для таких множеств.

В четвертой части работы приводится алгоритм сведения формулы 2.5-SAT к совокупности двух структур – формуле 2-SAT и множеству СЛС.

Пятая часть работы описывает условия, необходимые для построения эффективных алгоритмов отыскания совместных *выполняющих наборов* для двух данных структур.

1. Составные логические переменные

В данной части работы будет описана новая структура, построенная на основе операции *«эквиваленция»*, но для данной операции будет введена иная нотация. Необходимые пояснения этому будут даны ниже.

Введем в рассмотрение новый вид логических конструкций – *составная логическая переменная (СЛП)*.

Она строится на базе обычных логических переменных и выражает следующее предложение *«переменные имеют одинаковое значение»*.

[*]e-mail: dldrdy@mail.ru

Пример.

Если две логические переменные x и y принимают одно значение (то есть обе одновременно принимают значение *«истина»* или значение *«ложь»*), то некоторая составная логическая переменная, построенная на их основе, принимает значение *«истина»* и имеет следующую запись

$$x.y$$

То есть перечисление переменных через символ *«точка»*.

Если x и y имеют разные значения (то есть некоторая из них принимает значение *«истина»*, а другая - *«ложь»*), тогда составная логическая переменная принимает значение *«ложь»* и имеет запись

$$\neg x.y$$

То есть перечисление переменных через символ *«точка»* с символом логического отрицания.

Следует воспринимать эту структуру именно как логическую переменную, а не как логическое выражение даже несмотря на то, что ее значение может быть выражено через операцию *«эквиваленция»* или операцию *«не xor»*:

$$x.y = \neg(x\ xor\ y) = (x \leftrightarrow y)$$

$$\neg x.y = (x\ xor\ y) = \neg(x \leftrightarrow y)$$

Связано это с тем, что данные структуры имеют не чистый логический, а логико-числовой базис. Выражение $x.y =$ «истина», имеет исключительно логический базис и может быть записано как $x \leftrightarrow y =$ «истина» . Но уже выражение $x.y = 2$ или неравенство $x.y > 1$ обретает смысл исключительно в новой нотации. Именно поэтому мы использовали подобную замену операции *эквиваленция* (в том числе нотационную).

Если читателю новая нотация непривычна, в самом начале знакомства с данной работой можно рекомендовать использование исключительно операции *эквиваленция*.

2. Преобразование 3-SAT к 2.5-SAT

Имеет место утверждение: *формула 3-SAT* общего вида может быть преобразована к формуле в КНФ, в которой каждый дизъюнкт имеет не более двух литералов, а каждый терм каждого такого литерала есть простая или составная логическая переменная. Договоримся называть такую формулу *2.5-SAT формулой.*

Дана формула 3-SAT общего вида. Для любого из дизъюнктов этой формулы, который определен на некоторых трех простых логических переменных x_1, x_2, x_3, например $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$, возможны два варианта:

1. кроме данного дизъюнкта в формуле присутствует еще хотя бы один дизъюнкт, определенный на тех же самых переменных;
2. это единственный дизъюнкт, содержащий в точности такие три переменные.

Сначала рассмотрим первый вариант, когда для некоторого дизъюнкта формула содержит еще хотя бы один дизъюнкт, определенный на тех же самых переменных.

Все возможные сочетания пар дизъюнктов формулы 3-SAT, определенных на одних и тех же переменных имеют следующий вид:

1.1 Дизъюнкты различаются одним литералом, пример: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.
2.1 Дизъюнкты различаются двумя литералами, пример: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.
3.1 Дизъюнкты различаются тремя литералами, пример: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$.
4.1 Все литералы для пары дизъюнкт одинаковы – вырожденный случай, когда мы имеем дело с одним и тем же дизъюнктом в двух экземплярах. Будем считать в данном случае, что у нас имеется лишь один единственный дизъюнкт и рассмотрим его позже - это случай пункта 2 , описанного выше.

Теперь рассмотрим каждое из актуальных трех сочетаний более детально:

1.1 Дизъюнкты различаются одним литералом: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

Очевидно, что в данном случае мы можем, используя правило склеивания, преобразовать данную пару дизъюнкт к единственному выражению вида: $(x_2 \vee x_3)$. Оно содержит в точности два литерала.

Таблица истинности (дизъюнкты различаются одним литералом)

Исходные значения переменных

x1	x2	x3
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА

Сравниваемые значения

(x1 v x2 v x3) ∧ (-x1 v x2 v x3)	(x2 v x3)
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА

2.1 Дизъюнкты различаются двумя литералами: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.

Переменная x_3 имеет одно и то же значение в каждом из выражений, а переменные x_1 *и* x_2 также одинаковы, но уже между собой в пределах каждого из дизъюнктов. На самом деле, если x_1 принимает значение *«ложь»*, то и x_2 принимает значение *«ложь»*, а если x_1 принимает значение *«истина»*, то и x_2 принимает значение *«истина»*. Таким образом, используя введенное ранее понятие *составной логической переменной*, два рассматриваемых дизъюнкта дают нам:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \Rightarrow (\neg x_1 . x_2 \vee x_3)$$

Для лучшего понимания смысла этого выражение, можно дать еще одну его интерпретацию на естественном языке: если у нас $\neg x_3$, тогда запрещено появление x_1 *и* x_2 с одинаковыми значениями.

Еще один пример.

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \Rightarrow (x_1 . x_2 \vee x_3)$$

Таблица истинности (дизъюнкты различаются двумя литералами)

Исходные значения переменных

x1	x2	x3
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА

Сравниваемые значения

(x1 v x2 v x3) ∧ (-x1 v -x2 v x3)	(-x1.x2 v x3)
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА

3.1 Дизъюнкты различаются тремя литералами: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$.

По аналогии с вышеописанным методом, проводим сравнение переменных и на этой основе записываем для данной пары выражений новое выражение в 2.5-SAT нотации:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \Rightarrow (\neg x_1 . x_2 \vee \neg x_2 . x_3)$$

В данном случае, когда все три переменные имеют различные значения в каждом из дизъюнктов, запись может иметь разные формы (*инвариант*). Также рассматриваемая пара 3-SAT выражений в 2.5-SAT нотации может иметь вид:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \Rightarrow (\neg x_1.x_3 \vee \neg x_2.x_3)$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \Rightarrow (\neg x_1.x_2 \vee \neg x_1.x_3)$$

Все три типа 2.5-SAT выражений абсолютно идентичны – это можно увидеть, построив таблицы истинности для исходного 3-SAT выражения и для преобразованных 2.5-SAT выражений.

Таблица истинности (дизъюнкты различаются тремя литералами)

Исходные значения переменных

x1	x2	x3
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА

Сравниваемые значения

(x1 v x2 v x3) ∧ (-x1 v -x2 v -x3)	(-x1.x2 v -x2.x3)	(-x1.x3 v -x2.x3)	(-x1.x2 v -x1.x3)
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ

Также инвариант имеет интересное свойство: покрытие выражения, определенного на двух составных логических переменных в точности совпадает с покрытием выражения, определенного на трех составных логических переменных, а именно:

$$(\neg x_1.x_2 \vee \neg x_2.x_3) \;=\; (\neg x_1.x_3 \vee \neg x_2.x_3) \;=\; (\neg x_1.x_2 \vee \neg x_1.x_3) \\ =\; (\neg x_1.x_2 \vee \neg x_1.x_3 \vee \neg x_2.x_3)$$

Природа инварианта имеет очень простое и понятное объяснение, которое опускается из рассмотрения в настоящей работе.

Вернемся к самому началу и рассмотрим случай, когда мы имеем всего один 3-SAT дизъюнкт, у которого нет пары, определенной на тех же переменных, чтобы построить 2.5-SAT выражение.

Данное затруднение снимается следующим образом. Договоримся называть все множество 3-SAT дизъюнктов, определенных с помощью одних и тех же трех переменных, *группой выражений* или сокращенно *группой. Полной группой* будем называть такую, которая содержит все возможные выражения (в этом случае их количество равно 8).

Представим рассматриваемое единственное выражение в группе в виде двух 3-SAT групп, имеющих эквивалентное (но не тождественное) покрытие в таблицах истинности, что и исходное одиночное выражение. Нетрудно увидеть, что это преобразование потребует добавление одной новой переменной и результатом его станет получение двух 3-SAT групп, содержащих, соответственно, четыре и пять 3-SAT дизъюнктов. Полученные группы не являются группами, содержащими одиночные дизъюнкты, а потому они могут быть преобразованы к 2.5-SAT виду с использованием описанных выше правил.

Пример.

Имеем одиночный 3-SAT дизъюнкт в формуле: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

После добавления новой переменной x_4 и преобразования одной группы в две получим пару 3-SAT групп:

Группа_1: $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4)$

Группа_2: $(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$

Полученные семь дизъюнктов двух 3-SAT групп эквивалентны исходному дизъюнкту $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

Преобразуем данные 3-SAT выражения к 2.5-SAT виду в соответствии с вышеописанными правилами:

Для первой группы:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \Rightarrow (x_1 \vee \neg x_4)$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_1 . x_2 \vee \neg x_4)$$

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_2 \vee \neg x_4)$$

Для второй группы:

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (x_2 \vee \neg x_3 . x_4)$$

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_2 . x_4 \vee x_3)$$

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_2 . x_3 \vee \neg x_3 . x_4)$$

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_2 . x_3 \vee \neg x_2 . x_4)$$

$$(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_2 . x_4 \vee \neg x_3 . x_4)$$

$$(x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (x_2 . x_3 \vee \neg x_4)$$

$$(x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_3 \vee \neg x_4)$$

$$(\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \Rightarrow (\neg x_2 \vee \neg x_4)$$

Строки 3, 4, 5 для второй группы - это вывод *инварианта*, поэтому они имеют один и тот же результат.

Таблица истинности для данного случая не приводится в настоящей работе по двум соображениям. Во-первых, она содержит 14 столбцов, что затрудняет представление данной таблицы на страницах настоящей работы в хорошо читаемом виде; во-вторых, задача преобразования в содержательной своей части сведена к ранее рассмотренным вариантам.

Важный момент. Для приведения формулы 2.5-SAT к единому виду переменных можно предложить следующий подход. Введем логическую переменную-константу (прошу прощения за столь семантически противоречивый неологизм) x_0 = "*истина*". Очевидно, что $\neg x_0$ = "*ложь*". Теперь для обозначения простой логической переменной x_1 средствами 2.5-SAT нотации мы можем ввести запись: $x_0 . x_1$. Литерал $\neg x_1$ будем обозначать соответственно: $\neg x_0 . x_1$.

Из этой записи вытекает одно наблюдение. Запись выражения 2-SAT $(x_1 \vee x_2)$ может быть преобразована к виду $(x_0 . x_1 \vee x_0 . x_2)$. Очевидно, что это инвариант по переменной x_0. Таким образом, дизъюнкт 2-SAT общего вида $(x_1 \vee x_2)$ является всего лишь частным случаем инварианта в 2.5-SAT нотации.

Подытожим. В результате преобразования по описанному алгоритму исходной 3-SAT формулы общего вида, возможно получение 2.5-SAT формулы, каждый дизъюнкт которой содержит не более двух переменных (простых или составных). Каждое из этих выражений определено на тех же переменных (количество которых может быть расширено за счет преобразования единственных дизъюнктов в группе). И все множество этих выражений имеет эквивалентное покрытие на картах Карно или в таблицах истинности, что имеет исходная формула 3-SAT. Таким образом, исходная формула 3-SAT и полученная из нее формула 2.5-SAT являются эквивалентными. А, значит, любой найденный для 2.5-SAT формулы выполняющий набор будет являться таковым и для исходной 3-SAT формулы.

Сложность сведения.

Если k - число переменных, на которых определена исходная 3-SAT формула, тогда верхняя граница сложности преобразования 3-SAT формулы к 2.5-SAT формуле по числу переменных составит $O(\frac{4}{3}k)$ (в том случае, когда каждый из дизъюнктов формулы 3-SAT - единственный в группе).

Если d - число дизъюнкт, на которых определена исходная 3-SAT формула, тогда верхняя граница сложности преобразования 3-SAT формулы к 2.5-SAT формуле по числу дизъюнкт исходя из приведенного выше алгоритма преобразования, составит $O(7d)$.

Кроме того, относительно сложности сведения хотелось бы заметить следующее.

Преобразование, описание которого здесь приведено – избыточно. Любая пара дизъюнкт 3-SAT, которые порождают один дизъюнкт 2.5-SAT, может быть удалена из дальнейшего рассмотрения. То есть, например, группа из четырех исходных 3-SAT дизъюнкт формирует всего пару 2.5-SAT дизъюнкт, а не операцию над каждой парой дизъюнктов в группе. Очевидно, что некоторые исходные дизъюнкты не могут быть удалены сразу. Например, когда в группе нам дано три 3-SAT дизъюнкта. Эта тройка порождает два 2.5-SAT дизъюнкта и одно из исходных 3-SAT выражений участвует в генерации каждого из двух получаемых 2.5-SAT выражений. Таким образом, в некоторых случаях, когда каждая из групп исходной формулы 3-SAT содержит четное число дизъюнкт, в результате преобразования формула 2.5-SAT будет содержать их в два раза меньше, чем исходная формула 3-SAT.

Кроме того, группы определенного вида из четырех дизъюнктов могут быть преобразованы в компактный вид, речь о котором будет идти в следующем разделе.

3. Симметричные логические структуры

Расширим понятие *составной логической переменной*. Договоримся называть *симметричной логической структурой (СЛС) порядка* i структуру, которая определена на i переменных и построена на следующих логических основаниях.

Рассмотрим процедуру определения СЛС порядка III. Если мы имеем простую логическую переменную z (в соответствии со вновь введенной терминологией – это будет логическая структура I-ого порядка) и составную логическую переменную $x.\mathrm{y}$ (логическая структура II-ого порядка), то на их базе мы можем создать логическую структуру III-его порядка, которая будет иметь следующую запись:

$$\neg x.y.z \text{ } или \text{ } x.y.z$$

и будет строиться по следующим правилам:

$$\neg x.\mathrm{y} \wedge \neg z \Rightarrow x.y.z$$

$$x.y \wedge \neg z \Rightarrow \neg x.y.z$$

$$\neg x.y \wedge z \Rightarrow \neg x.y.z$$

$$x.y \wedge z \Rightarrow x.y.z$$

Будем называть подобные выражения *симметричной логической структурой (СЛС)*.

Аналогично может быть построена логическая структура любого порядка k на базе СЛС порядка n и СЛС порядка $(k-n)$, где $k > n$.

Данные структуры просты в определении и построении, но невероятно богаты по своей природе ввиду свойства ассоциативности операции *«эквиваленция»*, лежащей в основе их построения. Несколько примеров.

Пример.

$$(x_1.x_2.x_3) \wedge (x_1.x_4.x_5) \Rightarrow x_2.x_3 = x_4.x_5 \Rightarrow (x_2.x_3.x_4.x_5)$$

Смысловая интерпретация этого выражения проста: «*если* x_1 *равно* $x_2.x_3$ *и* x_1 *равно* $x_4.x_5$, *тогда* $x_2.x_3$ *равно* $x_4.x_5$ *»*. Верность утверждения несложно проверить при помощи таблиц истинности. Аналогично:

$$(x_1.x_2.x_3) \wedge (\neg x_1.x_2.x_4) \Rightarrow x_3 \neq x_4 \Rightarrow \neg x_3.x_4$$

если $x_1.x_2$ *равно* x_3 *и* $x_1.x_2$ *равно* $\neg x_4$, *тогда* x_3 *не равно* x_4.

Несколько правил для СЛС на примере выражения $(x_2.x_3.x_4.x_5)$:

$$(x_2.x_3.x_4.x_5) \Rightarrow x_2.x_3 = x_4.x_5$$

$$(x_2.x_3.x_4.x_5) \Rightarrow x_2.x_5 = x_3.x_4$$

$$(x_2.x_3.x_4.x_5) \Rightarrow x_2 = x_3.x_4.x_5$$

$$(x_2.x_3.x_4.x_5) \Rightarrow \neg x_2 = \neg x_3.x_4.x_5$$

$$(x_2.x_3.x_4.x_5) \Rightarrow x_3 = x_2.x_4.x_5$$

и так далее.

Главное свойство данных структур - они предоставляют возможность выделения из СЛС некоторой подструктуры СЛС меньшего порядка, содержащей произвольное подмножество переменных из множества тех, на которых она определена, и выражение значения этой подструктуры СЛС через оставшуюся подструктуру. При этом мы также произвольно можем обращаться с ее значением, правильно выразив значение оставшейся подструктуры.

В возможности такого простого оперирования с данным видом логических выражений можно убедиться, построив таблицы истинности для приведенных примеров, а их логическая безупречность несложно доказывается методом математической индукции.

Существует несколько интересных свойств данных структур. Одно из наиболее важных: если СЛС определена на четном числе переменных (то есть порядок СЛС выражен четным числом), тогда СЛС принимает значение *«истина»* тогда и только тогда, когда четное число переменных из тех, на которых она определена, принимают значение *«истина»*. Если же СЛС четного порядка имеет нечетное число переменных из общего множества, принимающих значение *«истина»*, тогда такая СЛС принимает значение *«ложь»*. Аналогичное, но инверсно выраженное правило, верно и для СЛС, определенных на нечетном количестве переменных.

Иными словами, СЛС будет принимать значение *«истина»* тогда и только когда, когда четность порядка ее структуры будет равна четности количества переменных, имеющих значение *«истина»*. Данное свойство следует из особенностей построения этих структур. К сказанному можно добавить только то, что ноль в данном рассмотрении является четным числом.

Если мы имеем не одну СЛС, а несколько, которые определены на общих переменных, то верно следующее утверждение: для множества СЛС за полиномиальное время может быть найден выполняющий набор или получено удостоверение, что такового не существует и формула, записанная множеством СЛС, невыполнима. Поиск решения, исходя из свойств СЛС, аналогичен поиску решения системы алгебраических уравнений *методом подстановки* [1, стр. 133]. Это связано с тем, что мы, как упоминалось выше, имеем возможность выделить любую подструктуру СЛС с любым знаком.

То есть предлагается последовательно выражать значение для каждой из существующих переменных через остаток любой СЛС, в которой она содержится, и производить замены каждого ее вхождения во всем оставшемся множестве СЛС на полученное значение остатка текущей СЛС. Проделав такие элементарные шаги для каждой переменной, мы получим или конфликт или конечное значение последней из переменных, которую возможно выразить. Обратным ходом подстановок мы получим значения каждой из переменных в обратном порядке.

Доказательство корректности подобного преобразования следует из тождественности следующих трех логических выражений:

$$(x_1.x_2.x_3) \wedge (x_3.x_4.x_5) = (x_1.x_2.x_3) \wedge (x_1.x_2.x_4.x_5) = (x_3.x_4.x_5) \wedge (x_1.x_2.x_4.x_5)$$

То есть если мы произвольно выберем во множестве СЛС какую-либо пару СЛС, имеющую общие переменные и, выразив это общее множество переменных в одной

СЛС через оставшиеся переменные, подставим его во вторую СЛС, тогда исходная СЛС может быть заменена во множестве СЛС на вновь полученную. Две эти пары СЛС будут тождественны, в чем можно убедиться, построив таблицу истинности и сравнив результаты исходной и полученной пары выражений.

Поясним сказанное на примере.

Пример.

Дано множество СЛС, для которого необходимо найти выполняющий набор.

$$(x_1.x_2.x_4.x_5) \wedge (x_2.x_3.x_5) \wedge (x_1.x_4.x_6.x_7) \wedge (x_2.x_3) \wedge$$

$$(x_1.x_2.x_3.x_4) \wedge (x_2.x_4.x_7) \wedge (x_1.x_5.x_6.x_7)$$

Договоримся, для простоты понимания, в данном примере делать подстановки для переменных с младшей (имеющей минимальный индекс) к старшей (имеющей максимальный индекс). Хотя в общем случае это можно делать в произвольном порядке.

Шаг_1: $(x_1.x_2.x_4.x_5) \Rightarrow x_1 = x_2.x_4.x_5$. Заменим во всей формуле любое вхождение во всех СЛС переменной x_1 значением $x_2.x_4.x_5$:

$$(x_1.x_2.x_4.x_5) \wedge (x_2.x_3.x_5) \wedge (x_2.x_4.x_5.x_4.x_6.x_7) \wedge (x_2.x_3) \wedge$$

$$(x_2.x_4.x_5.x_2.x_3.x_4) \wedge (x_2.x_4.x_7) \wedge (x_2.x_4.x_5.x_5.x_6.x_7)$$

Возникла ситуация, когда одна СЛС содержит несколько одноименных переменных. Из имманентной логики СЛС становится очевидным, что мы можем вычеркнуть из нее любое четное количество одноименных переменных, которое она содержит. На самом деле: $(x_1.x_2.x_2.x_3.x_4) = (x_1.x_3.x_4)$ и $(x_1.x_2.x_2.x_2.x_3.x_4) = (x_1.x_2.x_3.x_4)$. Верность этих равенств очевидна из построения и может быть проверена на таблицах истинности.

Таким образом, множество СЛС после удаления в каждом выражении четного числа вхождений одноименных переменных будет выглядеть следующим образом:

$$(x_1.x_2.x_4.x_5) \wedge (x_2.x_3.x_5) \wedge (x_2.x_5.x_6.x_7) \wedge (x_2.x_3) \wedge (x_5.x_3) \wedge (x_2.x_4.x_7) \\ \wedge (x_2.x_4.x_6.x_7)$$

Шаг_2: $(x_2.x_3.x_5) \Rightarrow x_2 = x_3.x_5$. Заменим во всей формуле x_2 *значением* $x_3.x_5$ и удалим четное количество одноименных переменных в каждой из СЛС:

$$(x_1.x_3.x_4) \wedge (x_2.x_3.x_5) \wedge (x_3.x_6.x_7) \wedge (x_5) \wedge (x_5.x_3) \wedge (x_3.x_5.x_4.x_7) \wedge (x_3.x_5.x_4.x_6.x_7)$$

На данном шаге у нас появилось конкретизированное значение переменной x_5 (СЛС I-ого порядка). Его появление говорит о том, что все выполняющие наборы исходной формулы СЛС должны иметь значение x_5 . И нет ни одного набора, содержащего литерал $\neg x_5$.

Шаг 3: $(x_3.x_6.x_7) \Rightarrow x_3 = x_6.x_7$. Заменим во всей формуле x_3 *значением* $x_6.x_7$ и удалим четное количество одноименных переменных в каждой из СЛС:

$$(x_1.x_6.x_7.x_4) \wedge (x_2.x_6.x_7.x_5) \wedge (x_3.x_6.x_7) \wedge (x_5) \wedge (x_5.x_6.x_7) \wedge (x_6.x_5.x_4) \wedge (x_5.x_4)$$

Шаг 4: $(x_5.x_4) \Rightarrow x_4 = x_5$. Заменим во всей формуле x_4 *значением* x_5 и удалим четное количество одноименных переменных в каждой из СЛС:

$$(x_1.x_6.x_7.x_5) \wedge (x_2.x_6.x_7.x_5) \wedge (x_3.x_6.x_7) \wedge (x_5.x_4) \wedge (x_5) \wedge (x_5.x_6.x_7) \wedge (x_6)$$

На данном шаге у нас возникла следующая ситуация - полностью исчезла одна СЛС. Мы сделали подстановку x_5 вместо x_4 в выражение $(x_5.x_4)$ и получили $(x_5.x_5)$ или (). Очень важно обратить на это внимание.

Наличие конфликта (отсутствия выполняющего набора для исходного множества СЛС) заключается в том, что у нас на некотором этапе подстановки возникает два возможных случая.

Первый из них заключается в том, что после подстановки мы получаем СЛС вида $(\neg x_1.x_1)$.

Второй заключается в том, что мы получаем пару СЛС вида $(x_1.x_2.x_3)$ и $(\neg x_1.x_2.x_3)$. Можно заметить, что этот случай, если на него не обращать внимания, продолжая делать замены и подстановки, рано или поздно приведет к первому из случаев конфликта, поэтому можно считать его системой раннего распознавания имеющегося конфликта выражений (невыполнимости формулы СЛС).

Шаг 5: $(x_5.x_6.x_7) \Rightarrow x_5 = x_6.x_7$ Заменим во всей формуле x_5 *значением* $x_6.x_7$ и удалим четное количество одноименных переменных в каждой из СЛС:

$$(x_1) \wedge (x_2) \wedge (x_3.x_6.x_7) \wedge (x_6.x_7.x_4) \wedge (x_5.x_6.x_7) \wedge (x_6.x_7) \wedge (x_6)$$

Шаг_6: $(x_6.x_7) \Rightarrow x_6 = x_7$ Заменим во всей формуле x_6 *значением* x_7 и удалим четное количество одноименных переменных в каждой из СЛС:

$$(x_1) \wedge (x_2) \wedge (x_3) \wedge (x_4) \wedge (x_5) \wedge (x_6.x_7) \wedge (x_7)$$

СЛС, оставшаяся после последней замены-подстановки - это *терминальная СЛС* формулы. В данном случае это (x_7). *Терминальная СЛС* и все полученные СЛС I-ого порядка могут быть добавлены к исходному множеству СЛС как новые ограничения. Нетрудно убедиться, что подстановка в формулу $\neg x_7$ *даст конфликт.* Также конфликт будет получен, если осуществить подстановку $\neg x_6$ или $\neg x_5$.

Обратный проход дает нам следующий результат:

x_7 = «истина»

$x_6 = x_7$ = «истина»

Таким образом, данная формула полностью запрещает появление любого терма со значением «ложно».

Введем понятие *нормализованного множества СЛС*. Договоримся называть *нормализованным множеством СЛС (НМСЛС)* такое множество СЛС, в котором каждая из СЛС, содержит переменную, принадлежащую только этой СЛС и никакой другой. Из построения следует важное свойство: *НМСЛС* не может быть невыполнимым, оно всегда имеет как минимум два выполняющих набора.

К сказанному можно добавить следующее. В примере приведена формула, имеющая идеальное преобразование (к СЛС, являющейся единственной терминальной переменной), то есть когда одна переменная своим значением определяет значения всех переменных формулы. Очевидно, что этот факт, по аналогии с системами уравнений в алгебре, связан с тем, что количество выражений (СЛС или уравнений), называемый в алгебре *«рангом системы уравнений»*, в точности равно количеству переменных, на которых они определены.

В общем случае терминальная СЛС будет определена через подмножество других переменных. Этот случай будет рассмотрен позже.

4. Преобразование 2.5-SAT к 2-SAT и множеству СЛС

Имеет место утверждение, что 2.5-SAT формула общего вида может быть сведена к совокупности, состоящей из 2-SAT формулы и множества СЛС, а общие для данных структур выполняющие наборы являются выполняющими наборами для исходной 2.5-SAT формулы.

Первый шаг данного преобразования выполняется путем прямой замены каждой *составной логической переменной* в 2.5-SAT формуле на новую простую логическую переменную (переименованием). Вторым шагом является формирование СЛС на базе исключенной из выражение СЛП и добавленной на место СЛП новой переменной. Допустимость подобного преобразования показана ниже в таблице истинности.

Таблица истинности (эквивалентность преобразования 2.5-SAT выражения к паре 2-SAT выражение и СЛС)

Исходные значения переменных

x1	x2	x3
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ

Вспомогательное значение

x4 (x2=x3)
ИСТИНА
ЛОЖЬ
ЛОЖЬ
ИСТИНА
ИСТИНА

Сравниваемые значения

(x1 v x2.x3)	(x1 v x4) ∧ (x2.x3.x4)
ИСТИНА	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА

ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА

ЛОЖЬ
ЛОЖЬ
ИСТИНА

ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА

Из данной таблицы следует тождественность исходного выражения 2.5-SAT и полученной из него конъюнкции пары выражений - одного 2-SAT и одной СЛС. Таким образом, мы можем преобразовать каждое из выражений 2.5-SAT и получить новую формулу. Также очевидно, что данная формула может быть разбита на две подформулы – 2-SAT и множество СЛС, объединенных отношением *«и» (конъюнкция двух подформул)*.

Подведем итог. 3-SAT формула может быть преобразована в 2.5-SAT формулу. А 2.5-SAT формула, в свою очередь, может быть преобразована к конъюнкции двух структур - 2-SAT формуле и формуле (множеству) СЛС. На основании этого имеет место утверждение, что любая 3-SAT формула может быть сведена к паре подформул, объединенных отношением *«и»*, для каждой из которых в отдельности мы можем найти за полиномиальное время выполняющий набор или обнаружить, что для любой из них не существует выполняющего набора. При этом набор переменных, являющийся *выполняющим* одновременно для 2-SAT формулы и для СЛС формулы, будет *выполняющим набором* для исходной 3-SAT формулы, из которой они были получены путем вышеописанного преобразования.

5. Согласование 2-SATи множества СЛС, поиск общих выполняющих наборов

В октябре 2009 года были написаны первые 4 раздела (см. выше) настоящей работы и данный пятый раздел, который содержал 4 страницы несложного описания некоторых наблюдений. Но по некоторым недавним обстоятельствам я вынес его в отдельное описание, которое начал оформлять в том же 2009 году. На тот момент это была 360-страничная работа, названная «Четверти и половины». В настоящий момент я занимаюсь переработкой данной публикации и включением в нее информации из данного раздела, которую рассчитываю вскоре разместить для ознакомления.

С уважением, Емшанов Дмитрий. 12.08.2016 года.

Литература

1. *Наум Яковлевич Виленкин, Рафаил Самойлович Гуттер, Семен Исаакович Шварцбурд, Борис Владимирович Овчинский, Владимир Георгиевич Ашкинузе*; Алгебра, учебное пособие для IX и X классов средних школ с математической специализацией, М.: Просвещение, 1968. 336 с.