

DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: bellevue-2011@hotmail.com

En 1742, Christian Goldbach adressa une lettre à Leonhard Euler dans laquelle il proposait la conjecture faible suivante :

Tout nombre supérieur à 5 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers.

Euler, lui répondit avec la version plus forte de la conjecture :

Tout nombre pair plus grand que deux peut être écrit comme une somme de deux nombres premiers. [1]

Le « Tout nombre » de la réponse d'Euler qui a écarté 2 aussi, laisse entendre que Euler ou Goldbach, ou les deux à la fois ne considéraient pas que 1 est premier...

C'est ces deux dernières versions actuelles que nous allons essayer de démontrer en adoptant une nouvelle approche.

INTRODUCTION

1°- en ce qui concerne la conjecture forte, chaque nombre pair n , à partir de 4 peut générer plusieurs couples dont les éléments a et $b < n$ et que parmi ces couples, qui déjà répondent à la conjecture par la sommation ($n=a+b$). Le nombre ou le cardinal des couples premiers est estimé par le théorème fondamentale des nombres premiers, en démontrant que ce cardinal > 0 c'est-à-dire $\forall N \text{ pair } > 3, \exists$ un couplet Goldbach premier (p, p') généré par $N / N = p + p'$

En établissant l'inéquation de Goldbach qui exprime autrement la conjecture (réduisant ce cardinal en ne considérant que les couples impair...)

2°- quand à la conjecture forte, chaque nombre impair n , à partir de 7 peut générer plusieurs triplets dont les éléments a, b et $c < n$ et que parmi ces triplets, qui déjà répondent à la conjecture par la sommation ($n=a+b+c$). Le nombre ou le cardinal des triplets premiers est estimé par le théorème fondamentale des nombres premiers, en démontrant que ce cardinal > 0 c'est-à-dire $\forall N \text{ impair } > 5, \exists$ un triplet Goldbach premier (p, p', p'') généré par $N / N = p + p' + p''$

En établissant l'inéquation faible de Goldbach qui exprime autrement la conjecture (réduisant ce cardinal en ne considérant que les triplets impairs)

I- Démonstration de la conjecture Forte de C. Goldbach.

a) détermination de la suite des décompositions de couplets impairs générés par tout pair >2

- un couplet commutatif impair est généré 2 fois par n , soit (a,b) et (b,a) , comme nous somme concerné par la somme $n = a+b$ pour l'énoncé de la conjecture, vu la commutativité de l'addition on prend dans le décompte des impairs qu'une seul fois (a,b) .

- un couplet Goldbach, c'est tout couplet impair et premier $(a, b$ premiers) qui respecte l'énoncé de la Conjecture par rapport au nombre pair qui le génère. . ($n = a+b$)

Commençons par cette observation inductive de cette suite

Exemple 1 : les couplets générés par le premier pair 4 sont :

4 \rightarrow (3,1) (2,2) (1,3) dont 2 couplets commutatifs impairs (3,1) (ou bien (3,1)), et un couplet Goldbach particulier (2,2) pour construire la somme de 2 premiers et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $4/4 = 1$

Exemple 2 : les couplets générés par le deuxième pair 6 sont :

6 \rightarrow (5,1) (4,2) (3,3) (2,4) (1,5) dont 2 couplets commutatifs impairs (5,1) et (3,3) (ou bien (1,5) et (3,3)), et dont 1 couplet Goldbach (3,3) pour construire la somme de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $6+2/4 = 2$

Exemple 3: les couplets générés par le troisième pair 8 sont :

8 \rightarrow (7,1) (6,2) (5,3) (4,4) (3,5) (2,6) (1,7) dont 2 couplets commutatifs impairs (7,1) (5,3) (ou bien (3,5) (1,7)), et dont 1 couplet Goldbach (5,3) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $8/4 = 2$

Exemple 4: les couplets générés par le quatrième pair 10 sont :

10 \rightarrow (9,1) (8,2) (7,3) (6,4) (5,5) (4,6) (3,7) (2,8) (1,9) dont 3 couplets commutatifs impairs (9,1) (7,3) (5,5) (ou bien (1,9) (3,7)), et dont 2 couplets Goldbach (7,3) (5,5) pour construire la somme commutative de 2 premiers pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $10+2/4 = 3$

Exemple 5: les couplets générés par le cinquième pair 12 sont :

12 → (11,1) (10,2) (9,3) (8,4) (7,5) (6,6) (5,7) (4,8) (3,9) (2,10) (1,11) dont 3 couplets commutatifs impairs (11,1) (9,3) (7,5) (ou bien (1,11) (3,9) (5,7)), et dont 1 couplet Goldbach (5,7) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $12/4 = 3$

Exemple 6: les couplets générés par le sixième pair 14 sont :

14 → (13,1) (12,2) (11,3) (10,4) (9,5) (8,6) (7,7) (6,8) (5,9) (4,10) (3,11) (2,12) (2,13) dont 4 couplets commutatifs impairs (13,1) (11,3) (9,5) (7,7); (ou bien (1,13) (3,11) (5,9)), et dont 1 couplet Goldbach (3,11) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $14+2/4 = 4$

Exemple 7: les couplets générés par le septième pair 16 sont :

16 → (15,1) (14,2) (13,3) (12,4) (11,5) (10,6) (9,7) (8,8) (7,9) (6,10) (5,11) (4,12) (3,13) (2,14) (1,15) dont 4 couplets commutatifs impairs (15,1) (13,3) (11,5) (7,7), et dont 3 couplets Goldbach (13,3) (11,5) (7,7) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la Conjecture.

Le nombre de couplets commutatifs impairs = $16/4 = 4$

....

LEMME 1 :

Pour Tout n , pair $> 2 \in \mathbb{N}^*$, Si il est de forme $4k = n$, ($\forall k \in \mathbb{N}^*$), le nombre de décompositions D générés par n , en couplets, dont les éléments a et b sont impairs est : $D(n) = n/4$.

LEMME 2 :

Si il est de forme $4k+2 = n$, ($\forall k \in \mathbb{N}^*$), le nombre de décompositions D , en couplets dont les éléments a et b sont impairs $D(n) = (n+2)/4$

La preuve du lemme 1 et du lemme 2 se retrouvent dans la formule explicite de la récurrence définit par la fonction $f(n)$, qui pour tout n pair > 2 , $f(n) =$ au nombre de décomposant impairs générés par n :

$$f: 2\mathbb{N} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{N} : n \rightarrow \frac{n+1+(-1)^{\frac{n-6}{2}}}{4} \quad (2\mathbb{N} : \text{ensemble des entiers pairs positifs})$$

Preuve :

$$\begin{aligned} & \cdot \text{ Si } n = 4k \Rightarrow (-1)^{\frac{n-6}{2}} = (-1)^{\frac{4k-6}{2}} = (-1)^{2k-3}, \text{ comme } 2k-3 \text{ est Impair} \\ \Rightarrow & (-1)^{2k-3} = -1 \Rightarrow f(n) = \frac{n}{4} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \text{ Si } n = 4k+2 \Rightarrow (-1)^{\frac{n-6}{2}} = (-1)^{\frac{4k+2-6}{2}} = (-1)^{2k-2}, \text{ comme } 2k-2 \text{ est Pair} \\ \Rightarrow & (-1)^{2k-2} = +1 \Rightarrow f(n) = \frac{n+2}{4} . \end{aligned}$$

Il existe une équi-répartition des formes $4k$ et $4k+2$ et qui s'alternent dans la suite, comme nous avons vu ci-dessus à partir de 4, on peut affirmer que la moyenne MD, des nombres de couplets impairs générés par un nombre pair > 2 , est de :

$$\begin{aligned} \text{MD}(n) &= \frac{\left(\frac{n}{4} + \frac{n+2}{4}\right)}{2} \\ &= \frac{2n+2}{4 \cdot 2} \end{aligned}$$

$$\text{MD}(n) = \frac{n+1}{4}$$

b) détermination des « couplets Goldbach » parmi la MD(n) des couplets impairs générés par tout $n > 2$, entier positif pair.

1° Utilisant le Théorème fondamental des nombres premiers, pour déterminer le nombre de couplets Goldbach **G(m)** parmi ces $\frac{n+1}{4}$ couplets impairs.

Au début l'hypothèse était que le nombre de premiers inférieur à x , entier positif, est sensiblement égale à x divisé par son logarithme népérien, quand x tend vers l'infini :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

Le problème consiste alors à prouver $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$

Vers 1896, Hadamard et de la vallée Poussin, en utilisant l'analyse complexe de Riemann, trouvèrent la démonstration du problème qui devient *théorème fondamental des nombres premiers*. (TFNP)

Appliquons le TFNP pour déterminer le cardinal des couplets Goldbach $G(m)$, parmi les couplets impairs générés par un nombre pair donné :

2° **Théorème :** Le nombre de k -combinaisons avec répétition d'un ensemble à n éléments ($n > 0$), noté Γ_n^k est égal à $\frac{(n+k-1)!}{k(n-1)!}$ qui est le nombre de k -combinaisons (sans répétition) de $n+k-1$ éléments.

Preuve :

Supposons que $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Les k -combinaisons de E avec répétition qui ne contiennent pas x_1 sont en bijection avec les k -combinaisons avec répétition de $\{x_2, \dots, x_n\}$ donc il y en a Γ_{n-1}^k . Les k -combinaisons de E avec répétition qui contiennent x_1 au moins une fois sont en bijection (en leur enlevant un x_1) avec les

$(k-1)$ -combinaisons de E avec répétition donc il y en a Γ_n^{k-1} . Le nombre total de k -combinaisons de E avec répétition est la somme de ces deux nombres. On en déduit la relation de récurrence. Le résultat s'en déduit par récurrence sur $n+k$, compte tenu du fait que pour tout entier naturel k , $\Gamma_1^k = 1$ et pour tout entier $n > 0$, $\Gamma_n^0 = 1$. [2]

La conjecture forte de Goldbach est équivalente donc à « $\forall N$ pair > 3 , \exists un couplet Goldbach (p, p') généré par $N / N = p + p'$ » (p et p' premiers bien entendu).

Le cardinal des couplets Goldbach $G(m) =$ au nombre de combinaison répétées de 2 parmi $\pi(m)$, m est réduit à $\frac{n+1}{4}$ qui constitue le nombre moyen de couplet impairs généré par tout n pair > 2 , dont la somme respecte la conjecture et dont on cherche à estimer les couplets Goldbach par $\pi(m)$.

$$G(m) = \Gamma \pi(m)^2 = \frac{(\pi(m) + 2 - 1)!}{2 (\pi(m) - 1)!} \quad (\text{d'après le théorème } 2^\circ)$$

$$G(m) = \frac{(\pi(m)+1) \cdot \pi(m) \cdot (\pi(m)-1)!}{2 \cdot (\pi(m)-1)!}$$

$$G(m) = \frac{(\pi(m)+1) \cdot \pi(m)}{2} \quad (\text{posons } \pi(m) = \frac{m}{\log(m)})$$

$$G(m) = \frac{\left(\frac{m}{\log(m)} + 1\right) \cdot \left(\frac{m}{\log(m)}\right)}{2}$$

$$G(m) = \frac{m}{2 \log(m)} \cdot \left(\frac{m}{2 \log(m)} + \frac{1}{2}\right)$$

$$G(m) = \left(\frac{m}{2 \log(m)}\right)^2 + \frac{m}{4 \log(m)}$$

Dans ce cas, cela revient à exprimer la conjecture de Goldbach par l'inéquation de Goldbach suivante :

$$\left(\frac{m}{2 \log(m)}\right)^2 + \frac{m}{4 \log(m)} > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n+1}{4}$$

Simplifions cette inéquation dite de Goldbach :

C'est-à-dire $\left(\frac{m}{2 \log(m)}\right)^2 + \left(\frac{m}{4 \log(m)}\right) > 0$

$\Rightarrow \frac{m^2}{4 \cdot \log(m)^2} + \frac{m}{4 \log(m)} > 0$

$\Rightarrow \frac{m^2 + \log(m) \cdot m}{4 \cdot \log(m)^2} > 0$

$\Rightarrow m^2 + \log(m) \cdot m > 0 \cdot 4 \cdot \log(m)^2$

$\Rightarrow m^2 > -\log(m) \cdot m$

$\Rightarrow m > -\log(m)$

$\Rightarrow e^m > e^{-\log(m)}$

$\Rightarrow e^m > \frac{1}{m}$

Avec $m = \frac{n+1}{4}$ $e^{\frac{n+1}{4}} > \frac{1}{\frac{n+1}{4}}$

$\Rightarrow e^{\frac{n+1}{4}} > \frac{4}{n+1}$

L'inéquation de GOLDBACH devient : $e^{\frac{n+1}{4}} > \frac{4}{n+1}$ (1)

Soit la fonction $f(n) = e^{\frac{n+1}{4}} - \frac{4}{n+1}$

$f(n)$ est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (1) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit $n > 2$. $f(n)$ étant défini dans l'intervalle $[4, +\infty[$

Calculons sa dérivé $f'(n) = \frac{n^2 \cdot e^{\frac{n+1}{4}} + 2 \cdot n \cdot e^{\frac{n+1}{4}} + e^{\frac{n+1}{4}} + 16}{4 \cdot (n+1)^2}$, son signe est toujours positif

puisque que avec $n > 2$ et $e^{\frac{n+1}{4}}$ positif, le numérateur et le dénomérateur donne un quotient toujours positif $\Rightarrow f'(n) > 0 \Rightarrow f(n)$ est strictement croissante entre $f(4) = 36,303...Et +\infty$

$\Rightarrow e^{\frac{n+1}{4}} > \frac{4}{n+1}$

\Rightarrow L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour $m = \frac{n+1}{4}$.

c) détermination des « couplets Goldbach » parmi $\frac{n}{4}$ valeur minimale des couplets impairs générés par tout $n > 2$, entier positif pair.

Partant du
$$\left(\frac{m}{2 \log(m)}\right)^2 + \frac{m}{4 \log(m)} > 0$$

Et après simplification, arrivant à
$$e^m > \frac{1}{m} \quad (m = \frac{n}{4}, \text{ dans ce cas})$$

$$\Rightarrow e^{\frac{n}{4}} > \frac{1}{\frac{n}{4}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{n}{4}} > \frac{4}{n}$$

L'inéquation de GOLDBACH devient :
$$e^{\frac{n}{4}} > \frac{4}{n} \quad (2)$$

Soit la fonction
$$g(n) = e^{\frac{n}{4}} - \frac{4}{n}$$

$g(n)$ est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (2) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit $n > 2$. $g(n)$ étant défini dans l'intervalle $[4, +\infty [$

Calculons sa dérivé
$$g'(n) = \frac{n^2 \cdot e^{\frac{n}{4}} + 16}{4 \cdot n^2}$$
, son signe est toujours positif puisque que avec $n > 2$

et $e^{\frac{n}{4}}$ positif, le numérateur et le dénomérateur positifs donne un quotient toujours positif $\Rightarrow g'(n) > 0 \Rightarrow g(n)$ est strictement croissante entre $g(4) = 1.71828183$ Et $+\infty$

$$\Rightarrow e^{\frac{n}{4}} > \frac{4}{n}$$

\Rightarrow L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour $m = \frac{n}{4}$.

d) détermination des « couplets Goldbach » parmi $\frac{n+2}{4}$ valeur maximale des couplets impairs générés par tout $n > 2$, entier positif pair.

Partant du
$$\left(\frac{m}{2 \log(m)}\right)^2 + \frac{m}{4 \log(m)} > 0$$

Et après simplification, arrivant à
$$e^m > \frac{1}{m} \quad (m = \frac{n+2}{4}, \text{ dans ce cas})$$

$$\Rightarrow e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{1}{\frac{n+2}{4}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{4}{n+2}$$

L'inéquation de GOLDBACH devient :
$$e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{4}{n+2} \quad (3)$$

Soit la fonction $h(n) = e^{\frac{n+2}{4}} - \frac{4}{n+2}$

$h(n)$ est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (3) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit $n > 2$. $h(n)$ étant défini dans l'intervalle $[4, +\infty [$

Calculons sa dérivé $h'(n) = \frac{n^2 \cdot e^{\frac{n+2}{4}} + 4 \cdot n \cdot e^{\frac{n+2}{4}} + 4 \cdot e^{\frac{n+2}{4}} + 16}{4 \cdot (n+2)^2}$ 'son signe est toujours positif

puisse que avec $n > 2$, $e^{\frac{n+2}{4}}$ positif et le dénumérateur positifs donne un quotient toujours positif $\Rightarrow h'(n) > 0 \Rightarrow h(n)$ est strictement croissante entre $h(4) = 9,37610...Et +\infty$

$$\Rightarrow e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{4}{n+2}$$

\Rightarrow L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour $m = \frac{n+2}{4}$.

e) Conclusions :

nous avons déduit que l'énoncé de la conjecture de Goldbach est équivalent à « $\forall N$ pair $> 3, \exists$ un couplet Goldbach (p, p') généré par $N / N = p + p'$ » ce qui, comme nous avons vu ci-dessus

Peut être traduit par « l'inéquation de Goldbach » après simplification, par :

$$\left(\frac{m}{2 \log(m)}\right)^2 + \frac{m}{4 \cdot \log(m)} > 0$$

Ou m correspond au cardinal des couplets impairs, dans ce cas, ce cardinal qui pour tout n pair > 2 , s'alterne entre $\frac{n+2}{4}$ et $\frac{n}{4}$ formant une moyenne de $\frac{n+1}{4}$

Nous avons démontré que pour ces trois cardinaux, l'inéquation de Goldbach reste vraie

$\forall n$ pair > 2 , c'est-à-dire que pour tout pair $> 2, \exists$ un couplet Goldbach dont la somme des 2 éléments égale à $n \Rightarrow$ la conjecture forte de Goldbach est vraie CQFD.

II- Démonstration de la conjecture Faible de C. Goldbach

a) détermination de la suite des décompositions de triplets impairs générés par tout impair > 5

Précisions :

- un triplet commutatif impair est généré 6 fois par tout impair $n > 5$, soit (a, b, c) ; (a, c, b) , (b, a, c) ; (b, c, a) ; (c, a, b) et (c, b, c) . Comme nous somme concerné par la somme $n = a + b + c$ pour l'énoncé de la conjecture faible, vu la commutativité de l'addition on prend dans le décompte des impairs qu'une seul fois (a, b, c) .

- un triplet Goldbach, c'est tout triplet impair et premier (a, b, c) premiers) qui respecte l'énoncé de la Conjecture faible par rapport au nombre n impair qui le génère. ($n = a + b + c$)

Nous savons par le théorème 2, ci-dessus (b, n°2) que le nombre de triplets ($k=3$) générés par tout

$$\text{impair } n \text{ est égale à } \Gamma_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} \quad (1)$$

Commençons par cette observation inductive de ces 2 suites des triplets :

Rang du n impair	nombre de triplet Dédit par (1)	nombre de triplet impairs observés	dédution de la formule qui génère les triplets impairs pour chaque impair n À partir de son rang (rang = 0 pour 1)
0 (1)	3! / (3!*0!) = 1	1	3! / (3!*0!) = 1
1 (3)	5! / (3!*2!) = 10	4	(3+1)! / (3!*(0+1)!) = 4
2 (5)	7! / (3!*4!) = 35	10	(3+2)! / (3!*(0+2)!) = 10
3 (7)	9! / (3!*6!) = 84	20	(3+3)! / (3!*(0+3)!) = 20
4 (9)	11! / (3!*8!) = 165	35	(3+4)! / (3!*(0+4)!) = 35
5 (11)	13! / (3!*10!) = 286	56	(3+5)! / (3!*(0+5)!) = 56
6 (13)	15! / (3!*12!) = 455	84	(3+6)! / (3!*(0+6)!) = 84
.....
r	Γ_n^3	T(r)	(3+r)! / (3!*(r)!) = T(r)

Soit $\frac{(3+r)!}{3!*r!}$ la formule explicite de la récurrence déduite ci-dessus qui permet, à partir du rang d'un entier impair positif n, de connaître le cardinal (T(r)) des triplets impairs généré par ce dernier. Expriment directement cette formule en fonction ce nombre impair (T(n)) :

Comme il existe une bijection entre le rang et n impair $\Rightarrow \forall (r, n) \in \mathbb{N}, n = 2r + 1$

$$\Rightarrow r = \frac{(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{(3 + \frac{(n-1)}{2})!}{3! * (\frac{(n-1)}{2})!} = \frac{(\frac{(n+5)}{2})!}{3! * (\frac{(n-1)}{2})!} = T(n) \quad \text{en simplifiant :}$$

$$T(n) = \frac{(\frac{(n+5)}{2}) * (\frac{(n+3)}{2}) * (\frac{(n+1)}{2}) * (\frac{(n)}{2}) * (\frac{(n-1)}{2})!}{6 * (\frac{(n-1)}{2})!}$$

$$T(n) = \frac{(n^2 + 8.n + 15)(n+1)}{6 * 2^3} = \frac{(n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15)}{48}$$

LEMME 3 :

Pour Tout n, impair $> 5 \in 2\mathbb{N}+1$, l'ensemble des entiers positifs impairs, le nombre de décompositions D généré par n, en triplets, dont les éléments a, b et c sont impairs est :

$$T(n) = \frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}$$

La preuve du lemme 3 se trouve dans la formule explicite de la récurrence définit par la fonction f(n), qui pour tout n impair > 5 , f(n) = au nombre de triplets impairs générés par n :

$$f: 2N + 1 \setminus \{1, 3, 5\} \rightarrow N: n \rightarrow \frac{n^3 + 9n^2 + 23n + 15}{48} \quad (2N+1 : \text{ensemble des entiers impairs positifs})$$

b) détermination des « triplets Goldbach » parmi la $T(n)$ des triplets impairs générés par tout entier positif impair > 5

La conjecture faible de Goldbach est équivalente donc à « $\forall N$ impair > 5 , \exists un triplet Goldbach (p, p', p'') généré par $N / N = p + p' + p''$ » (p, p' et p'' , premiers).

Le cardinal des triplets Goldbach $T(m)$ = au nombre de combinaison répétées de 3 parmi $\pi(m)$, m est réduit à $\frac{n^3 + 9n^2 + 23n + 15}{48}$, qui constitue le nombre de triplets impairs générés par tout n impair > 5 , dont la somme respecte la conjecture et dont on cherche à estimer les triplets Goldbach par $\pi(m)$.

$$T(m) = \Gamma \pi(m)^3 = \frac{(\pi(m) + 3 - 1)!}{3! (\pi(m) - 1)!} \quad (\text{d'après le théorème 2°})$$

$$T(m) = \frac{(\pi(m) + 2) \cdot \pi(m + 1) \cdot \pi(m) \cdot (\pi(m) - 1)!}{3! \cdot (\pi(m) - 1)!}$$

$$T(m) = \frac{\pi(m) \cdot (\pi(m)^2 + 3\pi(m) + 2)}{6}$$

$$T(m) = \frac{\pi(m)^3 + 3\pi(m)^2 + 2\pi(m)}{6}$$

$$T(m) = \frac{\frac{m^3}{\log(m)^3} + \frac{3m^2}{\log(m)^2} + \frac{2m}{\log(m)}}{6} \quad (\text{posons } \pi(m) = \frac{m}{\log(m)})$$

$$T(m) = \frac{\frac{m^3}{\log(m)^3} + \frac{3m^2 \cdot \log(m)}{\log(m)^3} + \frac{2m \cdot \log(m)^2}{\log(m)^3}}{6}$$

$$T(m) = \left[\frac{m^3}{6 \cdot \log(m)^3} + \frac{3m^2 \cdot \log(m)}{6 \cdot \log(m)^3} + \frac{2m \cdot \log(m)^2}{6 \cdot \log(m)^3} \right]$$

$$T(m) = \frac{m^3 + 3m^2 \cdot \log(m) + 2m \cdot \log(m)^2}{6 \cdot \log(m)^3}$$

Dans ce cas, cela revient à exprimer la conjecture faible de Goldbach par l'inéquation faible de Goldbach suivante :

$$\frac{m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2}{6.\log(m)^3} > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}$$

Ou bien

$$m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2 > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}$$

c) étude de l'inéquation faible de Goldbach en tant que fonction composée pour connaître son signe et variation.

Soit $f(n) = \frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}$, définit dans $[7, +\infty[$; sa dérivé $f'(n) = \frac{3.n^2 + 18.n + 23}{48}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur $3.n^2 + 18.n + 23$ qui est positif dans $] -\infty, -4.15..[$ et $] 1.846.., +\infty [$, -4.15 et 1.846 étant respectivement les racines du numérateur,

$$[7, +\infty [\subset] 1.846.., +\infty [\Rightarrow f'(x) > 0$$

Soit $g(n) = n^3 + 3.n^2.\log(n) + 2.n.\log(n)^2$, définit dans $[7, +\infty [$;

Sa dérivé $g'(n) = 2.\log(n)^2 + 6.n.\log(n) + 4.\log(n) + 3.n^2 + 3n$

Il est bien évident que le signe de $g'(n) > 0$ puisse que $\forall n > 0$ son produit ou sa sommation par n ou $\log(n)$ sont toujours positif.

$g \circ f = g(f(n))$ comme le stipule l'inéquation faible de Goldbach

$$g \circ f = \left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right)^3 + 3.\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right)^2.\log\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right) + 2.\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right).\log\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right)^2$$

L'inéquation faible de Goldbach consiste alors à démontrer $g \circ f > 0$

1° - ensemble de définition : $[7, +\infty [\rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R} , ensemble des réels)

$$\begin{matrix} n & \rightarrow & g(f(n)) \\ & & g \circ f \end{matrix}$$

2° - dérivé :

Théorème 3 : si f est dérivable sur un intervalle I , et g dérivable sur I , alors la composé $g \circ f$ Est dérivable sur I , $(g \circ f)' = (g' \circ f) * f'$

$(g \circ f)' =$

$$\left[2 \cdot \log\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right) + 6 \cdot \left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right) \cdot \log\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right) + 4 \cdot \log\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right) + 3 \cdot \left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right) \right] \cdot \left(\frac{3n^2+18n+23}{48}\right)$$

Le signe de $(g \circ f)' > 0$ car le signe de $\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right)$ et sa dérivé $\frac{3n^2+18n+23}{48}$ est > 0 , comme nous avons vu ci-dessus. Ensuite l'expression de $(g \circ f)'$ par la sommation ou le produit d'une quantité positif avec son logarithme positif, et par le produit de $f'(n)$ positif, est toujours positif

$\Rightarrow (g \circ f)' > 0$

3° - limites :

Théorème 4 : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (g \circ f)(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(f(n)) = +\infty$$

Il est bien évident que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+9n^2+23n+15}{48} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot \log(n) + 2 \cdot n \cdot \log(n)^2 = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g \circ f)(n)$

4° - tableau de variation :

n	7		+∞
(g o f)'		+	
g o f	a	↗	+∞

d) conclusion :

$g \circ f$ est strictement croissante entre $a \gg 7$ et $+\infty \Rightarrow g \circ f > 0$

$a > 1$ et $g \circ f > 0 \Leftrightarrow \forall N \text{ impair} > 5, \exists \text{ un triplet Goldbach } (p, p', p'') \text{ généré par } N / N = p + p' + p'' \Leftrightarrow$ la conjecture faible de Goldbach est vraie CQFD.

Référence :

[1] : techno science.net

[2] : wikipédia (Γ_n^k se lit « Gamma nk »)