

DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: bellevue-2011@hotmail.com

En 1742, Christian Goldbach adressa une lettre à Leonhard Euler dans laquelle il proposait la conjecture faible suivante :

Tout nombre supérieur à 5 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers.

Euler, lui répondit avec la version plus forte de la conjecture :

Tout nombre pair plus grand que deux peut être écrit comme une somme de deux nombres premiers. [1]

Le « Tout nombre » de la réponse d'Euler qui a écarté 2 aussi, laisse entendre que Euler ou Goldbach, ou les deux à la fois ne considéraient pas que 1 est premier...

C'est ces deux dernières versions actuelles que nous allons essayer de démontrer en adoptant une nouvelle approche.

INTRODUCTION

1°- en ce qui concerne la conjecture forte, chaque nombre pair n , à partir de 4 peut générer plusieurs couples dont les éléments a et $b < n$ et que parmi ces couples, qui déjà répondent à la conjecture par la sommation ($n=a+b$). Le nombre ou le cardinal des couples premiers est estimé par le théorème fondamentale des nombres premiers, en démontrant que ce cardinal > 0 c'est-à-dire $\forall N \text{ pair } > 3, \exists$ un couplet Goldbach premier (p, p') généré par $N / N = p + p'$
En établissant l'inéquation de Goldbach qui exprime autrement la conjecture (réduisant ce cardinal en ne considérant que les couples impair...)

2°- quand à la conjecture forte, chaque nombre impair n , à partir de 7 peut générer plusieurs triplets dont les éléments a, b et $c < n$ et que parmi ces triplets, qui déjà répondent à la conjecture par la sommation ($n=a+b+c$). Le nombre ou le cardinal des triplets premiers est estimé par le théorème fondamentale des nombres premiers, en démontrant que ce cardinal > 0 c'est-à-dire $\forall N \text{ impair } > 5, \exists$ un triplet Goldbach premier (p, p', p'') généré par $N / N = p + p' + p''$
En établissant l'inéquation faible de Goldbach qui exprime autrement la conjecture (réduisant ce cardinal en ne considérant que les triplets impairs)

I- Démonstration de la conjecture Forte de C. Goldbach.

a) détermination de la suite des décompositions de couplets impairs générés par tout pair >2

- un couplet commutatif impair est généré 2 fois par n , soit (a,b) et (b,a) , comme nous somme concerné par la somme $n = a+b$ pour l'énoncé de la conjecture, vu la commutativité de l'addition on prend dans le décompte des impairs qu'une seul fois (a,b) .

- un couplet Goldbach, c'est tout couplet impair et premier $(a, b$ premiers) qui respecte l'énoncé de la Conjecture par rapport au nombre pair qui le génère. . $(n = a+b)$

Commençons par cette observation inductive de cette suite

Exemple 1 : les couplets générés par le premier pair 4 sont :

4 \rightarrow (3,1) (2,2) (1,3) dont 2 couplets commutatifs impairs (3,1) (ou bien (3,1)), et un couplet Goldbach particulier (2,2) pour construire la somme de 2 premiers et pour aussi énoncer la conjecture.

$$\text{Le nombre de couplets impairs} = 4/4 = 1$$

Exemple 2 : les couplets générés par le deuxième pair 6 sont :

6 \rightarrow (5,1) (4,2) (3,3) (2,4) (1,5) dont 2 couplets commutatifs impairs (5,1) et (3,3) (ou bien (1,5) et (3,3)), et dont 1 couplet Goldbach (3,3) pour construire la somme de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

$$\text{Le nombre de couplets impairs} = 6+2/4 = 2$$

Exemple 3: les couplets générés par le troisième pair 8 sont :

8 \rightarrow (7,1) (6,2) (5,3) (4,4) (3,5) (2,6) (1,7) dont 2 couplets commutatifs impairs (7,1) (5,3) (ou bien (3,5) (1,7)), et dont 1 couplet Goldbach (5,3) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

$$\text{Le nombre de couplets impairs} = 8/4 = 2$$

Exemple 4: les couplets générés par le quatrième pair 10 sont :

10 \rightarrow (9,1) (8,2) (7,3) (6,4) (5,5) (4,6) (3,7) (2,8) (1,9) dont 3 couplets commutatifs impairs (9,1) (7,3) (5,5) (ou bien (1,9) (3,7)), et dont 2 couplets Goldbach (7,3) (5,5) pour construire la somme commutative de 2 premiers pour aussi énoncer la conjecture.

$$\text{Le nombre de couplets impairs} = 10+2/4 = 3$$

Exemple 5: les couplets générés par le cinquième pair 12 sont :

12 → (11,1) (10,2) (9,3) (8,4) (7,5) (6,6) (5,7) (4,8) (3,9) (2,10) (1,11) dont 3 couplets commutatifs impairs (11,1) (9,3) (7,5) (ou bien (1,11) (3,9) (5,7)), et dont 1 couplet Goldbach (5,7) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $12/4 = 3$

Exemple 6: les couplets générés par le sixième pair 14 sont :

14 → (13,1) (12,2) (11,3) (10,4) (9,5) (8,6) (7,7) (6,8) (5,9) (4,10) (3,11) (2,12) (2,13) dont 4 couplets commutatifs impairs (13,1) (11,3) (9,5) (7,7); (ou bien (1,13) (3,11) (5,9)), et dont 1 couplet Goldbach (3,11) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = $14+2/4 = 4$

Exemple 7: les couplets générés par le septième pair 16 sont :

16 → (15,1) (14,2) (13,3) (12,4) (11,5) (10,6) (9,7) (8,8) (7,9) (6,10) (5,11) (4,12) (3,13) (2,14) (1,15) dont 4 couplets commutatifs impairs (15,1) (13,3) (11,5) (7,7), et dont 3 couplets Goldbach (13,3) (11,5) (7,7) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la Conjecture.

Le nombre de couplets commutatifs impairs = $16/4 = 4$

....

LEMME 1 :

Pour Tout n , pair $> 2 \in \mathbb{N}^*$, Si il est de forme $4k = n$, ($\forall k \in \mathbb{N}^*$), le nombre de décompositions D générés par n , en couplets, dont les éléments a et b sont impairs est : $D(n) = n/4$.

LEMME 2 :

Si il est de forme $4k+2 = n$, ($\forall k \in \mathbb{N}^*$), le nombre de décompositions D , en couplets dont les éléments a et b sont impairs $D(n) = (n+2)/4$

La preuve du lemme 1 et du lemme 2 se retrouvent dans la formule explicite de la récurrence définit par la fonction $f(n)$, qui pour tout n pair > 2 , $f(n) =$ au nombre de décomposant impairs générés par n :

$$f: 2\mathbb{N} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{N} : n \rightarrow \frac{n+1+(-1)^{\frac{n-6}{2}}}{4} \quad (2\mathbb{N} : \text{ensemble des entiers pairs positifs})$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \cdot \text{ Si } n = 4k &\Rightarrow (-1)^{\frac{n-6}{2}} = (-1)^{\frac{4k-6}{2}} = (-1)^{2k-3}, \text{ comme } 2k-3 \text{ est Impair} \\ \Rightarrow (-1)^{2k-3} = -1 &\Rightarrow f(n) = \frac{n}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ Si } n = 4k+2 &\Rightarrow (-1)^{\frac{n-6}{2}} = (-1)^{\frac{4k+2-6}{2}} = (-1)^{2k-2}, \text{ comme } 2k-2 \text{ est Pair} \\ \Rightarrow (-1)^{2k-2} = +1 &\Rightarrow f(n) = \frac{n+2}{4}. \end{aligned}$$

Il existe une équi-répartition des formes $4k$ et $4k+2$ et qui s'alternent dans la suite, comme nous avons vu ci-dessus à partir de 4, on peut affirmer que la moyenne MD, des nombres de couplets impairs générés par un nombre pair > 2 , est de :

$$\begin{aligned} \text{MD}(n) &= \frac{\left(\frac{n}{4} + \frac{n+2}{4}\right)}{2} \\ &= \frac{2n+2}{4 \cdot 2} \end{aligned}$$

$$\text{MD}(n) = \frac{n+1}{4}$$

b) détermination des « couplets Goldbach » parmi la MD(n) des couplets impairs générés par tout $n > 2$, entier positif pair.

1° Utilisant le Théorème fondamental des nombres premiers, pour déterminer le nombre de couplets Goldbach **G(m)** parmi ces $\frac{n+1}{4}$ couplets impairs

Au début l'hypothèse était que le nombre de premiers inférieur à x , entier positif, est sensiblement égale à x divisé par son logarithme népérien, quand x tend vers l'infini :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

Le problème consiste alors à prouver $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$

Vers 1896, Hadamard et de la vallée Poussin, en utilisant l'analyse complexe de Riemann, trouvèrent la démonstration du problème qui devient *théorème fondamental des nombres premiers*. (TFNP)

Appliquons le TFNP pour déterminer le cardinal des couplets Goldbach $G(m)$, parmi les couplets impairs générés par un nombre pair donné :

2° **Théorème :** Le nombre de k -combinaisons avec répétition d'un ensemble à n éléments ($n > 0$), noté Γ_n^k est égal à $\frac{(n+k-1)!}{k(n-1)!}$ qui est le nombre de k -combinaisons (sans répétition) de $n+k-1$ éléments.

Preuve :

Supposons que $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Les k -combinaisons de E avec répétition qui ne contiennent pas x_1 sont en bijection avec les k -combinaisons avec répétition de $\{x_2, \dots, x_n\}$ donc il y en a Γ_{n-1}^k . Les k -combinaisons de E avec répétition qui contiennent x_1 au moins une fois sont en bijection (en leur enlevant un x_1) avec les

$(k-1)$ -combinaisons de E avec répétition donc il y en a Γ_n^{k-1} . Le nombre total de k -combinaisons de E avec répétition est la somme de ces deux nombres. On en déduit la relation de récurrence. Le résultat s'en déduit par récurrence sur $n+k$, compte tenu du fait que pour tout entier naturel k , $\Gamma_1^k = 1$ et pour tout entier $n > 0$, $\Gamma_n^0 = 1$. [2]

La conjecture forte de Goldbach est équivalente donc à « $\forall N$ pair > 3 , \exists un couplet Goldbach (p, p') généré par $N / N = p + p'$ » (p et p' premiers bien entendu).

Le cardinal des couplets Goldbach $G(m) =$ au nombre de combinaison répétées de 2 parmi $\pi(m)$, m est réduit à $\frac{n+1}{4}$ qui constitue le nombre moyen de couplet impairs généré par tout n pair > 2 , dont la somme respecte la conjecture et dont on cherche à estimer les couplets Goldbach par $\pi(m)$.

$$G(m) = \Gamma \pi(m)^2 = \frac{(\pi(m) + 2 - 1)!}{2 (\pi(m) - 1)!} \quad (\text{d'après le théorème } 2^\circ)$$

$$G(m) = \frac{(\pi(m)+1) \cdot \pi(m) \cdot (\pi(m)-1)!}{2 \cdot (\pi(m)-1)!}$$

$$G(m) = \frac{(\pi(m)+1) \cdot \pi(m)}{2} \quad (\text{posons } \pi(m) = \frac{m}{\log(m)})$$

$$G(m) = \frac{\left(\frac{m}{\log(m)} + 1\right) \cdot \left(\frac{m}{\log(m)}\right)}{2}$$

$$G(m) = \frac{m}{2 \log(m)} \cdot \left(\frac{m}{2 \log(m)} + 1\right)$$

Dans ce cas, cela revient à exprimer la conjecture de Goldbach par l'inéquation de Goldbach suivante :

$$\frac{m}{2 \log(m)} \cdot \left(\frac{m}{2 \log(m)} + 1\right) > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n+1}{4}$$

Simplifions cette inéquation dite de Goldbach :

C'est-à-dire $\left(\frac{m}{2 \log(m)}\right)^2 + \left(\frac{m}{2 \log(m)}\right) > 0$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{4 \cdot \log(m)^2} + \frac{m}{2 \log(m)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 2 \log(m) \cdot m}{4 \cdot \log(m)^2} > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 2 \log(m) \cdot m > 0 \cdot 4 \cdot \log(m)^2$$

$$\Rightarrow m^2 > -2 \log(m) \cdot m$$

$$\Rightarrow m > -2 \log(m)$$

$$\Rightarrow e^m > e^{-2 \log(m)}$$

$$\Rightarrow e^m > \frac{1}{m}$$

$$\text{Avec } m = \frac{n+1}{4} \quad e^{\frac{n+1}{4}} > \frac{1}{\frac{n+1}{4}}$$

$$\Rightarrow e^n \cdot e \cdot e^{\frac{1}{4}} > \frac{4}{n+1}$$

$$e = 2,718281828 \quad e^n \cdot 3,49034296 > \frac{4}{n+1}$$

$$\text{L'inéquation de GOLDBACH devient : } e^n > \frac{4}{3,49034296 \cdot (n+1)} \quad (1)$$

$$\text{Soit la fonction } f(n) = e^n - \frac{4}{3,49034296 \cdot (n+1)} = e^n - \frac{1.146020158...}{(n+1)}$$

$f(n)$ est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (1) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit $n > 2$. $f(n)$ étant défini dans l'intervalle $[4, +\infty[$

Calculons sa dérivé $f'(n) = e^n + \frac{1.146020158...}{(n+1)^2}$ 'son signe est toujours positif puisque que

avec $n > 2$, e^n positif plus un quotient positif $\Rightarrow f'(n) > 0 \Rightarrow f(n)$ est strictement

croissante entre $f(4) = 54,3689462$ Et $+\infty \Rightarrow e^n > \frac{4}{3,49034296 \cdot (n+1)}$

\Rightarrow L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour $m = \frac{n+1}{4}$.

c) détermination des « couplets Goldbach » parmi $\frac{n}{4}$ valeur minimale des couplets impairs générés par tout $n > 2$, entier positif pair.

$$\text{Partant du } \frac{m}{2 \log(m)} \cdot \left(\frac{m}{2 \log(m)} + 1 \right) > 0$$

Et après simplification, arrivant à $e^m > \frac{1}{m}$ ($m = \frac{n}{4}$, dans ce cas)

$$\Rightarrow e^{\frac{n}{4}} > \frac{1}{\frac{n}{4}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{n}{4}} > \frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow e^n \cdot e^{\frac{1}{4}} > \frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow e^n > \frac{4}{\frac{1}{e^4 \cdot n}}$$

$$\Rightarrow e^n > \frac{4}{1.2840254 \dots \cdot n} \quad (2)$$

Soit la fonction $g(n) = e^n - \frac{4}{1.2840254 \dots \cdot n} = e^n - \frac{3.115203 \dots}{n}$

$g(n)$ est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (2) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit $n > 2$. $g(n)$ étant défini dans l'intervalle $[4, +\infty[$

Calculons sa dérivé $g'(n) = e^n + \frac{3.115203 \dots}{n^2}$, son signe est toujours positif puisque avec $n > 2$, e^n positif plus un quotient positif $\Rightarrow g'(n) > 0 \Rightarrow g(n)$ est strictement croissante entre $g(4) = 53,8193492$ Et $+\infty \Rightarrow e^n > \frac{4}{3,49034296 \cdot (n+1)}$

\Rightarrow L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour $m = \frac{n}{4}$.

d) détermination des « couplets Goldbach » parmi $\frac{n+2}{4}$ valeur maximale des couplets impairs générés par tout $n > 2$, entier positif pair.

Partant du $\frac{m}{2 \log(m)} \cdot \left(\frac{m}{2 \log(m)} + 1 \right) > 0$

Et après simplification, arrivant à $e^m > \frac{1}{m}$ ($m = \frac{n+2}{4}$, dans ce cas)

$$\Rightarrow e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{1}{\frac{n+2}{4}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{4}{n+2}$$

$$\Rightarrow e^n \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdot e^{\frac{2}{4}} > \frac{4}{(n+2)}$$

$$\Rightarrow e^n \cdot e^{\frac{3}{4}} > \frac{4}{n+2}$$

$$\Rightarrow e^n > \frac{4}{e^{\frac{3}{4}} \cdot (n+2)}$$

$$\Rightarrow e^n > \frac{4}{2.1170... \cdot (n+2)} \quad (3)$$

Soit la fonction
$$h(n) = e^n - \frac{4}{2.1170... \cdot (n+2)} = e^n - \frac{1.889466...}{(n+2)}$$

$h(n)$ est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (3) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit $n > 2$. $h(n)$ étant défini dans l'intervalle $[4, +\infty [$

Calculons sa dérivé
$$h'(n) = e^n + \frac{1.889466...}{(n+1)^2}$$
 'son signe est toujours positif puisque que avec

$n > 2$, e^n positif plus un quotient positif $\Rightarrow h'(n) > 0 \Rightarrow h(n)$ est strictement croissante

entre $h(4) = 54,283239$ Et $+\infty \Rightarrow e^n > \frac{4}{2.1170... \cdot (n+2)}$

\Rightarrow L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour $m = \frac{n+2}{4}$.

e) Conclusions :

nous avons déduit que l'énoncé de la conjecture de Goldbach est équivalent à « $\forall N$ pair $> 3, \exists$ un couplet Goldbach (p, p') généré par $N / N = p + p'$ » ce qui, comme nous avons vu ci-dessus

Peut être traduit par « l'inéquation de Goldbach » après simplification, par :

$$\frac{m}{2 \log(m)} \cdot \left(\frac{m}{2 \log(m)} + 1 \right) > 0$$

Où m correspond au cardinal des couplets impairs, dans ce cas, ce cardinal qui pour tout n pair > 2 , s'alterne entre $\frac{n+2}{4}$ et $\frac{n}{4}$ ou une moyenne de $\frac{n+1}{4}$

Nous avons démontré que pour ces trois cardinaux, l'inéquation de Goldbach reste vraie

$\forall n$ pair > 2 , c'est-à-dire que pour tout pair $> 2, \exists$ un couplet Goldbach dont la somme des 2 éléments égale à $n \Rightarrow$ la conjecture forte de Goldbach est vrai CQFD.

II- Démonstration de la conjecture Faible de C. Goldbach

a) détermination de la suite des décompositions de triplets impairs générés par tout impair > 5

Précisions :

- un triplet commutatif impair est généré 6 fois par tout impair $n > 5$, soit (a,b,c) ; (a,c,b) , (b,a,c) ; (b,c,a) ; (c,a,b) et (c,b,c) . Comme nous sommes concernés par la somme $n = a+b+c$ pour l'énoncé de la conjecture faible, vu la commutativité de l'addition on prend dans le décompte des impairs qu'une seule fois (a,b,c) .

- un triplet Goldbach, c'est tout triplet impair et premier $(a, b, c$ premiers) qui respecte l'énoncé de la Conjecture faible par rapport au nombre n impair qui le génère. ($n = a+b+c$)

Nous savons par le théorème 2, ci-dessus (b, n°2) que le nombre de triplets ($k=3$) générés par tout

impair n est égale à
$$\Gamma_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} \quad (1)$$

Commençons par cette observation inductive de ces 2 suites des triplets :

Rang du n impair	nombre de triplet Dédit par (1)	nombre de triplet impairs observés	dédution de la formule qui génère les triplets impairs pour chaque impair n. À partir de son rang (rang = 0 pour 1)
0 (1)	$3! / (3! * 0!) = 1$	1	$3! / (3! * 0!) = 1$
1 (3)	$5! / (3! * 2!) = 10$	4	$(3+1)! / (3! * (0+1)!) = 4$
2 (5)	$7! / (3! * 4!) = 35$	10	$(3+2)! / (3! * (0+2)!) = 10$
3 (7)	$9! / (3! * 6!) = 84$	20	$(3+3)! / (3! * (0+3)!) = 20$
4 (9)	$11! / (3! * 8!) = 165$	35	$(3+4)! / (3! * (0+4)!) = 35$
5 (11)	$13! / (3! * 10!) = 286$	56	$(3+5)! / (3! * (0+5)!) = 56$
6 (13)	$15! / (3! * 12!) = 455$	84	$(3+6)! / (3! * (0+6)!) = 84$
.....
r	Γ_n^3	$T(r)$	$(3+r)! / (6 * (r)!) = T(r)$

Soit $\frac{(3+r)!}{3! * r!}$ la formule explicite de la récurrence déduite ci-dessus qui permet, à partir du rang d'un entier impair positif n , de connaître le cardinal ($T(r)$) des triplets impairs généré par ce dernier. Exprimer directement cette formule en fonction de ce nombre impair ($T(n)$) :

Comme il existe une bijection entre le rang et n impair $\Rightarrow \forall (r, n) \in \mathbb{N}, n = 2r + 1$

$$\Rightarrow r = \frac{(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{\left(3 + \frac{(n-1)}{2}\right)!}{3! * \left(\frac{(n-1)}{2}\right)!} = \frac{\left(\frac{(n+5)}{2}\right)!}{3! * \left(\frac{(n-1)}{2}\right)!} = T(n) \quad \text{en simplifiant :}$$

$$T(n) = \frac{\left(\frac{(n+5)}{2}\right)! * \left(\frac{(n+3)}{2}\right)! * \left(\frac{(n+1)}{2}\right)! * \left(\frac{(n)}{2}\right)! * \left(\frac{(n-1)}{2}\right)!}{6 * \left(\frac{(n-1)}{2}\right)!}$$

$$T(n) = \frac{(n^2+8.n+15)(n+1)}{6 \cdot 2^3} = \frac{(n^3+9.n^2+23.n+15)}{48}$$

LEMME 3 :

Pour Tout n , impair $> 5 \in 2N+1$, l'ensemble des entiers positifs impairs, le nombre de décompositions D généré par n , en triplets, dont les éléments a, b et c sont impairs est :

$$T(n) = \frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$$

La preuve du lemme 3 se trouve dans la formule explicite de la récurrence définie par la fonction $f(n)$, qui pour tout n impair > 5 , $f(n) =$ au nombre de triplets impairs générés par n :

$$f: 2N+1 \setminus \{1, 3, 5\} \rightarrow N: n \rightarrow \frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48} \quad (2N+1 : \text{ensemble des entiers impairs positifs})$$

b) détermination des « triplets Goldbach » parmi la $T(n)$ des triplets impairs générés par tout entier positif impair > 5

La conjecture faible de Goldbach est équivalente donc à « $\forall N$ impair > 5 , \exists un triplet Goldbach (p, p', p'') généré par N / $N = p + p' + p''$ » (p, p' et p'' , premiers).

Le cardinal des triplets Goldbach $T(m) =$ au nombre de combinaison répétées de 3 parmi $\pi(m)$, m est réduit à $\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$, qui constitue le nombre de triplets impairs généré par tout n impair > 5 , dont la somme respecte la conjecture et dont on cherche à estimer les triplets Goldbach par $\pi(m)$.

$$T(m) = \Gamma \pi(m)^3 = \frac{(\pi(m) + 3 - 1)!}{3! (\pi(m) - 1)!} \quad (\text{d'après le théorème 2°})$$

$$T(m) = \frac{(\pi(m)+2) \cdot \pi(m+1) \cdot \pi(m) \cdot (\pi(m)-1)!}{3! \cdot (\pi(m)-1)!}$$

$$T(m) = \frac{\pi(m) \cdot (\pi(m)^2 + 3\pi(m) + 2)}{6} \quad (\text{posons } \pi(m) = \frac{m}{\log(m)})$$

$$T(m) = \frac{\frac{m}{\log(m)} \cdot \frac{m}{\log(m)}^2 + 3 \cdot \frac{m}{\log(m)} + 2}{6}$$

$$T(m) = \frac{m}{6 \cdot \log(m)} \cdot \left[\left(\frac{m}{6 \cdot \log(m)} \right)^2 + \frac{3 \cdot m}{6 \cdot \log(m)} + \frac{2}{6} \right]$$

$$T(m) = \frac{m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2}{36.\log(m)^3}$$

Dans ce cas, cela revient à exprimer la conjecture faible de Goldbach par l'inéquation faible de Goldbach suivante :

$$\frac{m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2}{36.\log(m)^3} > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}$$

Ou bien

$$m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2 > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}$$

c) étude de l'inéquation faible de Goldbach en tant que fonction composée pour connaître son signe et variation.

Soit $f(n) = \frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}$, définit dans $[7, +\infty[$; sa dérivé $f'(n) = \frac{3.n^2 + 18.n + 23}{48}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur $3.n^2 + 18.n + 23$ qui est positif dans $]-\infty, -4.15.[$ et $]1.846.., +\infty[$, -4.15 et 1.846 étant respectivement les racines du numérateur,

$$[7, +\infty[\subset]1.846.., +\infty[\Rightarrow f'(x) > 0$$

Soit $g(n) = n^3 + 3.n^2.\log(n) + 2.n.\log(n)^2$, définit dans $[7, +\infty[$;

$$\text{Sa dérivé } g'(n) = 2.\log(n)^2 + 6.n.\log(n) + 4.\log(n) + 3.n^2 + 3n$$

Il est bien évident que le signe de $g'(n) > 0$ puisse que $\forall n > 0$ son produit ou sa sommation par n ou $\log(n)$ sont toujours positif.

$g \circ f = g(f(n))$ comme le stipule l'inéquation faible de Goldbach

$$g \circ f = \left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right)^3 + 3.\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right)^2.\log\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right) + 2.\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right).\log\left(\left(\frac{n^3 + 9.n^2 + 23.n + 15}{48}\right)\right)^2$$

L'inéquation faible de Goldbach consiste alors à démontrer $g \circ f > 0$

1° - ensemble de définition : $[7, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R} , ensemble des réels)

$$n \rightarrow g(f(n))$$

$g \circ f$

2° - dérivé :

Théorème 3 : si f est dérivable sur un intervalle I , et g dérivable sur I , alors la composé $g \circ f$ Est dérivable sur I , $(g \circ f)' = (g' \circ f) * f'$

$$(g \circ f)' =$$

$$\left[2 \cdot \log\left(\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right)\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right) \cdot \log\left(\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right)\right) + 4 \cdot \log\left(\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right)\right) + 3 \cdot \left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right) \right] \cdot \left(\frac{3n^2+18n+23}{48}\right)$$

Le signe de $(g \circ f)' > 0$ car le signe de $\left(\frac{n^3+9n^2+23n+15}{48}\right)$ et sa dérivé $\frac{3n^2+18n+23}{48}$ est > 0 , comme nous avons vu ci-dessus. Ensuite l'expression de $(g \circ f)'$ par la sommation ou le produit d'une quantité positif avec son logarithme positif, et par le produit de $f'(n)$ positif, est toujours positif

$$\Rightarrow (g \circ f)' > 0$$

3° - limites :

Théorème 4 : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (g \circ f)(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(f(n)) = +\infty$$

Il est bien évident que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+9n^2+23n+15}{48} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + 3n^2 \cdot \log(n) + 2n \cdot \log(n)^2 = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g \circ f)(n)$

4° - tableau de variation :

n	7	$+\infty$
$(g \circ f)'$		+
$g \circ f$	a	$+\infty$

d) conclusion :

$g \circ f$ est strictement croissante entre $a \gg 7$ et $+\infty \Rightarrow g \circ f > 0$

$a > 1$ et $g \circ f > 0 \Leftrightarrow \forall N$ impair $> 5, \exists$ un triplet Goldbach (p, p', p'') généré par $N / N = p + p' + p'' \Leftrightarrow$ la conjecture faible de Goldbach est vraie CQFD.

Référence :

[1] : techno science.net

[2] : wikipédia (Γ_n^k se lit « Gamma nk »)