

# Modelando matemáticamente, El “Slinky” en caída libre

James Smith  
23 septiembre 2016

## Abstract

Se intentó obtener soluciones analíticas para el “Slinky en caída libre”. Los primeros dos, que usaron la ecuación de la onda, fracasaron por razones distintas. El primer intento usó las series Fourier, pero no pudo cumplir las condiciones de frontera. El segundo usó transformadas Laplace; de esa forma sí, cumplió las condiciones iniciales y de frontera, y predijo, con corrección, que la aceleración del baricentro del Slinky debe ser igual a  $g$  (la aceleración gravitatoria). Sin embargo, se equivocó en cuanto predijo que el extremo superior del Slinky caería a través de la parte del Slinky que está en reposo. Esta predicción no fue un defecto de las transformadas Laplace; sino un artefacto del uso de la ecuación de la onda para un resorte de tensión en este caso específico, que trata de una onda de choque.

El tercer intento usó el teorema impulso-momento. Hizo predicciones coherentes entre sí, y que concuerdan con observaciones empíricas.

Cabe señalar que la modelación del Slinky en caída libre presentada aquí trata solamente su movimiento en la dirección vertical, haciendo caso omiso a su rotación.

## 1 Introducción

El interesante fenómeno del Slinky en caída libre (Fig. 1) se ha analizado con extensión por muchos autores; entre ellos, [1]-[3]. Ellos señalaron que el Slinky se comporta así por ser un resorte de tracción: es decir, que está en tensión (ligeramente, en el caso de un Slinky), con todas sus vueltas trincadas.

En este documento, examinaremos tres intentos por modelar el comportamiento del Slinky matemáticamente. Los primeros dos usarán la ecuación de la onda. Para resolverla, junta con las condiciones iniciales y de frontera que resultan, el primer intento emplea las series Fourier, mientras el segundo recurre a las transformadas de Laplace. Veremos que ni el uno ni el otro de estos intentos funciona.

Tomando en cuenta lo aprendido a través de los primeros dos intentos, el tercer retomará a [1], descartando el uso de la ecuación de la onda, para adoptar un modelo basado en los conceptos de impulso y cantidad de movimiento. Se redondeará la presentación analizando varias de las predicciones del modelo.

## 2 Descripción del fenómeno por modelarse, y la notación que se usará en este documento

Para comenzar, definamos unas cuantas de las características de un Slinky. Primero, por ser un “resorte de tensión”, sus vueltas están trincadas aun cuando no se le aplica

En este documento, despreciaremos la fuerza necesaria para separar las vueltas del Slinky.

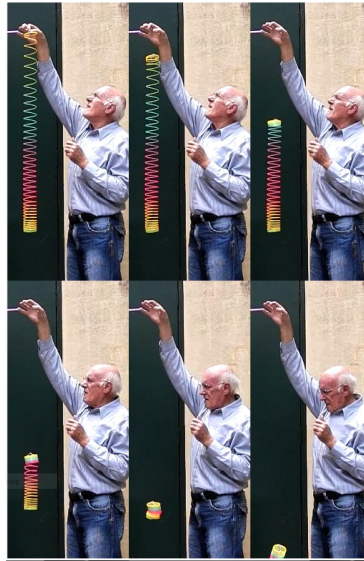


Figure 1: El fascinante fenómeno del “Slinky en caída libre”. (Extractos de una grabación hecha por [3] con una cámara de alta velocidad.) Se colgó el Slinky de un soporte. Cuando el Slinky había alcanzado su condición de equilibrio, y estaba en reposo, se le soltó el extremo superior. El Slinky no se cayó todo a la vez; en cambio, solamente el extremo superior descendió, ocasionando que se formara debajo del mismo una zona en la que todas las vueltas estuvieron trincadas. El extremo inferior se quedó inmóvil hasta que dicha zona lo alcanzara.

ninguna fuerza. Es necesario aplicarle una fuerza para separarlas. En el caso de un Slinky, la fuerza necesaria es muy pequeña, por lo que la despreciaremos.

Las definiciones de las variables  $M$  y  $E$ .

Dos características del Slinky que sí, son medulares en nuestro análisis son su masa por unidad de longitud ( $M$ ) y su “constante elástica”,  $E$ . Esta última no es el constante “Hooke” del resorte; en cambio, se define según

$$F = E \times \frac{\Delta l}{l},$$

donde  $\Delta l$  significa la elongación provocada en un trozo de longitud  $l$  del Slinky, por la fuerza  $F$ .

Ahora, para conocer mejor el fenómeno que queremos modelar, examinemos la “historia” del punto arbitrario  $P$  en las Figuras 2-7. Al fijarse el Slinky—con sus

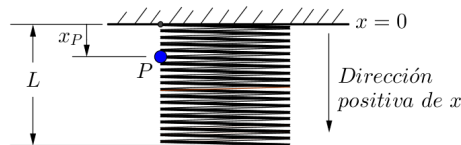


Figure 2: El Slinky fijado en el soporte, con todas sus vueltas trincadas. La variable  $x$  es la distancia entre el soporte y la posición que un punto ocupa en el Slinky trincado. La longitud del Slinky, en esta condición, se denomina de  $L$ .

vueltas todavía trincadas—al soporte,  $P$  se encuentra a la distancia  $x_P$  debajo del so-

porte (Fig. 2). A continuación, se permite que el Slinky se extienda, bajo la influencia de la gravedad. Cuando el Slinky ha alcanzado su condición de equilibrio, y está en el reposo (Fig. 3), el punto  $P$  estará a la distancia

$$z(x_P) = \left[1 + \frac{MgL}{E}\right] x_P - \left[\frac{Mg}{2E}\right] x_P^2 \quad (2.1)$$

debajo del soporte [4], siendo  $g$  la aceleración gravitatoria.

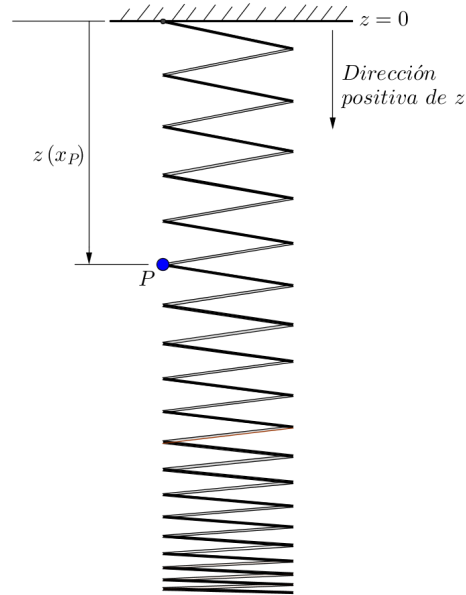


Figure 3: El Slinky suspendido del soporte, y extendido bajo el efecto de su propio peso. La variable  $z(x)$  es la distancia entre el soporte y la posición que ocupa en esta condición, el punto que ocupaba la posición  $x$  en Fig. 2.

Acto seguido, se suelta el extremo superior del Slinky. Conforme el extremo superior descienda, se va formando abajo de éste una zona en la que todas las vueltas están, de nuevo, trincadas. O sea, en la que el paso entre las vueltas es igual al que había antes de que el Slinky fuera colgado.

Gracias a esta “recuperación del paso original” la zona trincada que va formándose tiene tres características claves: (1) en todo momento, la velocidad de todo punto dentro de la zona es igual a la velocidad del extremo superior; (2) la distancia entre cualesquier dos puntos  $P$  y  $Q$  dentro de la zona es igual a la distancia (a saber,  $x_P - x_Q$ ) que había entre éstos antes de que el Slinky fuera colgado, y (3) la masa por unidad de longitud de la zona trincada es de  $M$ .

En cuanto a nuestro punto  $P$ , éste quedará en reposo, a la distancia  $z(x_P)$  debajo del soporte, hasta el instante (lo llamaremos “ $t_P$ ”) en el que la frontera inferior de la zona trincada lo alcance. En dicho instante, la distancia entre  $P$  y el extremo superior del Slinky será, todavía,  $x_P$ . O sea, la longitud de la zona trincada en el instante  $t_P$  será de  $x_P$ .

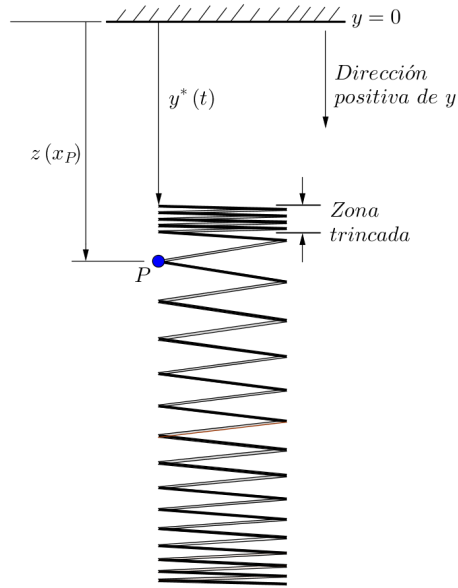


Figure 4: El extremo superior del Slinky ha sido desconectado del soporte. Se va formando una “zona trincada”, debajo de la cual todos los puntos del Slinky todavía están en las posiciones que ocupaban en la Fig. 3.

### 3 Intentos por resolver el problema usando la ecuación de la onda

En este apartado, examinaremos dos intentos por resolver la PDE+ICs+BCs. El primero usa series Fourier; el segundo usa transformadas Laplace.

#### 3.1 La ecuación en diferenciales parciales

Tomando como ejemplo el punto  $P$  en las Figuras 2-6,  $x_P$  es la distancia a la que  $P$  se encuentra abajo del soporte en el Slinky trincado (Figura 2);  $z(x_P)$  es su distancia desde el soporte en el Slinky colgado, pero todavía en reposo (Figura 3);  $y(x_P, t)$  es su distancia, en el cualquier instante  $t$  (Figura 6);  $y z(x_P, t)$  es la distancia entre su posición en el instante  $t$ , y su posición en el Slinky colgado y en reposo. Es más, examinando las Figuras arriba mencionados se discierne que durante el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq t_P$ ,  $y(x_P, t) = z(x_P)$ .

En [4], se definieron las variables

- $z = \left[1 + \frac{MgL}{E}\right] x - \frac{Mg}{2E} x^2$  (véanse Ec. (2.1) y las Figuras 2 y 3);
- $y(x, t)$  = la distancia, en el instante  $t$ , desde el soporte hasta el punto que estaba a la distancia  $x$  desde el soporte en el Slinky “trincado” (Véase la Figura 6.); y
- $r(x, t) = y(x, t) - z(x)$ .

Usando estos variables, la ecuación en en diferenciales parciales para la Slinky en caída libre es

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{M}{E} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

#### 3.2 Condiciones iniciales (ICs) y de frontera (BCs)

Para un Slinky colgado y en reposo, las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

**IC1:**  $r(x, t = 0) = 0$ .

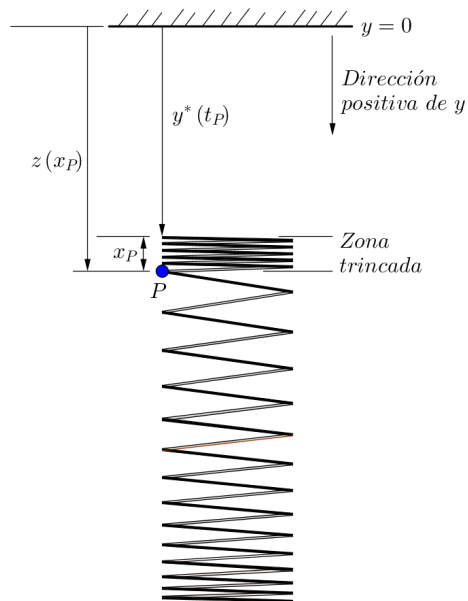


Figure 5: El extremo superior de la “zona trincada” ha alcanzado el punto  $P$ , el cual está a la distancia  $z(x_P)$  desde el soporte.

En  $t = 0$ , el Slinky todavía está colgado; por lo tanto  $y(x, 0) = z(x)$ .

**IC2:**  $\frac{\partial r}{\partial t}(x, t = 0) = 0$ .

En  $t = 0$ , el Slinky todavía está en reposo.

**BC1:**  $\frac{\partial r}{\partial x}(0, t > 0) = -\frac{MgL}{E}$ .

¿Por qué? Bueno, en todo instante  $t > 0$  el extremo superior del Slinky está libre, por lo que no hay ninguna fuerza neta que estire ésta porción. Por lo tanto,  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t > 0)$  tiene el valor que tendría en el Slinky trincado. Dicho valor es 1: en el Slinky trincado, al avanzar la distancia  $\Delta x$  en el Slinky, se baja la distancia  $\Delta x$  con respecto al soporte. Entonces,

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 1.$$

También,  $\frac{dz}{dx}(0) = 1 + \frac{MgL}{E}$ . Así que

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x}(0, t > 0) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [y(x, t) - z(x)] \text{ en } x = 0, \\ &= 1 - \left(1 + \frac{MgL}{E}\right) \\ &= -\frac{MgL}{E}. \end{aligned}$$

**BC2:**  $\frac{\partial r}{\partial x}(L, t) = 0$ .

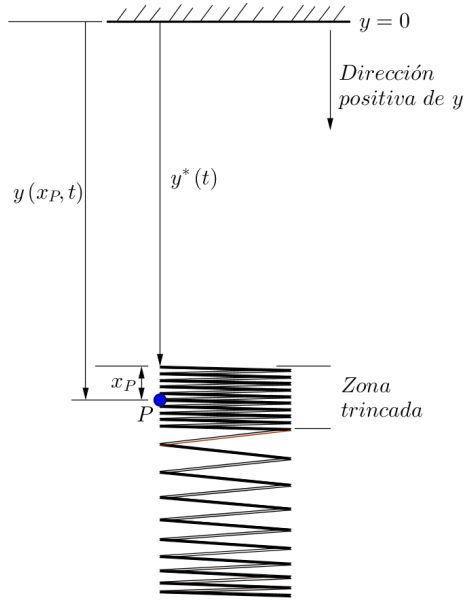


Figure 6: El punto  $P$  se ha incorporado en la zona trincada, y va bajando a la misma velocidad que el resto de la zona (inclusive el extremo superior de la zona). Permanece a la distancia  $x_P$  abajo del extremo superior.

Al igual que el extremo superior en caída libre, el extremo inferior del Slinky está libre. Por lo tanto,  $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 1$ . Resulta que  $\frac{dz}{dx}(x = L) = 1$ , también. Por lo tanto, en  $x = L$ , se verifica que  $\frac{\partial r}{\partial x} \left( = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{dz}{dx} \right) = 0$ .

### 3.3 Resolución por medio de series Fourier

En [4], que trató un Slinky vibrando, se demostró que en dicho caso la ecuación en diferenciales parciales (3.1) se puede resolver a través de series Fourier. Como el primer paso en el uso de dicha técnica, se supone que la función  $r(x, t)$  es separable. Es decir, que es sí producto de dos funciones, la una de las cuales es una función de  $(x)$ , únicamente y la otra de las cuales es una función de  $(t)$ , únicamente:

$$r(x, t) = [X(x)] [T(t)]. \quad (3.2)$$

Bajo esta suposición, (3.1) se transforma en  $XT'' = \frac{E}{M} X''T$ , la cual la transformamos en

$$\frac{E}{M} \left( \frac{X''}{X} \right) = \frac{T''}{T}. \quad (3.3)$$

Por razones que se explican en obras estandartes acerca de PDEs, igualamos ambos lados de (3.3) a  $-\lambda^2$ , con  $\lambda > 0$ :

$$\frac{E}{M} \left( \frac{X''}{X} \right) = \frac{T''}{T} = -\lambda^2. \quad (3.4)$$

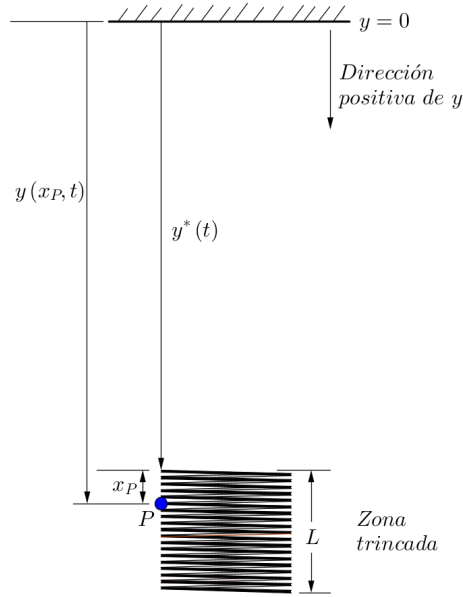


Figure 7: La frontera inferior de la zona trincada ha llegado al fondo del Slinky. La longitud de la zona ya es igual a  $L$ .

Al resolver (3.4), se obtiene

$$X(x) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

$$T(t) = \left[ C\cos\lambda\sqrt{\frac{E}{M}}t + D\sin\lambda\sqrt{\frac{E}{M}}t \right],$$

entonces

$$r(x, t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x) \left[ C\cos\lambda\sqrt{\frac{E}{M}}t + D\sin\lambda\sqrt{\frac{E}{M}}t \right], \quad (3.5)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , y  $\lambda$  son constantes. Para encontrar sus respectivos valores, se examinan las ICs y BCs. IC1 requiere que  $C = 0$ . Por IC2,  $D = 0$ . Ya estamos varados, porque con  $C = 0$  y  $D = 0$ ,  $r(x, t) = 0$  para la totalidad de valores de  $x$  y  $t$ . Entonces, aunque la PDE sí, se puede resolver a través de la separación de variables, las ICs descartan la solución resultante.

Si la separación de variables nos hubiera permitido una solución, ahora seguiríamos a formar una serie de Fourier, así como en pp. 9-11 de [4].

### 3.4 Resolución por medio de Transformadas Laplace

Para usar este método con mayor provecho, retomamos a [5], pp. 7-9, para identificar precisamente qué es lo que queremos saber. Comencemos por reflexionar sobre la naturaleza de la situación física que estamos tratando. A un Slinky colgado de un soporte, y en reposo, se le suelta su extremo superior en alguno instante. Éste es el instante que denominamos " $t = 0$ ". Suponemos que en dicho instante, la totalidad del Slinky está todavía en reposo, y que ningún punto de éste se ha desplazado del lugar que ocupaba

antes de del instante  $t = 0$ . Sobre todo, suponemos que el extremo superior está todavía en  $y = 0$ , y que su velocidad es 0.

Lo arriba escrito no le agrega nada a lo que dijimos en 3.2. Pero ahora, introducimos una idea nueva:

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x, t = 0) = \begin{cases} -\frac{MgL}{E} & x = 0, \\ 0 & x \neq 0. \end{cases}$$

Es decir, que al soltar el extremo superior del Slinky, se le introduce a  $\frac{\partial r}{\partial x}$  una discontinuidad en el extremo superior mismo, pero en ningún otro punto. Según [5] p. 6, esta maniobra es permisible porque aunque la PDE debe ser válida *dentro del Slinky*, no es necesario que lo sea en su contorno.

Para seguir el procedimiento que viene en [5],<sup>1</sup> escribimos (3.1) como

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0. \quad (3.6)$$

donde  $c = \sqrt{\frac{M}{E}}$ . Ahora, a ésta se le efectúa la trasformada Laplace en el tiempo:

$$r(x, t) \rightarrow R(x, s) = \mathcal{L}\{r(x, t)\}(s).$$

Suponiendo la conmutatividad de la derivada parcial con respecto a  $x$  y la trasformada Laplace con respecto al tiempo, o sea, que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}r(x, t)\right\}(s) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{r(x, t)\}(s),$$

tenemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{r(x, t)\}(s) = \frac{\partial^2 R(x, s)}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

También, de acuerdo con las propiedades de la trasformada Laplace,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right\}(s) = \frac{1}{c^2}\left\{s^2\mathcal{L}\{r(x, t)\}(s) - sr(x, 0) - \frac{\partial r}{\partial t}(x, 0)\right\}.$$

Por **IC1**,  $r(x, 0) = 0$ , y por **IC2**,  $\frac{\partial r}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Entonces,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right\}(s) = \frac{1}{c^2}s^2\mathcal{L}\{r(x, t)\}(s) = \frac{1}{c^2}s^2R(x, s).$$

Por lo tanto, la versión trasformada de (3.6) resulta ser

$$\frac{\partial^2 R(x, s)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}s^2R(x, s) = 0, \quad (3.8)$$

cuya solución sería

$$R(x, s) = A(s)\exp\left(-\frac{s}{c}x\right) + B(s)\exp\left(\frac{s}{c}x\right). \quad (3.9)$$

<sup>1</sup>Véase también <http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma-841/laplace/tma4.htm> acerca de las propiedades de la trasformada y su inversa.



Retomando de nuevo a [5], notamos que el término con  $\exp\left(-\frac{s}{c}x\right)$  corresponde a una onda que se propaga en la dirección positiva de  $x$ , y el término con  $\exp\left(\frac{s}{c}x\right)$  en la dirección negativa. Ya que cualquier punto dado del Slinky en libre caída se mueve solamente en la dirección positiva de  $x$ , igualamos  $B(s)$  a 0. Así que

$$R(x, s) = A(s) \exp\left(-\frac{s}{c}x\right). \quad (3.10)$$

Para encontrar el valor de  $A(s)$ , usamos **BC2**:  $\frac{\partial r}{\partial x}(0, t > 0) = -\frac{MgL}{E}$ . Debemos transformar ésta también, según

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial r(x, t)}{\partial x}\right\}(s) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{r(x, t)\}(s) = \frac{\partial}{\partial x}R(x, s). \quad (3.11)$$

Para encontrar la transformada Laplace de  $-\frac{MgL}{E}$ , reconocemos que (1) la transformada Laplace es un operador lineal, y (2) la transformada de la función  $f(t) = 1$  es  $\frac{1}{s}$ . Por lo tanto, la transformada de  $-\frac{MgL}{E}$  es  $-\frac{MgL}{E}\mathcal{L}\{1\} = -\frac{MgL}{sE}$ . Entonces, la versión transformada de **BC2** es

$$\frac{\partial}{\partial x}R(0, s) = -\frac{MgL}{sE}. \quad (3.12)$$

A partir de ésta, y (3.10), escribimos

$$-\frac{s}{c}A(s) = -\frac{MgL}{sE}, \quad (3.13)$$

por lo que

$$A(s) = \frac{MgLc}{s^2E} = \frac{gL}{s^2}\sqrt{\frac{M}{E}}, \quad (3.14)$$

porque  $c = \sqrt{\frac{E}{M}}$ . Total,

$$R(x, s) = \frac{gL}{s^2}\sqrt{\frac{M}{E}} \exp\left(-\frac{s}{c}x\right). \quad (3.15)$$

Ahora, para encontrar  $r(x, t)$ , efectuamos la transformada inversa:

$$r(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(x, s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{gL}{s^2}\sqrt{\frac{M}{E}} \exp\left(-\frac{s}{c}x\right)\right\}.$$

Aprovechando la linealidad de la transformada inversa, escribimos esta última como

$$r(x, t) = gL\sqrt{\frac{M}{E}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{s}{c}x\right)\right\}. \quad (3.16)$$

Para encontrar la transformada inversa de la función dentro de las llaves, usamos uno de los Teoremas de Traslación para la transformada inversa de Laplace. Sean  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ , y  $a$  una constante. Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\exp(-at)F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & t > a, \\ 0 & t \leq a. \end{cases}$$

Éste se puede abreviar como

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \exp(-at) F(s) \} = \mathcal{H}(t-a) f(t-a), \quad (3.17)$$

siendo  $\mathcal{H}$  la *función escalón de Heaviside*:

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Ahora, reexaminemos 3.16. Resulta que  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t$ . Por lo tanto, escribimos  $\frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{s}{c}x\right)$  como  $\left[ \exp\left(-\frac{x}{c}s\right) \right] \left( \frac{1}{s^2} \right)$  para que  $\frac{x}{c}$  tome el papel de la  $a$  en 3.17, y  $\frac{1}{s^2}$  el de  $F(s)$ . Con base en 3.17, por fin podemos efectuar la transformación que viene en 3.16, para escribir

$$r(x, t) = gL\sqrt{\frac{M}{E}} \left( t - x\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \left[ \mathcal{H} \left( t - x\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \right]. \quad (3.18)$$

Porque  $r(x, t) = y(x, t) - z(x)$ ,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= z(x) + r(x, t) \\ &= \left[ 1 + \frac{MgL}{E} \right] x - \frac{Mg}{2E} x^2 + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \left( t - x\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \left[ \mathcal{H} \left( t - x\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Notemos que  $y(x, t)$  es la posición con respecto al soporte, en el instante  $t$ , del punto en el Slinky que se encontró a la distancia  $x$  desde el soporte en el Slinky "trincado". Cuando desarrollamos una ecuación para la aceleración del baricentro en el Apartado 3.4.1, nos convendrá tener una fórmula para la función  $y(z, t)$  también, siendo ésta la posición con respecto al soporte, en el instante  $t$ , del punto en el Slinky que se encontró a la distancia  $z$  desde el soporte en el Slinky "colgado, pero todavía en reposo". Para desarrollar tal función, reconocemos que  $z(x)$  se incrementa con  $x$ , entonces al usar la fórmula cuadrática para encontrar  $x(z)$  a partir de la definición  $z = \left[ 1 + \frac{MgL}{E} \right] x - \frac{Mg}{2E} x^2$ , la única raíz que funciona es la

$$x(z) = \frac{E}{M} \left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E}L - \sqrt{\left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E}L \right)^2 - \frac{2M}{gE}z} \right). \quad (3.20)$$

Con esto,

$$y(z, t) = z + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \left[ t - \sqrt{\frac{E}{M}} \left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E}L - \sqrt{\left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E}L \right)^2 - \frac{2M}{gE}z} \right) \right] \left[ \mathcal{H} \left( t - x\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \right] \quad (3.21)$$

### 3.4.1 Análisis de la solución obtenida a través de transformadas Laplace

A continuación, veremos que la solución que acabamos de obtener no puede ser correcta, porque predice que las vueltas del Slinky "pasan a través de ellas mismas". No obstante, nuestra solución que si esto pudiera suceder, la aceleración del baricentro del Slinky sería de  $g$ , hacia abajo.

**La naturaleza del movimiento del Slinky en libre caída, según la solución que obtuvimos a través de la trasformada de Laplace** Al examinar (3.21), vemos que el punto del Slinky que está a la distancia  $z$  desde el soporte cuando el Slinky colgado estuvo en reposo, permanece en la misma posición hasta el instante

$$t = \sqrt{\frac{E}{M}} \left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E} L - \sqrt{\left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E} L \right)^2 - \frac{2M}{gE} z} \right).$$

Después, se mueve hacia abajo con la velocidad constante  $gL\sqrt{\frac{M}{E}}$ . Esto se puede ver formalmente encontrando  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , notando que (3.21) tiene la forma de  $z$  más un producto de dos funciones de  $t$ ,

$$y(z, t) = z + \alpha [t - \beta x(z)] \mathcal{H}[t - \beta x(z)],$$

y tomando en cuenta que  $\frac{d\mathcal{H}(u)}{du}$  es cero, salvo en  $u = 0$ , donde es infinito. En el contexto de este problema, podemos decir que  $\frac{d\mathcal{H}(u)}{du}$  es cero, salvo en  $u = 0$ , donde no existe, de modo que

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left( gL\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \mathcal{H} \left[ t - \sqrt{\frac{E}{M}} \left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E} L - \sqrt{\left( \frac{1}{g} + \frac{M}{E} L \right)^2 - \frac{2M}{gE} z} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Nótese que aunque el instante en que un punto del Slinky comience a caer sí, depende de  $z$ , la velocidad con la que cae es independiente de  $z$ . Es decir, en el instante  $t = \tau$ , todos los puntos del Slinky que distaban menos de la distancia

$$\left( \sqrt{\frac{E}{M}} + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

desde el soporte en  $t = 0$  ya están cayendo a la velocidad  $gL\sqrt{\frac{M}{E}}$ , mientras los puntos que distaban más están todavía en el reposo. Todos los puntos del Slinky estarán cayendo cuando

$$\left( \sqrt{\frac{E}{M}} + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = z(L),$$

o sea, cuando

$$\left( \sqrt{\frac{E}{M}} + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = L + \frac{Mg}{2E} L^2, \quad (3.23)$$

$$\text{el cual es equivalente a } \tau = L\sqrt{\frac{M}{E}}. \quad (3.24)$$

Entonces, para  $0 < t < L\sqrt{\frac{M}{E}}$ , la distancia

$$y_{id}(\tau) = \left( \sqrt{\frac{E}{M}} + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \tau - \frac{1}{2}g\tau^2 \quad (3.25)$$

abajo del soporte marca una línea de división entre la parte del Slinky que está cayendo, y la parte que todavía esta en reposo.

Ahora, nos interesa encontrar la distancia entre la posición de dicha línea, y el extremo superior del Slinky. Este extremo comenzó a caer en  $t = 0$ , por lo que en el instante  $\tau$  está a la distancia  $\tau g L \sqrt{\frac{M}{E}}$  abajo del soporte. Por lo tanto, la distancia entre el extremo superior del Slinky y la línea de división y es

$$\underbrace{\left( \sqrt{\frac{E}{M}} + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \tau - \frac{1}{2}g\tau^2}_{\text{línea de división}} - \underbrace{\tau g L \sqrt{\frac{M}{E}}}_{\text{extremo superior}} = \tau \sqrt{\frac{E}{M}} - \frac{1}{2}g\tau^2. \quad (3.26)$$

Ya se ve la dificultad: el valor de  $x$  para el punto del Slinky al que la línea de división llega en  $t = \tau$  es  $\tau \sqrt{E/M}$ . Entonces, según (3.26), para  $\tau > 0$  la distancia entre el extremo superior y el punto del Slinky al que la línea de división ha llegado es menor que el valor de  $x$  para el punto. Ya que el valor de  $x$  para un punto del Slinky es la distancia entre el punto y el extremo superior cuando el Slinky está comprimido, lo que (3.26) nos dice es que para  $\tau > 0$ , la distancia entre el extremo superior y el punto del Slinky al que la línea de división ha llegado es menor que su separación en el Slinky comprimido. Esto es imposible: las vueltas tendrían que “caer a través de ellas mismas”.

Podemos analizar esta imposibilidad desde otros puntos de vista también. Por ejemplo, consideremos el valor que la derivada  $\frac{\partial y}{\partial x}$  toma dentro de la zona a través de la cual la línea de división ha pasado. (A saber, donde  $x < t\sqrt{E/M}$ .) Aplicando a la Ec. (3.19), el mismo razonamiento en cuanto a la derivada de  $\mathcal{H}$  que usamos para llegar a la Ec. (3.22), se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 - \frac{Mgx}{E}. \quad (3.27)$$

O sea,  $\frac{\partial y}{\partial x} < 1$ , salvo en  $x = 0$ . Al explicar BC1 y BC2 (Apartado 3.2), mencionamos que en el Slinky trincado,  $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$ . Un valor menor de 1, para  $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$ , indicaría que el paso entre las vueltas es menor que en un Slinky trincado. Esto no es posible: en verdad, la situación trata de la propagación de una onda de choque ([2]).

Total, la solución que obtuvimos a través de las transformadas de Laplace no cuadra con la realidad en cuanto predice que en cualquiera instante  $\tau$  tal que  $0 < \tau < L\sqrt{M/E}$ , el extremo superior del Slinky—junto con cierta porción más—estará cayendo a través de la parte que está todavía en reposo. No obstante, este resultado demuestra que la mecánica newtoniana sí, predice la formación de una zona compacta, abajo de la cual las vueltas del Slinky están en reposo, y dentro de la cual todo punto cae a la misma velocidad, por cuanto todas las vueltas están en contacto. Retomaremos este punto en el Apartado 4.

**Análisis de la aceleración del baricentro del Slinky** La masa total del Slinky es  $ML$ . La posición en el instante  $\tau$  del incremento de longitud  $dx$  que ocupaba la posición  $x$  en  $t = 0$  es  $y(x, \tau)$ . La masa de dicho incremento es de  $Mdx$ . Entonces la ubicación  $y_b(\tau)$  del baricentro en el instante  $\tau$ , con respecto al soporte, se puede

calcular según

$$y_b(\tau) = \frac{1}{ML} \int_{x=0}^L y(x, \tau) M dx = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L y(x, \tau) dx.$$

Además,  $y(x, \tau) = z(x) + r(x, \tau)$ . Abajo de  $y_{ld}(\tau)$ , la posición de la línea de división (3.25),  $r(x, \tau) = 0$ . Por lo tanto,

$$y_b(\tau) = \frac{1}{L} \left\{ \int_{x=0}^{x[y_{ld}(\tau)]} z(x) + r(x, \tau) dx + \int_{x[y_{ld}(\tau)]}^L z(x) dx \right\},$$

donde  $x[y_{ld}(\tau)]$  es la posición que ocupaba en  $t = 0$ , el punto del Slinky que en el instante  $\tau$  ocupa la posición  $y_{ld}(\tau)$ .

Esta última se puede transformar en

$$y_b(\tau) = \frac{1}{L} \left\{ \int_{x=0}^{x[y_{ld}(\tau)]} r(x, \tau) dx + \int_{x=0}^L z(x) dx \right\}.$$

Pero la posición del baricentro en  $t = 0$  es

$$y_b(0) = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L z(x) dx,$$

entonces, para  $0 < t < L\sqrt{\frac{M}{E}}$  (véase (3.4.1)),

$$y_b(\tau) - y_b(0) = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x[y_{ld}(\tau)]} r(x, \tau) dx. \quad (3.28)$$

Según (3.25),

$$y_{ld}(\tau) = \left( \sqrt{\frac{E}{M}} + gL\sqrt{\frac{M}{E}} \right) \tau - \frac{1}{2}g\tau^2.$$

Usando ésta, y (3.21), podemos identificar que

$$x[y_{ld}(\tau)] = \tau\sqrt{\frac{E}{M}}. \quad (3.29)$$

Para  $0 < x < \tau\sqrt{\frac{E}{M}}$ ,  $\mathcal{H}\left(\tau - x\sqrt{\frac{M}{E}}\right) = 1$ , luego  $r(x, t < \tau) = gL\sqrt{\frac{M}{E}}\left(\tau - x\sqrt{\frac{M}{E}}\right)$ .

Armando todas estas ideas,

$$y_b(\tau) - y_b(0) = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{\tau\sqrt{\frac{E}{M}}} gL\sqrt{\frac{M}{E}}\left(\tau - x\sqrt{\frac{M}{E}}\right) dx = \frac{1}{2}g\tau^2, \quad (3.30)$$

Por lo tanto,  $\frac{d^2 y_B}{d\tau^2} = g$ . Así que nuestro análisis sí, nos lleva a una predicción correcta: el baricentro acelera hacia abajo, con la aceleración gravitatoria  $g$ .

## 4 Resolución partiendo del concepto impulso-momento

### 4.1 Observaciones preliminares

Recordemos que queremos desarrollar una ecuación que relacione la posición del extremo superior del Slinky, con el tiempo transcurrido desde que fue soltado. Todavía no lo hemos logrado, por lo que—en aras de formular un modelo del Slinky que si, predice la posición del extremo superior con precisión—reflexionemos sobre por qué nuestros intentos previos fracasaron.

En el Apartado 3.4.1, sobre todo con relación a la EC. (3.27), observamos que la mecánica newtoniana sí, predice la formación de una zona trincada en el extremo superior del Slinky, afuera de la cual las vueltas del Slinky están en reposo, y dentro de la cual todo punto cae con la misma velocidad. Sin embargo, nuestra manera de aplicar la mecánica newtoniana a nuestro problema dejó abierta la posibilidad de que dicha zona “cayera a través de” la porción en reposo.

### 4.2 Un modelo alternativo, basado en el teorema impulso-momento

Tomando en cuenta las observaciones y reflexiones arriba presentadas, formularemos un modelo nuevo que se explicará con referencia a la “historia” del punto arbitrario  $P$  en las Figuras 8 y 9.

Las observaciones empíricas y cuantitativas presentadas en [3] respaldan este modelo. Es provechoso averiguarlo.

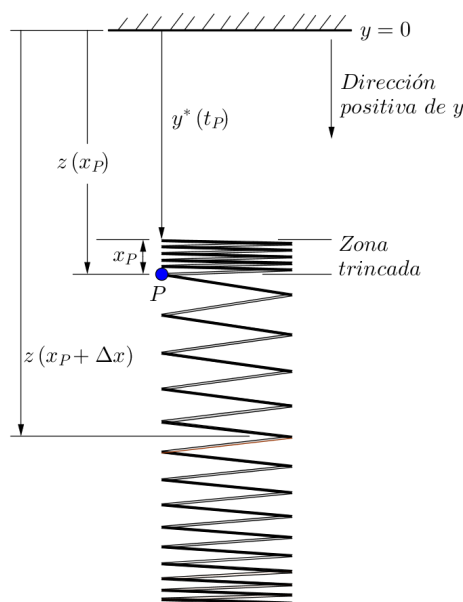


Figure 8: El Slinky en el instante  $t_P$ , cuando la frontera inferior de la zona trincada alcanza el punto  $P$ . Nótese el tramo entre  $y^*(t_P)$  y  $z(x_P + \Delta x)$ , que se trata en el análisis impulso-momento presentado en el texto. En este instante, solamente la zona trincada (o sea, el tramo entre  $y^*(t_P)$  y  $z(x_P)$ ) está en movimiento, con velocidad  $\frac{dy^*}{dt}(t_P)$ . Todo punto abajo de dicha zona está en reposo, en particular el tramo entre  $z(x_P)$  y  $z(x_P + \Delta x)$ .

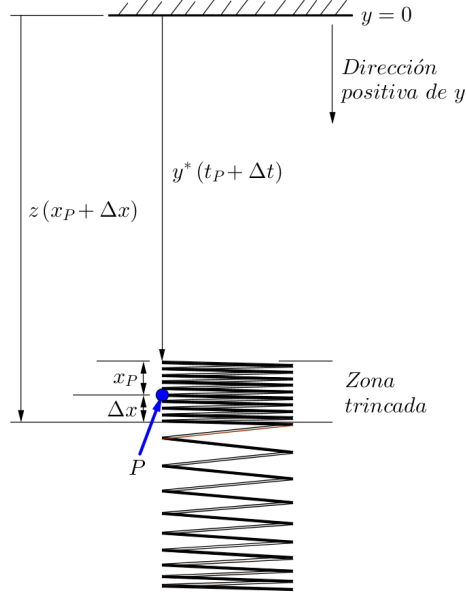


Figure 9: El Slinky en el instante cuando la frontera inferior de la zona trincada alcanza la posición  $z(x_P + \Delta x)$  señalada en la Fig. 8. Ha transcurrido cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$  desde la Figura 8, por lo que el tiempo total transcurrido desde que el extremo superior fue soltado, ya es de  $t_P + \Delta t$ . La longitud de la zona ya es de  $x_P + \Delta x$ , y la zona entera se baja con la velocidad  $\frac{dy^*}{dt}(t_P + \Delta t)$ .

Al fijarse el Slinky—con sus vueltas todavía trincadas—al soporte, el punto  $P$  se encuentra a la distancia  $x_P$  debajo del soporte. A continuación, se permite que el Slinky se extienda, bajo la influencia de la gravedad. Cuando el Slinky haya alcanzado su condición de equilibrio, y este en reposo, el punto  $P$  estará a la distancia

$$z(x_P) = \left[1 + \frac{MgL}{E}\right] x_P - \left[\frac{Mg}{2E}\right] x_P^2 \quad (4.1)$$

debajo del soporte.

Acto seguido, se suelta el extremo superior del Slinky. Conforme el extremo superior descienda, se va formando por acumulación via colisiones inelásticas, en la parte superior del Slinky, una zona en la que todas las vueltas están, de nuevo, trincadas. O sea, en la que el paso entre las vueltas es igual al que había antes de que el Slinky fuera colgado. Gracias a esta “recuperación del paso original”, la zona que se va formando tiene dos características claves: (1) en todo momento, la velocidad de todo punto dentro de la zona es igual a la velocidad del extremo superior; y (2) la distancia entre cualesquier dos puntos dentro de la zona es igual a la separación que había entre éstos antes de que el Slinky fuera colgado.

En cuanto a nuestro punto  $P$ , éste quedará en reposo hasta el instante (lo llamaremos “ $t_P$ ”) en el que la frontera inferior de la zona lo alcance. En dicho instante, la distancia entre  $P$  y el extremo superior del Slinky será, de nuevo,  $x_P$ . O sea, la longitud de la zona será  $x_P$ , por lo que la masa de la zona será  $Mx_P$ .

### 4.3 Formulación matemática del modelo basado en el teorema impulso-momento

Continuando con el análisis que comenzamos en el apartado anterior, notemos que cuando la frontera inferior de la zona trincada alcanza el punto  $P$ , éste estará, todavía, a la distancia  $z(x_P)$  debajo del soporte. Entonces, cuando la zona alcanza el punto  $P$ ,

$$y^*(t_P) + x_P = z(x_P) = \left[1 + \frac{MgL}{E}\right] x_P - \left[\frac{Mg}{2E}\right] x_P^2, \quad (4.2)$$

donde  $y^*(t_P)$  es la distancia entre el soporte y el extremo superior del Slinky en el instante  $t_P$ . Por lo tanto, la distancia entre el soporte y el extremo superior del Slinky en  $t_P$  será

$$y^*(t_P) = \left[\frac{MgL}{E}\right] x_P - \left[\frac{Mg}{2E}\right] x_P^2. \quad (4.3)$$

#### Una fórmula para la longitud de la zona en función de $y^*$ :

Por reconocer que  $P$  es un punto arbitrario, y que  $x_P$  es la longitud que la zona tiene cuando el extremo superior del Slinky está en la posición  $y^*$ , podemos despejar a la  $x_P$  en la Eq. (4.3) para saber la longitud de la zona en función de  $y^*$ :

$$\begin{aligned} \text{Longitud de la zona} &= x_P \\ &= L - \sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*}. \end{aligned}$$

Por supuesto, esta ecuación es válida solamente para  $y^* \leq \frac{MgL^2}{2E}$ , siendo éste el valor de  $y^*$  para el cual  $x_P = L$ .

Notamos también, que en  $t_P$  la zona tendrá cierta velocidad, la cual es  $\frac{dy^*}{dt}(t_P)$ . La longitud de la zona (ver la nota al margen) será

$$\text{Longitud de la zona en } t_P = L - \sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*(t_P)}. \quad (4.4)$$

Ahora, consideremos la situación en el instante  $t_P + \Delta t$ . Conforme el extremo superior del Slinky se bajó durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la zona acumuló más del Slinky, por lo que su longitud ya es de  $x_P + \text{algún } \Delta x$ ; y su masa es de  $M \times (x_P + \Delta x)$ . Su velocidad ha cambiado también, y ya es de  $\frac{dy^*}{dt}(t_P + \Delta t)$ . Estos cambios en la velocidad y la masa de la zona implican un cambio en la cantidad de movimiento. Es indicado analizar estos cambios detalladamente, amén de la fuerza que los provoca. Por eso, volvamos al instante  $t_P$ , y examinemos la porción del Slinky entre  $y^*(t_P)$  y  $z(x_P + \Delta x)$ . (La cantidad de movimiento del resto del Slinky no cambia durante el intervalo  $\Delta t$ .)

En la porción entre  $y^*(t_P)$  y  $z(x_P + \Delta x)$ , hay una masa de  $Mx_P$  (a saber, la zona trincada) cuya velocidad es de  $\frac{dy^*}{dt}(t_P)$ . La velocidad del tramo del Slinky entre la frontera inferior de la zona trincada y  $z(x_P + \Delta x)$  es de cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{En } t_P, \text{ la cantidad de movimiento} \\ \text{de la porción entre } y^*(t_P) \text{ y } z(x_P + \Delta x) \\ = Mx_P \left[ \frac{dy^*}{dt}(t_P) \right]. \end{aligned}$$

Ahora, examinemos la condición de la misma porción en  $t_P + \Delta t$ . Lo todo del Slinky en esta porción ya está en movimiento, con la velocidad  $\frac{dy^*}{dt}(t_P + \Delta t)$ . La masa de esa porción es de  $M \times (x_P + \Delta x)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{En } t_P + \Delta t, \text{ la cantidad de movimiento} \\ \text{de la porción entre } y^*(t_P) \text{ y } z(x_P + \Delta x) \\ = [M \times (x_P + \Delta x)] \left[ \frac{dy^*}{dt}(t_P + \Delta t) \right]. \end{aligned}$$



Para obtener una expresión conveniente para encontrar el cambio en la cantidad de movimiento durante el intervalo  $\Delta t$ , escribimos  $\frac{dy^*}{dt}(t_P + \Delta t)$  como  $\frac{dy^*}{dt}(t_P) + \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right)$ , siendo  $\Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right)$  el cambio en  $\frac{dy^*}{dt}$  durante el intervalo:

$$\begin{aligned} &\text{En } t_P + \Delta t, \text{ la cantidad de movimiento} \\ &\text{de la porción entre } y^*(t_P) \text{ y } z(x_P + \Delta x) \\ &= [M \times (x_P + \Delta x)] \left[ \frac{dy^*}{dt}(t_P) + \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \right]. \end{aligned}$$

Con esta modificación,

$$\begin{aligned} &\text{El cambio en la cantidad de movimiento} \\ &\text{de la porción entre } y^*(t_P) \text{ y } z(x_P + \Delta x) \\ &\text{durante el intervalo } \Delta t \\ &= Mx_P \left[ \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \right] + M \left( \frac{dy^*}{dt} \right) (\Delta x) + M (\Delta x) \left[ \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \right]. \end{aligned}$$

Despreciando el término  $M (\Delta x) \left[ \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \right]$ , se obtiene

$$\begin{aligned} &\text{El cambio en la cantidad de movimiento} \\ &\text{de la porción entre } y^*(t_P) \text{ y } z(x_P + \Delta x) \\ &\text{durante el intervalo } \Delta t \\ &= Mx_P \left[ \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \right] + M \left( \frac{dy^*}{dt} \right) (\Delta x). \end{aligned}$$

Antes de que identifiquemos la fuerza que produce este cambio, tratemos un detalle: queremos, al final, obtener una ecuación para  $y^*$  en función de  $t$ . Por lo tanto, escribamos  $x_P$  y  $\Delta x$  en términos de  $y^*$  y sus derivadas con respecto al  $t$ . Según la Ec. (4.4),

$$\text{Longitud de la zona trincada} = x_P = L - \sqrt{L^2 - \left( \frac{2E}{Mg} \right) y^*}.$$

El “ $\Delta x$ ” que queremos expresar es, en verdad, el cambio en la longitud de la zona trincada que resulta cuando  $y^*$  se incrementa en  $\Delta y^*$  (sea cual fuere este “ $\Delta y^*$ ”). Entonces, nos apoyamos en la Ec. (4.4) para aproximar  $\Delta x$  como

$$\begin{aligned} \Delta x &= \left[ \frac{d}{dy^*} (\text{Longitud de la zona trincada}) \right] \Delta y^* \\ &= \left[ \left( \frac{E}{Mg} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{2E}{Mg} \right) y^*}} \right) \right] \Delta y^*. \end{aligned}$$

Con estas sustituciones, se obtiene

El cambio en la cantidad de movimiento  
de la porción entre  $y^*(t_P)$  y  $z(x_P + \Delta x)$   
durante el intervalo  $\Delta t$

$$= M \left( L - \sqrt{L^2 - \left( \frac{2E}{Mg} \right) y^*} \right) \left[ \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \right] \\ + M \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \left[ \left( \frac{E}{Mg} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{2E}{Mg} \right) y^*}} \right) \right] \Delta y^*.$$

Pasando ahora a la fuerza que produce dicho cambio en la cantidad de movimiento durante el intervalo  $\Delta t$ , un análisis de la Figura 10 demuestra que en el instante  $t = t_P$ , la fuerza que actúa sobre el tramo del Slinky durante dicho intervalo es  $MLg$ , exactamente.

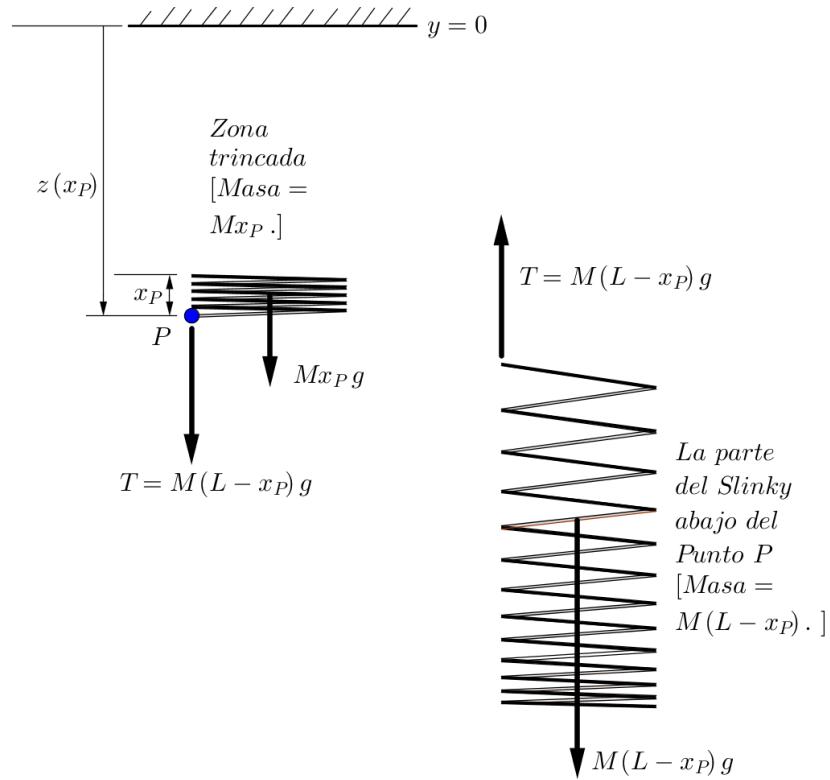


Figure 10: Diagramas de cuerpos usados para determinar la fuerza que actúa sobre la zona trincada. Examinando el diagrama para la zona, vemos que dicha fuerza es la suma del peso de la zona ( $Mx_Pg$ ) y la fuerza  $T$ . Ya que la parte del Slinky abajo de la zona no está acelerando,  $T$  es igual al peso de esta parte. El peso del Slinky completo es de  $MLg$ , por lo que el peso de la parte abajo de la zona es de  $M(L - x_P)g$ . Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la zona trincada  $= Mx_Pg + M(L - x_P)g = MLg$ .

El cambio en la cantidad de movimiento durante  $\Delta t$  es igual al producto de  $\Delta t$  con

dicha fuerza. Por lo tanto,

$$MLg\Delta t = M \left( L - \sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*} \right) \left[ \Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \right] \\ + M \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \left[ \left( \frac{E}{Mg} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*}} \right) \right] \Delta y^*.$$

Simplificando esta ecuación, y reordenándola,

$$\left( L - \sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*} \right) \left[ \frac{\Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right)}{\Delta t} \right] \\ + \left( \frac{dy^*}{dt} \right) \left[ \left( \frac{E}{Mg} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*}} \right) \right] \frac{\Delta y^*}{\Delta t} = Lg.$$

Los límites de  $\frac{\Delta y^*}{\Delta t}$  y  $\frac{\Delta \left( \frac{dy^*}{dt} \right)}{\Delta t}$  cuando  $\Delta t$  tiende a 0 son  $\frac{dy^*}{dt}$  y  $\frac{d^2 y^*}{dt^2}$  respectivamente. Entonces, lo anterior se transforma en

$$\left( L - \sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*} \right) \frac{d^2 y^*}{dt^2} \\ + \left[ \left( \frac{E}{Mg} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*}} \right) \right] \left( \frac{dy^*}{dt} \right)^2 = Lg. \quad (4.5)$$

#### 4.4 Resolución de la ecuación diferencial

Ya tenemos una ecuación diferencial, en  $y^*$ . Para resolverla, definamos una variable nueva:

$$\text{Sea } \phi = \frac{L - \sqrt{L^2 - \left(\frac{2E}{Mg}\right) y^*}}{L} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2E}{MgL^2}\right) y^*}, \quad (4.6)$$

de manera que

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2E}{MgL^2}\right) y^*} = 1 - \phi, \\ \frac{dy^*}{dt} = \left( \frac{MgL^2}{E} \right) (1 - \phi) \frac{d\phi}{dt}, \text{ and} \\ \frac{d^2 y^*}{dt^2} = \left( \frac{MgL^2}{E} \right) \left[ (1 - \phi) \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right].$$

Nótese, por favor, que  $\phi$  es igual a la cociente

$$\frac{\text{Longitud de la zona trincada}}{L}.$$

Con este cambio de la variable, (4.5) se transforma en

$$\begin{aligned}
\phi(1-\phi)\frac{d^2\phi}{dt^2} + (1-2\phi)\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 &= \frac{E}{ML^2}, \\
\phi(1-\phi)\frac{d^2\phi}{dt^2} + \left[(1-2\phi)\frac{d\phi}{dt}\right]\frac{d\phi}{dt} &= \frac{E}{ML^2}, \\
(\phi-\phi^2)\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)\right] + \left[\frac{d}{dt}(\phi-\phi^2)\right]\frac{d\phi}{dt} &= \frac{E}{ML^2}, \\
\frac{d}{dt}\left[(\phi-\phi^2)\frac{d\phi}{dt}\right] &= \frac{E}{ML^2}, \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3}\right)\right] &= \frac{E}{ML^2}; \\
&\text{o sea,} \\
\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3}\right] &= \frac{E}{ML^2}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Integrándola dos veces con respecto a  $t$ ,

$$\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3} = C_1 + C_2 t + \left(\frac{E}{2ML^2}\right)t^2, \tag{4.8}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración. Para identificarlas, notemos que (como se mencionó al presentar la Ec. (4.5)),  $\phi = \frac{\text{Longitud de la zona trincada}}{L}$ . Entonces, en  $t = 0$ ,  $\phi = 0$ , por lo que  $C_1 = 0$ . Para encontrar  $C_2$ , encontramos la derivada con respecto a  $t$ , de ambos lados de la Ec. (4.8):

$$\phi - \phi^2 = C_2 + \frac{E}{ML^2}t.$$

Otra vez,  $\phi = 0$  en  $t = 0$ ; entonces,  $C_2 = 0$ . Así que

$$\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3} = \left(\frac{E}{2ML^2}\right)t^2. \tag{4.9}$$

Sustituyendo  $\phi = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2E}{MgL^2}\right)y^*}$ , para luego efectuar las expansiones y simplificaciones, se obtiene por fin:

$$\left[1 - \left(\frac{2E}{MgL^2}\right)y^*\right]^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{3E}{MgL^2}\right)y^* - 1 = \left(\frac{3E}{2ML^2}\right)t^2. \tag{4.10}$$

## 4.5 Análisis de la solución obtenida partiendo del concepto impulso-momento

### 4.5.1 Tiempo para la caída

En este apartado, identificamos cuánto tiempo la frontera inferior de la zona trincada tardará en alcanzar el extremo inferior del Slinky. Cuando esto sucede, el Slinky entero se encontrará trincado, por lo que  $\phi = 1$ . Entonces, a través de la Ec. (4.9),

$$\text{Tiempo para la caída} = \frac{L}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{E}}. \tag{4.11}$$

Note, por favor, que la aceleración gravitatoria  $g$  no figura en la Ec. (4.11). Es decir, para un Slinky dado, ¡el tiempo sería lo mismo en la Luna que en Júpiter!

#### 4.5.2 Aceleración del baricentro

Como el primer paso, desarrollamos una ecuación para la posición del baricentro en el instante arbitrario  $t_P$ . Examinando la Fig. 8, vemos que en cualquier momento dado durante su caída, la masa del Slinky está dividida en dos partes:

- la zona trincada, con masa  $Mx_P$  y baricentro a la distancia  $z(x_P) - \frac{x_P}{2}$  desde el soporte; y
- la porción todavía extendida, entre  $z(x_P)$  y  $z(L)$ .

Entonces, la distancia  $y_b$  del baricentro desde el soporte es

$$\begin{aligned} y_b &= \frac{(Mx_P) \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{MgL}{E} \right) x_P - \left( \frac{Mg}{2E} \right) x_P^2 \right\} + \int_{x_P}^L Mz(x) dx}{ML} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{MgL^2}{3E} + \frac{Mgx_P^2}{2E} - \frac{Mgx_P^3}{3EL} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{MgL^2}{3E} + \frac{MgL^2}{E} \left[ \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3} \right]. \end{aligned}$$

La aceleración del baricentro es

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} y_b &= \frac{MgL^2}{E} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3} \right] \right\} \\ &= \frac{MgL^2}{E} \left\{ \frac{E}{ML^2} \right\} \\ &= g, \end{aligned}$$

de acuerdo con la mecánica newtoniana.

#### 4.5.3 Velocidad del extremo superior $\left( \frac{dy^*}{dt} \right)$ en $t = 0$ y cuando $\phi = 1$

Primero, desarrollaremos una ecuación para la velocidad  $\frac{dy^*}{dt}$ . Encontrando la diferencial de ambos lados de la Ec. (4.10), se encuentra que

$$\frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^* \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{-2E}{MgL^2} \right) dy^* + \left( \frac{3E}{MgL^2} \right) dy^* = \left( \frac{3E}{2ML^2} \right) (2t dt).$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy^*}{dt} = \frac{gt}{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*}} \quad (4.12)$$

Ésta es la ecuación que se usará a continuación.

**Velocidad del extremo superior en  $t = 0$**  En  $t = 0$ ,  $y^* = 0$  también, de modo que el lado derecho de la Ec. (4.12) queda indeterminado. Por lo tanto, encontremos

Un recordatorio:

$$z(x) = \left( 1 + \frac{MgL}{E} \right) x - \left( \frac{Mg}{2E} \right) x^2.$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3} \right] = \frac{E}{ML^2},$$

por Ec. (4.7).

$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right]$ , a través de la Regla de L'Hôpital y diversos otros teoremas acerca de límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{gt}{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*}} \right\} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{d}{dt}(gt)}{\frac{d}{dt} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*} \right]} \right\} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{g}{\left[ \frac{\frac{E}{MgL^2}}{\sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*}} \right] \frac{dy^*}{dt}} \right\} \\
&= \left( \frac{Mg^2L^2}{E} \right) \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*}}{\frac{dy^*}{dt}} \right\} \\
&= \left( \frac{Mg^2L^2}{E} \right) \left\{ \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*} \right]}{\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right]} \right\}.
\end{aligned}$$

Note, por favor, que el denominador de la fracción a la derecha es el mismo  $\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right]$  que estamos buscando. Por lo tanto,

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right] \right\}^2 = \left( \frac{Mg^2L^2}{E} \right) \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*} \right] \right\}.$$

Cuando  $t$  tiende a 0,  $y^*$  tiende a 0 también, por lo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*} \right] = 1,$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right] = gL \sqrt{\frac{M}{E}}. \tag{4.13}$$

Éste resultado coincide con la velocidad predicha por la solución que obtuvimos a través de las transformadas Laplace (Ec. (3.22)). ¿Tiene sentido, esta coincidencia? Bueno, en el modelo impulso-momento, la zona trincada se desacelera por la acumulación de vueltas del Slinky. Conforme  $t \rightarrow 0$ , la cantidad acumulado tiende a cero también, por lo que la velocidad tiende a su valor no desacelerada.

En contraste, en la solución obtenida a través de las transformadas Laplace la velocidad se mantiene igual a su valor en  $t = 0$ . Por lo tanto, las velocidades predichas por los dos modelos sí, deben coincidir cuando  $t \rightarrow 0$ .

**Velocidad del extremo superior cuando  $\phi = 1$**  No nos costará tanto trabajo para encontrar esta velocidad, como nos costó para encontrar  $\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right]$ . Otra vez, partimos de la Ec. (4.12):

$$\frac{dy^*}{dt} = \frac{gt}{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2E}{MgL^2} \right) y^*}}.$$

Cuando  $\phi = 1$ ,  $t = \frac{L}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{E}}$  (Ec. (4.11)), y  $y^* = \frac{MgL^2}{2E}$  (Ec. (4.6)). Por lo tanto,

$$\left. \frac{dy^*}{dt} \right|_{\phi=0} = \frac{gL}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{E}}. \quad (4.14)$$

Cabe hacer unas cuantas observaciones acerca de este resultado. Primero, deberíamos averiguar si la energía cinética asociada con dicha velocidad es igual a la energía potencial gravitatoria perdida por el Slinky como resultado de la caída. Cuando  $\phi = 1$ , todo el Slinky está de nuevo en su condición "trincada", y por lo tanto mueve todo junto a la velocidad (supuestamente) de  $\frac{gL}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{E}}$  energía cinética es

$$\begin{aligned} \text{Energía cinética} &= \frac{1}{2} (\text{Masa total del Slinky}) [\text{velocidad}]^2 \\ &= \frac{1}{2} (ML) \left[ \frac{gL}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{E}} \right]^2 \\ &= \frac{M^2 g^2 L^3}{6E}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En cuanto a la energía gravitatoria perdida, ésta es

Energía potencial perdida = (Masa del Slinky) (g) (Distancia que el baricentro cayó').

La posición del baricentro en el Slinky colgado es

$$\begin{aligned} y_{\text{Baricentro}} &= \frac{\int_0^L \left\{ \left[ 1 + \frac{MgL}{E} \right] x - \left[ \frac{MgL}{2E} \right] x^2 \right\} M dx}{ML} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{MgL^2}{3E}. \end{aligned}$$

En  $\phi = 1$ ,  $y_{Baricentro} = \frac{L}{2} + \frac{MgL^2}{6E}$ . Entonces, la distancia que el baricentro cayó es  $\frac{MgL^2}{6E}$ , y

$$\begin{aligned} \text{Energía potencial perdida} &= (ML)(g) \left( \frac{MgL^2}{6E} \right) \\ &= \frac{M^2g^2L^3}{6E}, \end{aligned}$$

la cual coincide con la energía cinética que calculamos.

A modo de otra comprobación, notemos que el Slinky tarda el tiempo  $\frac{L}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{E}}$  en alcanzar  $\phi = 1$  (Ec. (4.11)). Durante este intervalo de tiempo, la aceleración del baricentro fue constante en  $g$ . Por lo tanto, su velocidad en  $\phi = 1$  debe ser  $(g) \left( \frac{L}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{E}} \right) = \frac{gL}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{E}}$ , la cual coincide con Ec. (4.14).

**Relación entre la elongación estática, y la velocidad del extremo superior en  $\phi = 0$  y  $\phi = 1$ .** Con decir “la elongación estática” nos referimos a la diferencia entre  $z(L)$  y  $L$  mismo. A partir de la Ec. (2.1),

$$\text{Elongación estática} = \frac{MgL^2}{2E}. \quad (4.16)$$

En contraste, hemos visto, antes en este mismo Apartado, que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right] = gL\sqrt{\frac{M}{E}},$$

y

$$\left. \frac{dy^*}{dt} \right|_{\phi=0} = \frac{gL}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{E}}.$$

Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right] = \sqrt{2g \times (\text{Elongación estática})}, \text{ y}$$

$$\left. \frac{dy^*}{dt} \right|_{\phi=0} = \sqrt{\frac{2}{3}g \times (\text{Elongación estática})}.$$

## 5 Comentarios y conclusiones

Hemos visto que los dos intentos por usar la ecuación de la onda fracasaron, por razones distintas: las series Fourier no cumplen las condiciones de frontera, y la solución a través de las transformadas Laplace predice que el extremo superior del Slinky caerá a través de la parte del Slinky que está en reposo. Esta predicción no es un defecto de las transformadas Laplace; sino un artefacto del uso de la ecuación de la onda a un resorte de compresión en este caso específico, que trata de la propagación de una onda de choque.

La solución a través del teorema impulso-momento funcionó, y hace predicciones coherentes entre sí, y que concuerdan con observaciones empíricas. Además, predice



un valor del  $\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{dy^*}{dt} \right]$  que coincide—como debe —con el valor predicho por la solución obtenida a través de las transformadas Laplace.

Sin embargo, debemos reconocer que nuestra modelación del Slinky en caída libre trata solamente su movimiento en la dirección vertical, haciendo caso omiso a su rotación, la cual es tan notable en el video [6] alrededor de 1:20.

## References

- [1] M. G. Calkin, “Motion of a falling spring”, Am. J. Phys. 61, 261?264 (1993)
- [2] W. G. Unruh, 2011, “The Falling slinky”, disponible en e-print arXiv:1110.4368v11: <http://arxiv.org/abs/1110.4368>.
- [3] R. C. Cross and M. S. Wheatland, 2012, “Modeling a falling slinky”, 2012, Citation: Am. J. Phys. 80, 1051 (2012); doi: 10.1119/1.4750489. Disponible en <http://www.physics.usyd.edu.au/wheat/papers/pdfs/AJP001051.pdf>.
- [4] J. Smith, 2004, “Las bellezas matemáticas del gusano”. Disponible en <http://www.slideshare.net/JamesSmith245/las-ellezas-matematicas-del-slinky>.
- [5] B. Loret, 2009, “Chapter I Solving IBVPs with the Laplace transform”, disponible en <http://people.3sr-grenoble.fr/users/bloret/enseee/maths/enseee-maths-IBVPs-1.pdf>. Ver también la serie en la que viene: <http://people.3sr-grenoble.fr/users/bloret/enseee/maths/>.
- [6] Veritasium, 2012, “Awesome HD Slinky Slow-Mo”, <https://www.youtube.com/watch?v=uiyMuHuCFo4>.