Ministère de l'Education Nationale
et de la Recherche Scientifique
Université d'Antananarivo
Faculté des Sciences d'Antananarivo
Département de Physique
B.P 906
101 Antananarivo - MADAGASCAR

Ministère de l'Education Nationale
et de la Recherche Scientifique
Institut National des Sciences et
Techniques Nucléaires
B.P. 4279
101 Antananarivo - MADAGASCAR
Tél. : 261 20 22 611 81
Fax : 261 20 22 355 83
E-mail : instn@dts.mg

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ANTANANARIVO

Pour l'obtention du titre de

Docteur de Troisième Cycle

En

PHYSIQUE NUCLEAIRE, PHYSIQUE APPLIQUEE ET THEORIQUE

par

Monsieur RAKOTONIRINA Christian

sur le

PRODUIT TENSORIEL DE MATRICES EN THEORIE DE DIRAC

Soutenue à la Faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo
le 29 août 2003 devant la commission d'examen :

Président : M. RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA
Professeur Titulaire de Classe Exceptionnelle

Rapporteur : M. RABOANARY Roland
Professeur à la Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo

Examinateurs : M. RABESAOTRA Raymond
Professeur Titulaire à la Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo

M. RANDRIANARIVONY Edmond
Professeur à la Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo

Edité par Madagascar-INSTN

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis d'adresser ici mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé à mener à son terme cette thèse.
Je tiens à remercier tout particulièrement, Monsieur RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA, Professeur Titulaire de classe exceptionnelle à la Faculté des Sciences d'Antananarivo, Directeur Général et Fondateur de l'Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires, Madagascar-INSTN, qui a bien voulu m'accueillir dans cet institut comme chercheur préparant sa thèse. Grâce à lui, cette thèse de physique théorique est la première qui ait été dirigée par un professeur Malagasy et entièrement réalisée à Madagascar. Il m'a ramené au goût de l'esprit de rigueur mathématique que j'avais quitté au profit de l'intuition physique. Il m'a initié aux méthodes de recherche en physique théorique et m'a amené dans le monde de cette science. Il m'a donné, pendant qu'il dirigeait ma recherche une large indépendance d'esprit, caractéristique de l'esprit scientifique. Il me fait aujourd'hui le grand honneur de présider le jury de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je voudrais remercier Monsieur RABOANARY Roland, Professeur au Département de Physique à la Faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo. Les discussions pertinentes que nous avons eues et les conseils qu'il m'a donnés m'ont permis de corriger certaines erreurs et fautes dans ce travail. Je tiens vivement à le remercier d'avoir accepté la charge de rapporter le présent travail.

Mes sincères remerciements vont à

- *Monsieur RABESAOTRA Raymond, Professeur Titulaire au Département de Mathématique et Informatique à la Faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo et examinateur ;*
- *Monsieur RANDRIANARIVONY Edmond, Professeur au Département de Physique à la Faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo et examinateur,*

qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps malgré leurs multiples occupations pour juger ce travail.

Je ne saurais oublier tous les chercheurs ainsi que le personnel administratif de Madagascar-INSTN dont la présence ici m'encourage beaucoup. Je les remercie vivement de m'avoir aidé à l'élaboration de ce manuscrit.

Je tiens à remercier ici RAMAHAFENO Barinirina (Rabary), RATSIMBARISON Herintsitohaina Mahasedra (Hery), RABENANDRIAMANITRA Charles Patrick (Charles Patrick), HANITRIARIVO RAKOTOSON (Rivo) et BENARD Alain du groupe de physiciens théoriciens de Madagascar-INSTN d'avoir discuté avec moi de beaucoup de sujets lors des séminaires de Physique Théorique qui se sont tenus à Madagascar-INSTN tous les jeudis après-midis.

A mes sœurs et à mes frères qui sont toujours à mes côtés même dans les moments difficiles, et à ma famille, qu'ils puissent trouver ici mes marques de sympathie.

Enfin, je tiens à remercier ceux qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

RAKOTONIRINA Christian Pierre

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

L'étude de l'équation qui a été écrite par Dirac en 1928, au début pour le négaton $[1]$ est loin d'être achevée. On y utilise différents outils mathématiques. Parmi les problèmes qui intéressent beaucoup de gens, il y a la recherche de la solution exacte d'une équation de Dirac, la construction d'autres formalismes de la théorie de Dirac qui aboutissent, soit à une équation équivalente à celle de Dirac, soit à une généralisation. En 1967, le formalisme dans l'algèbre de Clifford, algèbre d'espace-temps, était découvert par David Hestenes$[2]$. L'équation de Dirac et celle de Hestenes sont équivalentes. A une solution de l'une est associée de manière unique une solution de l'autre. L'équation de Hestenes amène d'autres nouvelles informations physiques. Dans un article $[3]$qu'il a publié Peter Rowland a dit : " Some aspects of particle physics are more easily understood if we first express the Dirac equation in a more algebraic form than usual, with the gamma matrices replaced by equivalent operators from vector and quaternion algebra". En 1997, Claude Daviau et W.E.Baylis ont découvert indépendamment un formalisme, non pas dans l'algèbre d'espace-temps, engendrée par les matrices de Dirac, mais dans l'algèbre d'espace engendrée par les matrices de Pauli$[4],[5],[6]$. En 1998, N.G.Marchuk a établi une équation qu'il appelle γ-équation de Dirac$[7]$, une généralisation de l'équation de Hestenes. Le formalisme nilpotent a été introduit par P.Rowland$[3]$. En l'an 2000, N.G.Marchuk a démontré que l'équation de Dirac pour un négaton peut s'écrire sous forme tensorielle$[8],[9]$. Chaque formalisme ou méthode mathématique utilisée révèle des propriétés physiques. Dans cette thèse, qui se divise en deux parties, nous travaillons dans l'idée du Professeur RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA sur l'utilisation du produit tensoriel de matrices comme outil mathématique, qui n'a pas encore utilisé ni pour obtenir les formalismes cités plus hauts, ni pour les développer. Nous l'utilisons dans le formalisme classique de Dirac et dans celui de Hestenes. Notre méthode consiste à remplacer les matrices de Dirac par produit tensoriel de matrices de Pauli.

Dans la première partie, nous étudierons le produit tensoriel de matrices, avec l'approche du Professeur RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA$[10]$, établissant d'abord les propriétés du produit kroneckerien d'opérateurs linéaires de façon intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment des bases, puis nous démontrons les propriétés analogues pour le produit tensoriel de matrices. Le fait que les matrices de Dirac engendrent une algèbre réelle de Clifford (ARC), l'algèbre d'espace-temps, nous amène à étudier les factorisations, par produit tensoriel de matrices, des ARC des matrices carrées. Notre but est alors de trouver un théorème permettant d'obtenir une algèbre de Dirac à partir de celle de Pauli.

Dans la deuxième partie, nous utiliserons le produit tensoriel de matrices pour étudier les équations de Dirac pour les fermions fondamentaux libres[11]. En partant toujours de l'idée que l'utilisation d'une nouvelle méthode mathématique peut révéler des propriétés physiques, nous démontrerons l'équivalence entre l'équation de Hestenes et celle de Dirac, en utilisant le produit tensoriel de matrices.

Nous nous limitons au cas où les espaces vectoriels sont de dimensions finies.

Les indices répétés en haut et en bas désignent une sommation, selon la convention d'Einstein.

Le produit habituel d'une matrice (resp. un opérateur) par une (resp. un) autre sera désigné par $\bullet$.

La numérotation d'une formule, par exemple (67.2), signifie que c'est la deuxième formule de la page 67.

Sur les notations

$\mathcal{M}_{p\times m}(\mathrm{IK})$ est l'ensemble des matrices à p lignes et à m colonnes et à coefficients dans IK.

I_ξ l'opérateur identité sur l'espace vectoriel ξ.

$\lfloor I_n \rfloor$ ou I_n est la matrice unité de dimension n.

Si une matrice est notée par 1, alors il s'agit également d'une matrice unité.

ALGEBRE MULTILINEAIRE
ET
ALGEBRE DE CLIFFORD

Chapitre1. ALGEBRE MULTILINEAIRE

Dans ce chapitre IK est un corps commutatif unitaire.

1.1. Algèbre linéaire

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux IK-espaces vectoriels.

On note $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, le produit de l'opérateur A par $\lambda \in$ IK est noté.

Pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, pour tout $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, le produit de l'opérateur A par l'opérateur B est noté $A \bullet B$.

On note $I_{\mathcal{E}}$ l' opérateur identité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Pour tout isomorphisme A, de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, la réciproque ou inverse de A est notée A^{-1}.

$$A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I_{\mathcal{E}}$$

On note $\mathcal{E}^* = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ l'ensemble des covecteurs de $\mathcal{E}$.

Nous surlignons les vecteurs $\bar{x}$ de $\mathcal{E}$ tandis que nous soulignons les covecteurs $\underline{\phi}$ de $\mathcal{E}$, $\underline{\phi} \in \mathcal{E}^*$ [12], [13],[14],[15].

On définit l'opérateur transposé A^t de A, comme opérateur de $\mathcal{F}^*$ dans $\mathcal{E}^*$ tel que :

$$\left(A^t \underline{\phi}\right)(\bar{x}) = \underline{\phi}\left(A(\bar{x})\right); \text{ pour tout } \underline{\phi} \in \mathcal{F}^* \text{ ,pour tout } \bar{x} \in \mathcal{E}.$$

$$A^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*)$$

1.1.1. Matrice d'un opérateur linéaire dans un couple de bases données

Soient $\left(\overline{e_i}\right)_{1\le i\le n}$ et $\left(\overline{f_j}\right)_{1\le j\le m}$ des bases respectives des espaces vectoriels $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{F}_m$, sur IK de dimensions respectives n et m.

Soit A un opérateur linéaire appliquant $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{F}_m$. La matrice représentative de l'opérateur A dans le couple de bases $\left(\left(\overline{e_j}\right)_{1\le j\le n},\left(\overline{f_i}\right)_{1\le i\le m}\right)$ est définie par

$$[A]=\left(A_j^i\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}=\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1\\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_1^m & A_2^m & \cdots & A_n^m \end{bmatrix}$$

avec $A(\overline{e}_j) = A_j^i f_i$, $\forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

A_j^i est la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice $[A]$

Soient A , $B \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_n , \mathcal{F}_m)$, $[A]$ et $[B]$ les matrices respectives de A et B dans le couple de bases $\left(\left(\overline{e_j}\right)_{1\le j\le n},\left(\overline{f_i}\right)_{1\le i\le m}\right)$.

La matrice de la somme $A+B$ de l'opérateurs A et B, dans le même couple de bases, est notée

$$[A]+[B] = [A+B]$$

Par définition, $[A]+[B]$ est la somme des matrices $[A]$ et $[B]$.

La matrice du produit λA de l'opérateur A par $\lambda \in$ IK, dans le même couple de bases, est notée

$$[\lambda A]=\lambda[A]$$

Par définition, $\lambda[A]$ est le produit de la matrice $[A]$ par $\lambda \in IK$.

Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_n, G_p)$, $B \in \mathcal{L}(G_p, \mathcal{F}_m)$, $B.A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_n, \mathcal{F}_m)$.

$[A]=\left(A_j^k\right)_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ la matrice de A dans le couple de bases $\left(\left(\overline{e_j}\right)_{1\leq j\leq n}, \left(\overline{g_k}\right)_{1\leq k\leq p}\right)$

$[B]=\left(B_k^i\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq k\leq p}}$ la matrice de B dans le couple de bases $\left(\left(\overline{g_k}\right)_{1\leq k\leq p}, \left(\overline{f_i}\right)_{1\leq i\leq m}\right)$

La matrice de B.A dans $\left(\left(\overline{e_j}\right)_{1\leq j\leq n}, \left(\overline{f_i}\right)_{1\leq i\leq m}\right)$ est notée

$$[B.A]=[B].[A]$$

Par définition, c'est le produit de la matrice $[B]$ par $[A]$.

1.1.2. Théorème

Si $[A] = \left(A_j^i\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ la matrice de l'opérateur A dans $\left(\left(\overline{e_j}\right)_{1\leq j\leq n}, \left(\overline{f_i}\right)_{1\leq i\leq m}\right)$,

alors, la matrice $[A]^t = \left(A'^{j}_{i}\right)_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq m}}$, avec $A'^{j}_{i} = A^i_j$, est la matrice de A^t dans

$\left(\left(\underline{\varphi}^i\right)_{1\leq i\leq m}, \left(\underline{\varepsilon}^j\right)_{1\leq j\leq n}\right)$ où $\left(\underline{\varphi}^i\right)_{1\leq i\leq m}$ et $\left(\underline{\varepsilon}^j\right)_{1\leq j\leq n}$ sont les bases duales de $\left(\overline{e_i}\right)_{1\leq i\leq n}$ et $\left(\overline{f_j}\right)_{1\leq j\leq m}$.

1.1.3. Proposition

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux IK-espaces vectoriels de dimensions respectives m et p.

$(A_i)_{1\le i\le mp}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ bases respecives de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Soit $[A_i]$ la matrices de A_i dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,mp\}$.

$(A_i)_{1\le i\le mp}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ si et seulement si $\left([A_i]\right)_{1\le i\le mp}$ est une base de $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathrm{IK})$.

Démonstration

« $\Rightarrow$ » Soient $(A_i)_{1\le i\le mp}$ une base de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $(\alpha_i)_{1\le i\le mp}$ un système d'èléments de IK tels que

$$\alpha_i\,[A_i] = 0$$

alors,

$$\alpha_i\ A_i = 0$$

car $\alpha_i\,[A_i]$ est la matrice de $\alpha_i\ A_i$ dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$. Donc $\alpha_i = 0,\ \forall\, i \in \{1,2,\ldots,mp\}$.

D'où, $\left([A_i]\right)_{1\le i\le mp}$ est une base de $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathrm{IK})$.

« $\Leftarrow$ » Soient $\left([A_i]\right)_{1\le i\le mp}$ une base de $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathrm{IK})$, $(\alpha_i)_{1\le i\le mp}$ un système d'èléments de IK tels que

$$\alpha_i\ A_i = 0$$

Comme $\alpha_i\,[A_i]$ est la matrice de $\alpha_i\ A_i$ dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$, donc

$$\alpha_i\,[A_i] = 0$$

Alors,

$$\alpha_i = 0,\ \forall\, i \in \{1,2,\ldots,mp\}.$$

D'où, $(A_i)_{1\le i\le mp}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

1.2. Produit tensoriel de formes multilinéaires [12], [14], [15].

1.2.1. Définition

Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$, p espaces vectoriels définis sur $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $n_1, n_2, \ldots, n_p$ et $\mathcal{E}_1^*, \mathcal{E}_2^*, \ldots, \mathcal{E}_p^*$ les espaces duaux respectifs de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$. L'ensemble des formes p–linéaires définies sur $\mathcal{E}_1^* \times \mathcal{E}_2^* \times \ldots \times \mathcal{E}_p^*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ que l'on note $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p$, appelé produit tensoriel des p espaces vectoriels $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$.

Pour tout $\omega \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p$, on note $\omega\left(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \ldots, \underline{\phi}_p\right) = \omega\left(\underline{\phi}_1\right)\left(\underline{\phi}_2\right) \ldots \left(\underline{\phi}_p\right)$, pour tout $\left(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \ldots, \underline{\phi}_p\right) \in \mathcal{E}_1^* \times \mathcal{E}_2^* \times \ldots \times \mathcal{E}_p^*$.

1.2.2. Définition

Soient $\mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{12}, \ldots, \mathcal{E}_{1p}$; $\mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_{22}, \ldots, \mathcal{E}_{2q}$ (p+q) IK-espaces vectoriels. Soient $\underline{\phi}$ une forme p-linéaire définie sur $\mathcal{E}_{12} \times \mathcal{E}_{12} \times \ldots \times \mathcal{E}_{1p}$ et $\underline{\psi}$ une forme q-linéaire définie sur $\mathcal{E}_{21} \times \mathcal{E}_{22} \times \ldots \times \mathcal{E}_{2q}$. On appelle produit tensoriel de $\underline{\phi}$ par $\underline{\psi}$ la forme (p+q)-linéaire $\underline{\phi} \otimes \underline{\psi}$ définie sur $\mathcal{E}_{12} \times \mathcal{E}_{12} \times \ldots \times \mathcal{E}_{1p} \times \mathcal{E}_{21} \times \mathcal{E}_{22} \times \ldots \times \mathcal{E}_{2q}$ par :

$$\underline{\phi} \otimes \underline{\psi}(\overline{x}_{11})(\overline{x}_{12})\ldots(\overline{x}_{1p})(\overline{x}_{21})(\overline{x}_{22})\ldots(\overline{x}_{2q}) =$$

$$\underline{\phi}(\overline{x}_{11})(\overline{x}_{12})\ldots(\overline{x}_{1p})\underline{\psi}(\overline{x}_{21})(\overline{x}_{22})\ldots(\overline{x}_{2q}),$$ pour tout $\overline{x}_{1i} \in \mathcal{E}_{1i}$, pour tout $\overline{x}_{2i} \in \mathcal{E}_{2i}$.

1.2.3. Remarques

1)Le produit tensoriel est associatif et est distributif par rapport à l'addition.

2)Pour tout $\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p\right) \in (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \ldots \times \mathcal{E}_p)$, $\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_p$ est la forme p – linéaire définie sur $\mathcal{E}_1^* \times \mathcal{E}_2^* \times \ldots \times \mathcal{E}_p^*$ par :

$$\left(\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_p\right)\left(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \ldots, \underline{\phi}_p\right) = \overline{x}_1\left(\underline{\phi}_1\right)\overline{x}_2\left(\underline{\phi}_2\right)\ldots\overline{x}_p\left(\underline{\phi}_p\right) = \underline{\phi}_1\left(\overline{x}_1\right)\underline{\phi}_2\left(\overline{x}_2\right)\ldots\underline{\phi}_p\left(\overline{x}_p\right)$$

pour tout $\underline{\phi}_i \in \mathcal{E}_i^*$

$\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_p \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p$

3)Pour tout $\underline{\phi}_i \in \mathcal{E}_i^*$, pour tout $\overline{x}_i \in \mathcal{E}_i$

$$\left(\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_p\right)\left(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \ldots, \underline{\phi}_p\right) =$$

$$\overline{x}_1\left(\underline{\phi}_1\right)\overline{x}_2\left(\underline{\phi}_2\right)\ldots\overline{x}_p\left(\underline{\phi}_p\right) = \underline{\phi}_1\left(\overline{x}_1\right)\underline{\phi}_2\left(\overline{x}_2\right)\ldots\underline{\phi}_p\left(\overline{x}_p\right)$$

$$= \left(\underline{\phi}_1 \otimes \underline{\phi}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{\phi}_p\right)\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p\right)$$

avec

$\underline{\phi}_1 \otimes \underline{\phi}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{\phi}_p \in \mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p^*$

1.2.4. Théorème $[12]$, $[14]$

Soient $\left(\overline{e_{1i_1}}\right)_{1 \le i_1 \le n_1}$, $\left(\overline{e_{2i_2}}\right)_{1 \le i_2 \le n_2}$, ..., $\left(\overline{e_{pi_p}}\right)_{1 \le i_p \le n_p}$ des bases respectives de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_p$. Alors, $\left(\overline{e_{1i_1}} \otimes \overline{e_{2i_2}} \otimes \ldots \otimes \overline{e_{pi_p}}\right)$ avec i_j varie de 1 à n_j est une base de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p$.

1.2.5. Théorème $[12]$, $[14]$

Si $\left(\underline{\varepsilon}_j^{i_j}\right)_{1 \le i_j \le n_j}$ est la base duale de $\left(\overline{e}_{j,i_j}\right)_{1 \le i_j \le n_j}$ alors

$\left(\varepsilon_1^{i_1} \otimes \varepsilon_2^{i_2} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_p^{i_p}\right)$ avec i_j varie de 1 à n_j est une base de $\mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p^*$, base duale de $\left(\bar{e}_{1i_1} \otimes \bar{e}_{2i_2} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{pi_p}\right)$ avec i_j varie de 1 à n_j

1.2.6. Théorème

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux IK-espaces vectoriels de dimensions finies. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^*$ l'ensemble des formes bilinéaires définies sur $\mathcal{F}^* \times \mathcal{E}$. L'application

$$K : \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^*$$

$$A \mapsto A_T = K(A)$$

telle que, pour tout $\overline{x} \in \mathcal{E}$, pour tout $\underline{\varphi} \in \mathcal{F}^*$

$$A_T(\underline{\varphi}, \overline{x}) = \underline{\varphi}(A(\overline{x}))$$

est un isomorphisme. Un isomorphisme intrinsèque qui permet d'identifier un opérateur linéaire élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ à une forme bilinéaire définie sur $\mathcal{F}^* \times \mathcal{E}$.

C'est une généralisation d'un théorème qui est écrit dans $[14]$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

<u>Démonstration</u>

On montre facilement que K est une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^*$.

Comme $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^*$ est de dimension finie, donc il suffit de montrer que K est une surjection. Soit $\Phi \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^*$, pour tout $\overline{x} \in \mathcal{E}$, soit $\overline{y}$ la forme linéaire définie sur $\mathcal{F}^*$ par :

$$\overline{y}(\underline{\varphi}) = \Phi(\underline{\varphi}, \overline{x}),$$

pour tout $\underline{\varphi} \in \mathcal{F}^*$.

On a alors une application linéaire $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $A(\overline{x}) = \overline{y}$, telle que

$$\overline{y}(\underline{\varphi}) = \underline{\varphi}(\overline{y}) = \Phi(\underline{\varphi}, \overline{x})$$

Et,

$$\underline{\varphi}(A(\overline{x})) = \Phi(\underline{\varphi}, \overline{x}) = A_T(\underline{\varphi}, \overline{x})$$

pour tout $\overline{x} \in \mathcal{E}$, pour tout $\underline{\varphi} \in \mathcal{F}^*$.

Ce qui montre que K est surjective.

C.Q.F.D.

1.3. Produit kroneckerien d'opérateurs

1.3.1. Définition

Soient $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_i$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$.

On définit le produit kroneckerien d'opérateurs linéaires notés $A_1 \overline{\otimes} A_2 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} A_p$ comme un opérateur linéaire de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p$ dans $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_p$ tel que

$$A_1 \overline{\otimes} A_2 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} A_p\left(\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_p\right) = A_1\left(\overline{x}_1\right) \otimes A_2\left(\overline{x}_2\right) \otimes \ldots \otimes A_p\left(\overline{x}_p\right)$$

$$A_1 \overline{\otimes} A_2 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} A_p \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p ; \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_p)$$

1.3.2. Remarques

1) D'après le théorème **1.2.6.**, les A_i de la définition peuvent être considérés comme des formes bilinéaires A_{iT} éléments de $\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{E}_i^*$.

Pour tout $\overline{x}_i \in \mathcal{E}_i$, pour tout $\underline{\varphi_i} \in \mathcal{F}_i^*$,

$$A_1 \overline{\otimes} A_2 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} A_p\left(\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{x}_p\right)(\underline{\varphi_1}, \underline{\varphi_2}, \ldots, \underline{\varphi_p})$$

$$= A_1(\overline{x}_1)\otimes A_2(\overline{x}_2)\otimes\ldots\otimes A_p(\overline{x}_p)(\underline{\varphi_1}, \underline{\varphi_2}, \ldots, \underline{\varphi_p})$$

$$= (\underline{\varphi_1})A_1(\overline{x}_1)(\underline{\varphi_2})A_2(\overline{x}_2)\ldots(\underline{\varphi_p})A_p(\overline{x}_p)$$

$$= A_{1T}(\underline{\varphi_1}, \overline{x}_1)A_{2T}(\underline{\varphi_2}, \overline{x}_2)\ldots A_{pT}(\underline{\varphi_p}, \overline{x}_p)$$

$$= (A_{1T}\otimes A_{2T}\otimes\ldots\otimes A_{pT})(\underline{\varphi_1})(\overline{x}_1)(\underline{\varphi_2})(\overline{x}_2)\ldots(\underline{\varphi_p})(\overline{x}_p)$$

avec $A_{1T}\otimes A_{2T}\otimes\ldots\otimes A_{pT} \in \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{E}_1{}^*\otimes\mathcal{F}_2\otimes\mathcal{E}_2{}^*\otimes\ldots\otimes\mathcal{F}_p\otimes\mathcal{E}_p{}^*$.

Nous pouvons donc parler de "produit tensoriel" d'opérateurs au lieu de "produit kroneckérien" d'opérateurs. Il n'y a pas de confusion à craindre si nous remplaçons $\overline{\otimes}$ par $\otimes$.

2) On sait que $\mathcal{L}(\mathrm{IK}, \mathrm{IK})\equiv\mathrm{IK}$. Pour toute $A\in\mathcal{L}(\mathrm{IK}, \mathrm{IK})$.On identifie A à $A(1) = \alpha$. Pour tous α, $\beta\in\mathrm{IK}$,

$$\alpha\otimes\beta \equiv \alpha\beta \text{ (Voir } [12] \text{)}$$

Plus généralement,

$$\mathrm{IK}\otimes\mathrm{IK}\ldots\otimes\mathrm{IK}\equiv\mathrm{IK} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\mathrm{IK}\otimes\mathrm{IK}\ldots\otimes\mathrm{IK}, \mathrm{IK})\equiv\mathrm{IK}$$

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux IK-espaces vectoriels de dimensions finies. Pour tout $\alpha\in\mathrm{IK}$, pour tout $A\in\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, on pose

$$\alpha\otimes A = \alpha A.$$

3)Pour tous $\overline{x}_i\in\mathcal{E}_i$, $\overline{x}_1\otimes\overline{x}_2\otimes\ldots\otimes\overline{x}_p$ est un produit kroneckerien , donc élément de $(\mathcal{E}_1{}^*\otimes\mathcal{E}_2{}^*\otimes\ldots\otimes\mathcal{E}_p{}^*)^*$ .Donc,

$$(\mathcal{E}_1{}^*\otimes\mathcal{E}_2{}^*\otimes\ldots\otimes\mathcal{E}_p{}^*)^* \equiv \mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2\otimes\ldots\otimes\mathcal{E}_p \equiv \mathcal{E}_1{}^{**}\otimes\mathcal{E}_2{}^{**}\otimes\ldots\otimes\mathcal{E}_p{}^{**}.$$

Ainsi,

$$(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p)^* \equiv \mathcal{E}_1{}^* \otimes \mathcal{E}_2{}^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p{}^*$$

1.3.3. Propriété[*12*], [*14*]

Le produit kroneckerien d'opérateurs est associatif.

1.3.4. Propriété[*12*], [*14*]

Soient $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$, $B_i \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i)$

Alors,

$$(A_1 \cdot B_1) \otimes (A_2 \cdot B_2) \otimes \ldots \otimes (A_p \cdot B_p) = (A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_p) \cdot (B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_p)$$

1.3.5. Propriété[*12*], [*14*]

Notons $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_p$ ou tout simplement $\otimes \mathcal{E}_i$ et notons $I_{\mathcal{E}_1} \otimes I_{\mathcal{E}_2} \otimes \ldots \otimes I_{\mathcal{E}_p}$ par $I_{\xi_i}^{\otimes}$

Alors,

$$I_{\otimes \xi_i} = I_{\xi_i}^{\otimes}$$

1.3.6. Propriété[*12*], [*14*]

Soient $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_i$ des IK-espaces vectoriels de même dimension. Soit $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$.

Si tous les opérateurs A_i sont inversibles pour le produit habituel d'opérateurs, alors $A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_p$ est inversible pour le même produit et

$$\{A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_p\}^{-1} = A_1^{-1} \otimes A_2^{-1} \otimes \ldots \otimes A_p^{-1}$$

alors que pour le produit habituel d'opérateurs

$$(A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_P)^{-1} = A_P^{-1} \bullet \ldots \bullet A_2^{-1} \bullet A_1^{-1}$$

1.3.7. Propriété [12], [14]

Soient $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_i$ des IK-espaces vectoriels.

$$\{A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_P\}^t = A_1^t \otimes A_2^t \otimes \ldots \otimes A_P^t \text{, pour tous } A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i) \text{,}$$

avec $\{A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_P\}^t$ le transposé de l'opérateur linéaire $A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_P$.

alors que pour le produit habituel d'opérateurs

$$(A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_P)^t = A_P^t \bullet \ldots \bullet A_2^t \bullet A_1^t$$

1.3.8. Propriété [12], [14]

Le produit tensoriel d'opérateurs est distributif par rapport à l'addition d'opérateurs. C'est-à-dire :

soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$ quatre IK-espaces vectoriels, pour tous A, B $\in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, pour tout C $\in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$

$$(A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$

et

$$C \otimes (A + B) = C \otimes A + C \otimes B$$

1.3.9. Propriété

Le produit kroneckerien d'opérateurs n'est pas commutatif en général. C'est-à-dire :

il existe $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $A_1 \otimes A_2 \neq A_2 \otimes A_1$

Démonstration

Prenons un contre-exemple.

Soit $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ tel que :

pour tous $\overline{u}_1, \overline{u}_2 \in \mathcal{E}$, $A_1(\overline{u}_1) = -\overline{u}_1$, $A_1(\overline{u}_2) = \overline{u}_2 \neq 0$

$(A_1 \otimes I_{\mathcal{E}1})(\overline{u}_1 \otimes \overline{u}_2) = A_1(\overline{u}_1) \otimes I_{\mathcal{E}1}(\overline{u}_2) = -\overline{u}_1 \otimes \overline{u}_2 \neq 0$

$(I_{\mathcal{E}1} \otimes A_1)(\overline{u}_1 \otimes \overline{u}_2) = I_{\mathcal{E}1}(\overline{u}_1) \otimes A_1(\overline{u}_2) = \overline{u}_1 \otimes \overline{u}_2 \neq 0$

C.Q.F.D.

1.3.10. Propriété

Soient $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_i$ des IK-espaces vectoriels.

Pour tout $\lambda \in$ IK, pour tous $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$,

$$(\lambda A_1) \otimes A_2 = A_1 \otimes \lambda A_2 = \lambda(A_1 \otimes A_2)$$

1.3.11. Propriété

Soient $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_i$ des IK-espaces vectoriels.

Pour tous $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$,

Si $A_1 \otimes A_2 = 0$, alors l'un au moins de A_1 et A_2 est égal à l'opérateur nul (c'est-à-dire $A_1=0$ ou $A_2 = 0$).

Démonstration

Pour tous $\overline{x}_i \in \mathcal{E}_i$, $(A_1 \otimes A_2)(\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2) = 0$

Donc, pour tous $\underline{\phi_i} \in \mathcal{F}_i^*$,

$$(A_1 \otimes A_2)(\overline{x}_1 \otimes \overline{x}_2)(\underline{\phi_1} \otimes \underline{\phi_2}) = 0$$

$$(A_1(\overline{x}_1))(\underline{\phi_1})(A_2(\overline{x}_2))(\underline{\phi_2}) = 0$$

Supposons qu'il existait $\overline{x}_1 \in \mathcal{E}_1$, qu'il existait $\underline{\phi_1} \in \mathcal{F}_1^*$, $(A_1(\overline{x}_1))(\underline{\phi_1}) \neq 0$

qu'il existait $\overline{x}_2 \in \mathcal{E}_2$ et qu'il existait $\underline{\phi_2} \in \mathcal{F}_2^*$, $(A_2(\overline{x}_2))(\underline{\phi_2}) \neq 0$

alors

$$(A_1(\overline{x}_1))(\underline{\phi_1})(A_2(\overline{x}_2))(\underline{\phi_2}) \neq 0$$

On aurait une contradiction.

Donc, pour tout $\overline{x}_1 \in \mathcal{E}_1$, pour tout $\underline{\phi_1} \in \mathcal{F}_1^*$, $(A_1(\overline{x}_1))(\underline{\phi_1}) = 0$

ou pour tout $\overline{x}_2 \in \mathcal{E}_2$, pour tout $\underline{\phi_2} \in \mathcal{F}_2^*$, $(A_2(\overline{x}_2))(\underline{\phi_2}) = 0$

C'est-à-dire, pour tout $\overline{x}_1 \in \mathcal{E}_1$, $A_1\left(\overline{x}_1\right) = 0$, ou pour tout $\overline{x}_2 \in \mathcal{E}_2$, $A_2\left(\overline{x}_2\right) = 0$

C.Q.F.D.

1.3.12. Propriété

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$ six IK-espaces vectoriels.

Pour tous $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$, $B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)$,

Si $\begin{cases} A_1 \text{ et } B_1 \text{ commutent pour } \bullet \\ A_2 \text{ et } B_2 \text{ commutent pour } \bullet \end{cases}$ alors, $A_1 \otimes A_2$, $B_1 \otimes B_2$ commutent pour $\bullet$

$$\text{Si } \begin{cases} A_1 \text{ et } B_1 \text{ anticommutent pour } \bullet \\ \\ A_2 \text{ et } B_2 \text{ anticommutent pour } \bullet \end{cases} \text{alors, } A_1 \otimes A_2 \text{ et } B_1 \otimes B_2 \text{ commutent pour } \bullet$$

$$\text{Si } \begin{cases} A_1 \text{ et } B_1 \text{ anticommutent pour } \bullet \\ \\ A_2 \text{ et } B_2 \text{ commutent pour } \bullet \end{cases} \text{alors, } A_1 \otimes A_2 \text{ et } B_1 \otimes B_2 \text{ anticommutent pour } \bullet$$

(Conséquence immédiate de la propriété **1.3.4.**)

1.3.13. Théorème

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ quatre IK-espaces vectoriels.

$(A_i)_{1\leq i\leq n_1}$ une base de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$

$(B_j)_{1\leq j\leq n_2}$ une base de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$,

Alors, $(A_i \otimes B_j)_{\substack{1\leq i\leq n_1 \\ 1\leq j\leq n_2}}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$.

Démonstration

Soit $(\alpha^{ij})_{\substack{1\leq i\leq n_1 \\ 1\leq j\leq n_2}}$ un système d'éléments de IK tel que

$$\alpha^{ij} A_i \otimes B_j = 0$$

Soit $\alpha^{ij} = a^i b^j$. Alors,

$$a^i b^j\, A_i \otimes B_j = 0$$

D'après la propriété **1.3.10.**

$$(a^i A_i) \otimes (b^j B_j) = 0$$

D'après la propriété **1.3.11.**

$$a^i A_i = 0 \quad \text{ou} \quad b^j B_j = 0$$

Donc

$$(\, a^i = 0 \;,\; \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n_1\}) \quad \text{ou} \quad (b^j = 0,\; \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n_2\})$$

car $(A_i)_{1 \le i \le n_1}$ est une base de $\mathcal{L}\,(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(B_j)_{1 \le j \le n_2}$ est une base de $\mathcal{L}\,(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$.

D'où,

$$\alpha^{ij} = 0,\; \forall\, (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n_1\} \times \{1, 2, \ldots, n_2\}.$$

C.Q.F.D.

1.4. Produit tensoriel de matrices

1.4.1. Définition

Soient $[A] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathrm{IK})$, $[B] \in \mathcal{M}_{p \times r}(\mathrm{IK})$, la matrice notée

$$[A] \otimes [B] = \begin{bmatrix} A^1_1[B] \ldots A^1_j[B] \ldots A^1_n[B] \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ A^i_1[B] \ldots A^i_j[B] \ldots A^i_n[B] \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ A^m_1[B] \ldots A^m_j[B] \ldots A^m_n[B] \end{bmatrix}$$

obtenue en supprimant les crochets dans les multiplications par un élément de IK, $A^i_j[B]$, est appelée produit tensoriel de la matrice $[A]$ par la matrice $[B]$.

$$[A] \otimes [B] \in \mathcal{M}_{mp \times nr}(\mathrm{IK})$$

1.4.2. Théorème

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, G, H quatre IK-espaces vectoriels.

Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $B \in \mathcal{L}(G, H)$, $[A]$ la matrice de A dans le couple de base $\left((\bar{e}_i)_{1\le i\le n}, (\bar{f}_j)_{1\le j\le m}\right)$, $[B]$ celle de B dans $\left((\bar{g}_k)_{1\le k\le r}, (h_l)_{1\le l\le p}\right)$.

Alors, $[A]\otimes[B]$ est la matrice de $A\otimes B$ dans le couple de base $(\mathscr{B}, \mathscr{B}_1)$ où

$$\mathscr{B} = \left(\bar{e}_1 \otimes \bar{g}_1, \bar{e}_1 \otimes \bar{g}_2, \dots, \bar{e}_1 \otimes \bar{g}_r, \bar{e}_2 \otimes \bar{g}_1, \bar{e}_2 \otimes \bar{g}_2, \dots, \bar{e}_n \otimes \bar{g}_1, \bar{e}_n \otimes \bar{g}_2, \dots, \bar{e}_n \otimes \bar{g}_r\right)$$

Notons

$$\mathscr{B} = \left(\bar{e}_i \otimes \bar{g}_k\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le r}} = \left((\bar{e}_i)_{1\le i\le n}\right)\otimes\left((\bar{g}_k)_{1\le k\le r}\right),$$

$$\mathscr{B}_1 = \left(\bar{f}_j \otimes \bar{h}_l\right)_{\substack{1\le j\le m\\1\le l\le p}} = \left((\bar{f}_j)_{1\le j\le m}\right)\otimes\left((\bar{h}_l)_{1\le l\le p}\right)$$

$[A]\otimes[B]$ est une matrice à mp lignes et à nr colonnes.

$$[A]\otimes[B] = (\gamma_t^s)_{\substack{1\le s\le mp\\1\le t\le nr}}$$

où

$$\gamma_t^s = A_{j_1}^{i_1} B_{j_2}^{i_2}, \quad s = p(i_1 - 1) + i_2$$

$$t = r(j_1 - 1) + j_2 \text{ (Voir } [12], [15] \text{)}$$

Démonstration

Dans $\mathscr{B} = \left(\bar{e}_i \otimes \bar{g}_k\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le r}}$, $\bar{e}_{j_1} \otimes \bar{g}_{j_2}$ est le $t = r(j_1 - 1) + j_2$ -ième vecteur.

Dans $\mathscr{B}_1 = \left(\bar{f}_j \otimes \bar{h}_l\right)_{\substack{1\le j\le m\\1\le l\le p}}$, $\bar{f}_{i_1} \otimes \bar{h}_{i_2}$ est le $s = p(i_1 - 1) + i_2$ –ième vecteur.

$$A\otimes B\left(\bar{e}_{j_1} \otimes \bar{g}_{j_2}\right) = A\bar{e}_{j_1} \otimes B\bar{g}_{j_2} = \left(A_{j_1}^{i_1}\bar{f}_{i_1}\right)\otimes\left(B_{j_2}^{i_2}\bar{h}_{i_2}\right) = A_{j_1}^{i_1}B_{j_2}^{i_2}\bar{f}_{i_1} \otimes \bar{h}_{i_2}$$

La $t = r(j_1 - 1) + j_2$- ième colonne de la matrice de $A \otimes B$ dans $(\mathscr{B}, \mathscr{B}_1)$ est donc, selon l'ordre des vecteurs de $\mathscr{B}_1$

$$\begin{array}{c} A^1_{j_1} B^1_{j_2} \\ A^1_{j_1} B^2_{j_2} \\ \vdots \\ A^1_{j_1} B^p_{j_2} \\ A^2_{j_1} B^1_{j_2} \\ A^2_{j_1} B^2_{j_2} \\ \vdots \\ A^2_{j_1} B^p_{j_2} \\ \vdots \\ A^m_{j_1} B^1_{j_2} \\ A^m_{j_1} B^2_{j_2} \\ \vdots \\ A^m_{j_1} B^p_{j_2} \end{array}$$

En faisant apparaître des crochets, nous voyons que la matrice de $A \otimes B$ dans $(\mathscr{B}, \mathscr{B}_1)$ est bien $[A] \otimes [B]$.

C.Q.F.D.

1.4.3. Propriété

$$([B_1] \otimes [B_2])([A_1] \otimes [A_2]) = ([B_1][A_1]) \otimes ([B_2][A_2])$$

pour $[B_1]$, $[A_1]$, $[B_2]$, $[A_2]$ matrices à coefficients dans IK et si les produits $[B_1][A_1]$ et $[B_2][A_2]$ sont définis.

Démonstration

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_2$ six IK-espaces vectoriels, $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E})$, $B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F})$, $B_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_2)$

Soient $[A_1]$ la matrice de A_1 dans le couple de bases $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$;

$[B_1]$ la matrice de B_1 dans $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$;

$[A_2]$ la matrice de A_2 dans $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$;

$[B_2]$ la matrice de B_2 dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_2)$.

Alors,

$[B_2][A_2]$ est la matrice de B_2A_2 dans $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$;

$[B_1][A_1]$ est la matrice de B_1A_1 dans $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

et d'après le théorème **1.4.2.**

$([B_1][A_1]) \otimes ([B_2][A_2])$ est la matrice de $(B_1A_1) \otimes (B_2A_2)$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$

$[B_1] \otimes [B_2]$ est la matrice de $B_1 \otimes B_2$ dans $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$;

$[A_1] \otimes [A_2]$ est la matrice de $A_1 \otimes A_2$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$

donc, $([B_1] \otimes [B_2])([A_1] \otimes [A_2])$ est la matrice de $(B_1 \otimes B_2)(A_1 \otimes A_2)$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$.

D'après la propriété **1.3.4.**, nous avons :

$$([B_1][A_1]) \otimes ([B_2][A_2]) = ([B_1] \otimes [B_2])([A_1] \otimes [A_2])$$

C.Q.F.D.

1.4.4. Propriété

$$[\,I_{\xi_1}\,] \otimes [\,I_{\xi_2}\,] = [\,I_{\xi_1 \otimes \xi_2}\,]$$

Démonstration

Démonstration

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux IK-espaces vectoriels de dimensions respectives n_1, n_2. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases respectives de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

$$[I_{\xi_1}] = [I_{n_1}] \text{ et } [I_{\xi_2}] = [I_{n_2}]$$

sont respectivement les matrices de I_{ξ_1} et I_{ξ_2} dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. D'après le théorème **1.4.2.**

$[I_{n_1}] \otimes [I_{n_2}]$ la matrice de $I_{\xi_1} \otimes I_{\xi_2}$ dans la base $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. $I_{\xi_1 \otimes \xi_2}$

D'après la propriété **1.3.5.**, $[I_{n_1}] \otimes [I_{n_2}]$ est la matrice de $I_{\xi_1 \otimes \xi_2}$ dans la base $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

D'où :

$$[\,I_{\xi_1}\,] \otimes [\,I_{\xi_2}\,] = [\,I_{\xi_1 \otimes \xi_2}\,]$$

C.Q.F.D.

1.4.5. Propriété

Pour $[A_1]$, $[A_2]$ matrices carrées régulières, alors $[A_1] \otimes [A_2]$ est régulière et

$$([A_1] \otimes [A_2])^{-1} = [A_1]^{-1} \otimes [A_2]^{-1}$$

(conséquence des propriétés **1.4.3.** et **1.4.4.**)

1.4.6. Propriété

Pour $[A_1]$, $[A_2]$ matrices quelconques à coefficients dans IK

$$([A_1] \otimes [A_2])^t = [A_1]^t \otimes [A_2]^t$$

Démonstration

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_2$ quatre IK-espaces vectoriels. Soient $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$.

$[A_1]$ la matrice de A_1 dans $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

$[A_2]$ la matrice de A_2 dans $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$

$[A_1]^t$ la matrice de A_1^t dans $(\mathcal{B}_1^*, \mathcal{A}_1^*)$.

$[A_2]^t$ la matrice de A_2^t dans $(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{A}_1^*)$.

$[A_1]^t \otimes [A_2]^t$ la matrice de $A_1^t \otimes A_2^t$ dans $(\mathcal{B}_1^* \otimes \mathcal{B}_2^*, \mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*)$

$[A_1] \otimes [A_2]$ la matrice de $A_1 \otimes A_2$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$

donc $([A_1] \otimes [A_2])^t$ la matrice de $(A_1 \otimes A_2)^t$ dans $((\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)^*, (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^*)$.Or,

$(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)^* \equiv \mathcal{B}_1^* \otimes \mathcal{B}_2^*$ et $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^* \equiv \mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*$.

D'après la propriété **1.3.7.**

$$([A_1] \otimes [A_2])^t = [A_1]^t \otimes [A_2]^t$$

C.Q.F.D.

1.4.7. Propriété

Le produit tensorielel de matrices est associatif. C'est-à-dire

$$([A_1] \otimes [A_2]) \otimes [A_3] = [A_1] \otimes ([A_2] \otimes [A_3])$$

pour $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$ matrices quelconques à coefficients dans IK.

<u>Démonstration</u> :

Soient des IK-espaces vectoriels $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_i$. Soient $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$.

$[A_1]$ la matrice de A_1 dans $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

$[A_2]$ la matrice de A_2 dans $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$

$[A_3]$ la matrice de A_3 dans $(\mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3)$

D'après le théorème **1.4.2.**

$[A_1] \otimes [A_2]$ est la matrice de $A_1 \otimes A_2$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$

$([A_1] \otimes [A_2]) \otimes [A_3]$ est la matrice de $(A_1 \otimes A_2) \otimes A_3$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3,$
$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3)$ car $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 \equiv \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$

$(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2) \otimes \mathcal{B}_3 \equiv \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3$

De même, $[A_1]\otimes([A_2]\otimes[A_3])$ est la matrice de $A_1\otimes(A_2\otimes A_3)$ dans $(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\otimes\mathcal{A}_3,$ $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\otimes\mathcal{B}_3)$

D'où, d'après la propriété **1.3.3.**

$$([A_1]\otimes[A_2])\otimes[A_3]=[A_1]\otimes([A_2]\otimes[A_3])$$

C.Q.F.D.

1.4.8. Propriété

Le produit tensoriel de matrices est distributif par rapport à l'addition. C'est-à-dire

$$[C]\otimes([A]+[B])=[C]\otimes[A]+[C]\otimes[B]$$

pour $[C]$, $[A]$, $[B]$ matrices quelconques à coefficients dans IK, avec $[A]$, $[B]$ de même dimension .

Démonstration

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ quatre IK-espaces vectoriels. Soient $C\in\mathcal{L}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, $A, B\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$.

Soient $[C]$ matrice de C dans $(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$

$[A]$ matrice de A dans $(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)$

$[B]$ matrice de B dans $(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)$

$[A]+[B]$ matrice de A + B dans $(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)$

D'après le théorème **1.4.2.**

$[C]\otimes([A]+[B])$ matrice de $C\otimes(A+B)$ dans $(\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_2\otimes\mathcal{A}_2)$

D'où, d'après la propriété **1.3.8.**

$$[C]\otimes([A]+[B])=[C]\otimes[A]+[C]\otimes[B]$$

C.Q.F.D.

1.4.9. Propriété

Pour tout $\lambda\in$ IK, pour toutes $[A_1]$, $[A_2]$ matrices quelconques à coefficients dans IK

$$(\lambda[A_1])\otimes[A_2]=[A_1]\otimes(\lambda[A_2])=\lambda([A_1]\otimes[A_2])$$

Démonstration

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ quatre IK-espaces vectoriels. Soient $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$,

$A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$.

Soient $[A_1]$ la matrice de A_1 dans $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

$[A_2]$ la matrice de A_2 dans $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$

$\lambda [A_1]$ la matrice de λA_1 dans $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

$\lambda [A_2]$ la matrice de λA_2 dans $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$

D'après le théorème **1.4.2.**

$(\lambda [A_1]) \otimes [A_2]$ est la matrice de $(\lambda A_1) \otimes A_2$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$

$[A_1] \otimes (\lambda [A_2])$ est la matrice de $A_1 \otimes (\lambda A_2)$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$

$\lambda ([A_1] \otimes [A_2])$ est la matrice de $\lambda (A_1 \otimes A_2)$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$

D'où, d'après la propriété **1.3.10.**

$$(\lambda [A_1]) \otimes [A_2] = [A_1] \otimes (\lambda [A_2]) = \lambda ([A_1] \otimes [A_2])$$

C.Q.F.D.

1.4.10. Propriété

Pour toutes $[A_1]$, $[A_2]$ matrices quelconques à coefficients dans IK, si

$[A_1] \otimes [A_2] = 0$, alors $[A_1] = 0$ ou $[A_2] = 0$

Démonstration

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ quatre IK-espaces vectoriels. Soient $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$,

$A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$.

$[A_1]$ la matrice de A_1 dans $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

$[A_2]$ la matrice de A_2 dans $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$

D'après le théorème **1.4.2.**

$[A_1] \otimes [A_2]$ est la matrice de $A_1 \otimes A_2$ dans $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$

Comme $[A_1] \otimes [A_2] = 0$ donc $A_1 \otimes A_2 = 0$

D'après la propriété **1.3.11.**

$$A_1 = 0 \quad \text{ou} \quad A_2 = 0$$

D'où,

$$[A_1] = 0 \text{ ou } [A_2] = 0$$

1.4.11. Propriété

Ici la commutation ou l'anticommutation est pour le produit matriciel habituel. Pour toutes $[A_1]$, $[B_1]$, $[A_2]$, $[B_2]$ matrices carrées quelconques de même dimension et à coefficients dans IK.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } [A_1], [B_1] \text{ commutent} \\ \text{Si } [A_2], [B_2] \text{ commutent} \end{array}\right\} \text{alors } [A_1] \otimes [A_2],\ [B_1] \otimes [B_2] \text{ commutent.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } [A_1], [B_1] \text{ commutent} \\ \text{Si } [A_2], [B_2] \text{ anticommutent} \end{array}\right\} \text{alors } [A_1] \otimes [A_2],\ [B_1] \otimes [B_2] \text{ anticommutent.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } [A_1], [B_1] \text{ anticommutent} \\ \text{Si } [A_2], [B_2] \text{ anticommutent} \end{array}\right\} \text{alors } [A_1] \otimes [A_2],\ [B_1] \otimes [B_2] \text{ commutent.}$$

(Conséquence de la propriété **1.4.3.**)

1.4.12. Théorème

Soient $\left([A_i]\right)_{1 \leq i \leq n \times m}$ une base de $\mathcal{M}_{n \times m}$ (IK),

$\left(B_j\right)_{1 \leq j \leq p \times r}$ une base de $\mathcal{M}_{p \times r}$ (IK)

Alors, $\left(\left[A_i\right]\otimes\left[B_j\right]\right)_{\substack{1\leq i\leq n\times m\\ 1\leq j\leq p\times r}}$ est une base de $\mathcal{M}_{np\times mr}$ (IK).

Démonstration

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ quatre espaces vectoriels sur un même corps IK, de dimensions respectives p_1, m_1, p_2 et m_2 et de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_1'$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_2'$.

Soit $\left(A_i\right)_{1\leq i\leq n\times m}$ un système d'éléments de $\mathcal{L}$ ($\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$), avec $\left[A_i\right]$ la matrice de A_i dans ($\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_1'$), pour tout $i\in\{1,2,\ldots,n\times m\}$.

Soit $\left(B_j\right)_{1\leq j\leq p\times r}$ un système d'éléments de $\mathcal{L}$ ($\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_2$), avec $\left[B_j\right]$ la matrice de B_j dans ($\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_2'$), pour tout $j\in\{1,2,\ldots,p\times r\}$.

D'après le théorème **1.4.2.**, $\left[A_i\right]\otimes\left[B_j\right]$ est la matrice de $A_i\otimes B_j$ dans ($\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1'\otimes\mathcal{B}_2'$), pour tout $(i, j)\in\{1,2,\ldots,n\times m\}\times\{1,2,\ldots,p\times r\}$.

D'après le théorème **1.3.13.**, $\left(A_i\otimes B_j\right)_{\substack{1\leq i\leq n\times m\\ 1\leq j\leq p\times r}}$ est une base de $\mathcal{L}$ ($\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2$).

D'où, d'après la proposition **1.1.3.**, $\left(\left[A_i\right]\otimes\left[B_j\right]\right)_{\substack{1\leq i\leq n\times m\\ 1\leq j\leq p\times r}}$ est une base de $\mathcal{M}_{np\times mr}$ (IK).

C.Q.F.D.

Chapitre 2. ALGEBRE REELLE DE CLIFFORD

2.1. Construction de l'algèbre réelle de Clifford

2.1.1. Algèbre de Grassmann [12],[16]

Soit $\mathcal{E}_n$ un espace vectoriel sur IR de dimension n. Pour $k \in IN^*$, on note $\Lambda^k \mathcal{E}_n$ l'ensemble des k-formes linéaires antisymétriques sur $\mathcal{E}_n$. Pour $k > n$, $\Lambda^k \mathcal{E}_n = \{0\}$.

Notons $\Lambda^0 \mathcal{E}_n$=IR et $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$ l' ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{E}_n$.

Soit $\mathcal{C}_n$ la somme directe

$$\mathcal{C}_n = \Lambda^0 \mathcal{E}_n \oplus \Lambda^1 \mathcal{E}_n \oplus \ldots \oplus \Lambda^n \mathcal{E}_n.$$

$(\mathcal{C}_n, +, \bullet)$ est un IR-espace vectoriel de dimension

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Pour tout $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ notons ω_k un élément de $\Lambda^k \mathcal{E}_n$ tel que

$$\omega_k = \underline{\omega}^1 \wedge \underline{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \underline{\omega}^k$$

où $\wedge$ est le produit de Grassmann et les ω^i sont des formes linéaires sur $\mathcal{E}_n$.

En posant

$$\lambda \wedge \omega^k = 0, \text{ pour tout } k \in \{1,2,\ldots,n\}, \text{ pour tout } \lambda \in IR,$$

$(\mathcal{C}_n, +, \bullet, \wedge)$ est une IR-algèbre, appelée algèbre de Grassmann.

Maintenant, nous allons définir un autre produit dans $\mathcal{C}_n$, appelée produit de Clifford. Soit Q une forme quadratique sur $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$ telle que $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$ muni de Q est un espace pseudo-euclidien (ou euclidien). Soit g la forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$ associée à Q.

Soit $\overline{g}$ l'application bilinéaire de $\mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n$ dans $\mathcal{C}_n$ telle que

$$\overline{g}(\underline{u}, \underline{v}) = g(\underline{u}, \underline{v}), \forall \underline{u}, \underline{v} \in \Lambda^1 \mathcal{E}_n$$

Pour $\underline{u} \in \Lambda^1 \mathcal{E}_n$, pour $\omega_p \in \Lambda^p \mathcal{E}_n$ telle que

$$\omega_p = \underline{\omega}^1 \wedge \underline{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \underline{\omega}^p,$$

où les $\underline{\omega}^i$ sont des 1-formes,

$$\overline{g}(\underline{u},\omega_p)=\overline{g}(\underline{u},\omega_{p-1})\wedge\underline{\omega}^p+(-1)^{p+1}\omega_{p-1}\wedge g(\underline{u},\underline{\omega}^p), \qquad (29.1)$$

avec

$$\omega_{p-1}=\underline{\omega}^1\wedge\underline{\omega}^2\wedge\ldots\wedge\underline{\omega}^{p-1}$$

.Alors,

$$\overline{g}(\underline{u},\omega_p)=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}g(\underline{u},\underline{\omega}^k)\underline{\omega}^1\wedge\ldots\wedge\underline{\omega}^{k-1}\wedge\underline{\omega}^{k+1}\wedge\ldots\wedge\underline{\omega}^p\in\Lambda^{p-1}\mathcal{E}_n. \qquad (29.2)$$

$\overline{g}(\omega_p,\underline{u})$ est défini par

$$\overline{g}(\omega_p,\underline{u})=(-1)^{p-1}\overline{g}(\underline{u},\omega_p) \qquad (29.3)$$

Pour $p\leq q$, soit $\theta_q=\underline{\theta}^1\wedge\ldots\wedge\underline{\theta}^q$ avec les $\underline{\theta}^i$ sont des 1-formes,

$$\overline{g}(\omega_p,\theta_q)=\overline{g}(\omega_{p-1},\overline{g}(\underline{\omega}^p,\theta_q)) \qquad (29.4)$$

On montre , en utilisant (29.2), (29.3) et (29.4), que :

pour $p\leq q$,

$$\overline{g}(\omega_p,\theta_q)=(-1)^{p(q+1)}\overline{g}(\theta_q,\omega_p)$$

$\overline{g}$ est symétrique sur $\Lambda^k\mathcal{E}_n$, pour tout $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$.

Pour tout $\lambda\in IR$, pour tout $\omega\in\mathcal{C}_n$,

$$\overline{g}(\lambda,\omega)=\lambda\omega$$

2.1.2. Produit de Clifford [16], [17]

$A, B\in\mathcal{C}_n$, on définit le produit Clifford de A et B par :

$$A*B=A\wedge B+\overline{g}(A,B)$$

$\mathcal{C}_n$ est stable par le produit de Clifford .

Pour $\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2\in\Lambda^1\mathcal{E}_n$,

$$\underline{\omega}^1*\underline{\omega}^2=g(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)+\underline{\omega}^1\wedge\underline{\omega}^2$$

$$\underline{\omega}^2 * \underline{\omega}^1 = g(\underline{\omega}^1 , \underline{\omega}^2) - \underline{\omega}^2 \wedge \underline{\omega}^1$$

$$\underline{\omega}^1 * \underline{\omega}^2 + \underline{\omega}^2 * \underline{\omega}^1 = 2\, g(\underline{\omega}^1 , \underline{\omega}^2)$$

C'est-à-dire

$$g(\underline{\omega}^1 , \underline{\omega}^2) = \frac{1}{2}(\underline{\omega}^1 * \underline{\omega}^2 + \underline{\omega}^2 * \underline{\omega}^1)$$

et

$$\underline{\omega}^1 \wedge \underline{\omega}^2 = \frac{1}{2}(\underline{\omega}^1 * \underline{\omega}^2 - \underline{\omega}^2 * \underline{\omega}^1)$$

Soient $\underline{\omega}, \underline{\theta}, \underline{\tau} \in \Lambda^1 \mathcal{E}_n$,

$$(\underline{\omega} * \underline{\theta}) * \underline{\tau} = \left[g(\underline{\omega},\underline{\theta}) + \underline{\omega} \wedge \underline{\theta}\right] * \tau = g(\underline{\omega},\underline{\theta})\tau + (\underline{\omega} \wedge \underline{\theta}) * \tau$$

(car $\overline{g}$ est une forme bilinéaire symétrique et $\wedge$ est distributive par rapport à +)

$$= g(\underline{\omega},\underline{\theta})\underline{\tau} + \overline{g}\left[(\underline{\omega} \wedge \underline{\theta}),\underline{\tau}\right] + (\underline{\omega} \wedge \underline{\theta}) \wedge \underline{\tau} = g(\underline{\omega},\underline{\theta})\underline{\tau} - \overline{g}\left[\underline{\tau},(\underline{\omega} \wedge \underline{\theta})\right] + (\underline{\omega} \wedge \underline{\theta}) \wedge \underline{\tau}$$

$$= g(\underline{\omega},\underline{\theta})\underline{\tau} - g(\underline{\tau},\underline{\omega})\underline{\theta} + g(\underline{\tau},\underline{\theta})\underline{\omega} + (\underline{\omega} \wedge \underline{\theta}) \wedge \underline{\tau}$$

D'une manière analogue :

$$\underline{\omega} * (\underline{\theta} * \underline{\tau}) = \underline{\omega} * g(\underline{\theta},\underline{\tau}) + g(\underline{\omega},\underline{\theta})\underline{\tau} - g(\underline{\omega},\underline{\tau})\underline{\theta} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\theta} \wedge \underline{\tau})$$

D'où,

$$(\omega * \theta) * \tau = \underline{\omega} * (\underline{\theta} * \underline{\tau})$$

pour tous $\underline{\omega}, \underline{\theta}, \underline{\tau} \in \Lambda^1 \mathcal{E}_n$.

Nous avons vu que le produit de Clifford est associative dans $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$ et est distributive par rapport à +.

Soit $\mathcal{A}_n$ l'algèbre engendrée par $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$, par la multiplication de Clifford.

$$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{C}_n$$

Nous allons montrer que

$$\mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}_n.$$

Soient $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \Lambda^1 \mathcal{E}_n$, $\underline{\alpha} \wedge \underline{\beta} \in \mathcal{A}_n$. Raisonnons par récurrence : supposons que pour un $p \in \mathbb{N}$

$$\Lambda^0 \mathcal{E}_n \oplus \Lambda^1 \mathcal{E}_n \oplus \ldots \oplus \Lambda^p \mathcal{E}_n \subset \mathcal{A}_n$$

Soit $\alpha_{p+1} = \underline{\alpha}^1 \wedge \underline{\alpha}^2 \wedge \ldots \wedge \underline{\alpha}^P \wedge \underline{\alpha}^{P+1}$, $\alpha_p = \underline{\alpha}^1 \wedge \underline{\alpha}^2 \wedge \ldots \wedge \underline{\alpha}^P \in \mathcal{A}_n$, où les $\underline{\alpha}^i \in \Lambda^1 \mathcal{E}_n$.

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p \wedge \underline{\alpha}^{p+1} = \alpha_p * \underline{\alpha}^{p+1} - \overline{g}(\alpha_p, \underline{\alpha}^{p+1}).$$

Comme $\alpha_p \in \mathcal{A}_n$, donc $\alpha_p * \underline{\alpha}^{p+1} \in \mathcal{A}_n$, et $\overline{g}(\alpha_p, \underline{\alpha}^{p+1}) \in \mathcal{A}_n$

car $\overline{g}(\alpha_p, \underline{\alpha}^{p+1}) \in \Lambda^0 \mathcal{E}_n \oplus \Lambda^1 \mathcal{E}_n \oplus \ldots \oplus \Lambda^p \mathcal{E}_n$.

On a :

pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_p = \underline{\alpha}^1 \wedge \underline{\alpha}^2 \wedge \ldots \wedge \underline{\alpha}^P \in \mathcal{A}_n$.

D'où, $\mathcal{A}_n = \mathcal{C}_n$ l'algèbre engendrée par $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$, par le produit de Clifford.

2.1.3. Définition

Soient $\mathcal{E}_n$ un IR-espace vectoriel de dimension n, tel que $\mathcal{E}_n$ muni d'une forme quadratique Q est un espace pseudo-euclidien.

$(\mathcal{C}_n, +, \bullet)$ muni du produit de Clifford associé à Q, est une algèbre, appelée algèbre réelle de Clifford (ARC), que nous notons $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, Q)$ ou $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$, avec g la forme bilinéaire symétrique associée à Q.

2.1.4. Définitions

On appelle dimension d'une (ARC) $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$ sa dimension en tant que IR-espace vectoriel.

$$\mathrm{Dim}\ \mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g) = 2^n$$

Si ($\underline{e}^1, \underline{e}^2, \ldots, \underline{e}^n$) est une base pseudo-orthonormale de $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$, alors les 2^n produits de Clifford entre les $\underline{e}^i$

$$1$$

$$\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^n$$

$$\underline{e}^1 * \underline{e}^2, \quad \underline{e}^1 * \underline{e}^3, \dots, \underline{e}^{n-1} * \underline{e}^n$$

$$\underline{e}^1 * \underline{e}^2 * \underline{e}^3, \dots, \quad \underline{e}^{n-2} * \underline{e}^{n-1} * \underline{e}^n$$

....

$$\underline{e}^1 * \underline{e}^2 * \dots * \underline{e}^n$$

forment une base du IR-espace vectoriel $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$, appelée base canonique.

$$\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g) = \mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^0 \oplus \mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^1 \oplus \mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^2 \oplus \dots \oplus \mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^n$$

où, $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^0 \equiv$ IR dont les éléments sont appelés scalaires, est le sous espace vectoriel engendré par 1 ;

$\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^1 = \Lambda^1 \mathcal{E}_n$ dont les éléments sont appelés vecteurs, est le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$ engendré par $(\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^n)$;

$\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^2$ dont les éléments sont appelés bivecteurs, est le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$ engendré par $(\underline{e}^1 * \underline{e}^2, \ \underline{e}^1 * \underline{e}^3, \dots, \underline{e}^{n-1} * \underline{e}^n)$;

$\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^3$ dont les éléments sont appelés trivecteurs, est le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$ engendré par $(\underline{e}^1 * \underline{e}^2 * \underline{e}^3, \dots, \ \underline{e}^{n-2} * \underline{e}^{n-1} * \underline{e}^n)$;

....

$\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)^n$ dont les éléments sont appelés n-vecteurs, est le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$ engendré par $\underline{e}^1 * \underline{e}^2 * \dots * \underline{e}^n$.

2.2. Algèbre de Pauli [6]

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

les matrices de Pauli. Notons $\mathcal{E}_3$ l'espace vectoriel réel engendré par $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.On note

$$\sigma_0 = [I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice unité de dimension 2.

$\sigma_0 \notin \mathcal{E}_3$.

Soit $\Lambda^1\ \mathcal{E}_3$ l'espace dual de $\mathcal{E}_3$.$(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ la base de $\Lambda^1\ \mathcal{E}_3$, duale de $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Définissons l'espace dual comme l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{E}_3$ dans IR $[I_2] \equiv$ IR que nous notons $\Lambda^1\ \mathcal{E}_3$.

$\sigma^j\sigma_j = [I_2]$, l'image de σ_j par σ^j, j =1,2,3.

On montre facilement que :

$$\sigma_j \bullet \sigma_k + \sigma_k \bullet \sigma_j = 2\,\delta_{jk}\ ,\ j=1,2,3,\ \ k=1,2,3.$$

$$\begin{cases} \sigma_j \bullet \sigma_k + \sigma_k \bullet \sigma_j = 0 \ \text{ si } \ j \neq k \\ \\ (\sigma_j)^2 = 1 \quad , \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

$\sigma^j\sigma_k = \delta^j_k$ l'image de σ_k par σ^j

L'application

$$g: \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \mapsto \text{IR}$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \frac{1}{2}(\underline{x} \bullet \underline{y} + \underline{y} \bullet \underline{x})$$

est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathcal{E}_3$. $\mathcal{E}_3$ muni de cette forme bilinéaire est un espace euclidien. En prenant

$$\sigma^j\sigma_k = \frac{1}{2}(\sigma_j \bullet \sigma_k + \sigma_k \bullet \sigma_j) = g(\sigma_j, \sigma_k)$$

on peut identifier σ^j à σ_j .C'est de l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{E}_3$ et son dual $\Lambda^1\ \mathcal{E}_3$.

Définissons sur $\mathcal{E}_3$ le produit de Clifford. Pour tous $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathcal{E}_3$,

$$\overline{x} * \overline{y} = \overline{x} \wedge \overline{y} + g(\overline{x}, \overline{y})$$

Alors

$$g(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}(\overline{x} * \overline{y} + \overline{y} * \overline{x})$$

Si on prend

$$\overline{x} \wedge \overline{y} = \frac{1}{2}(\overline{x} \bullet \overline{y} - \overline{y} \bullet \overline{x})$$

et

$$g(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}(\overline{x} \bullet \overline{y} + \overline{y} \bullet \overline{x}) \quad ,$$

le produit de Clifford de $\overline{x}$ par $\overline{y}$ n'est autre que le produit matriciel usuel.

On note $\mathcal{C}l_{3,0}$ l'algèbre de Clifford ainsi obtenue , appelée algèbre de Pauli ; algèbre engendrée par $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$.

$$\sigma^0, \qquad \sigma^1, \sigma^2,\ \sigma^3, \qquad \sigma^1 \bullet \sigma^2,\ \sigma^2 \bullet \sigma^3,\ \sigma^3 \bullet \sigma^1, \qquad \sigma^1 \bullet \sigma^2 \bullet \sigma^3 = i\sigma^0$$

forment une base de l'espace vectoriel sur IR $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ donc, $\mathcal{C}l_{3,0} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

On appelle p-nombre un élément de $\mathcal{C}l_{3,0}$

$$\begin{cases} \sigma^j \bullet \sigma^k + \sigma^k \bullet \sigma^j = 0 \text{ si } j \neq k \\ (\sigma^j)^2 = 1, \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

Soit $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ une base orthonormée de l'espace physique. On identifie un vecteur

$\overline{A} = a^1\overline{e}_1 + a^2\overline{e}_2 + a^3\overline{e}_3$

de l'espace physique à l'élément $a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3$ de $\mathcal{E}_3$.

$$A = a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3 \ ,$$

avec $a^1, a^2, a^3 \in IR$, est appelé un vecteur.

Tout élément A de $\mathcal{C}l_{3,0}$ est la somme

1) d'un scalaire $A_s = \lambda_0\sigma^0 \equiv \lambda_0,\ \lambda_0 \in IR$

2) d'un vecteur $A_v = \lambda_1\sigma^1 + \lambda_2\sigma^2 + \lambda_3\sigma^3,\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$

3) d'un bivecteur $A_b = \lambda_{12}\sigma^1\sigma^2 + \lambda_{23}\sigma^2\sigma^3 + \lambda_{31}\sigma^3\sigma^1,\ \lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{31} \in IR$

4) d'un pseudo-scalaire $A_p = \lambda_{123}\sigma^1\sigma^2\sigma^3 = i\lambda_{123}\sigma^0 = i\lambda_{123}\ ,\ \lambda_{123} \in IR$

Notons :

$$\underline{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \partial^3 \end{bmatrix}$$

et
$$\nabla = \sigma^1\partial_1 + \sigma^2\partial_2 + \sigma^3\partial_3$$

$$\vec{\sigma}\vec{\nabla} = \sigma^1\partial_1 + \sigma^2\partial_2 + \sigma^3\partial_3 = \sigma^j\partial_j = \underline{\nabla}\,\vec{\sigma}$$

2.3. Isomorphisme d'algèbres

Soient $(\mathcal{A}, +, \bullet, \vee)$, $(\mathcal{A}_1, \dot{+}, \times, \wedge)$ deux algèbres sur un même corps IK. Une application Φ de A dans $\mathcal{A}_1$ est dite isomorphisme d'algèbres si :

i) Φ est bijective ;

ii) $\Phi(x + y) = \Phi(x) \dot{+} \Phi(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$;

iii) $\Phi(\lambda \bullet x) = \lambda \times \Phi(x)$, pour tout $\lambda \in IK$, pour tout $x \in \mathcal{A}$;

iv) $\Phi(x \vee y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y)$, pour tous $x, y \in \mathcal{A}$.

Notons

$$(\mathcal{A}, +, \bullet, \vee) \equiv (\mathcal{A}_1, \dot{+}, \times, \wedge)$$

2.4. Algèbre réelle de Clifford $\mathcal{C}l_{p,q}$ [16],[17]

2.4.1. Notation

Soient p, $q \in IN$. Soit $\mathcal{E}_n$ un espace vectoriel sur IR de dimension n. g est une métrique dans $\Lambda^1 \mathcal{E}_n$, de signature

$$\underbrace{+,+,\ldots,+}_{p\text{ fois}},\underbrace{-,-,\ldots,-}_{q\text{ fois}}$$

avec p+q = n.

On note $\mathcal{C}l_{p,q}(\mathcal{E}_n)$ l'ARC isomorphe à $(\mathcal{C}_n, +, \bullet)$ muni de produit de Clifford associé à g. On l'appelle une ARC $\mathcal{C}l_{p,q}$.

2.4.2. Remarque

Soit $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, g)$ une ARC $\mathcal{C}l_{p,q}$, alors $\mathcal{C}l(\mathcal{E}_n, -g)$ est une ARC $\mathcal{C}l_{q,p}$.

2.4.3. Théorème

Soient $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$, $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n)$, deux ARC.

$$\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n) \equiv \mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n) \text{ si et seulement si } p_1 = p_2 \text{ et } q_1 = q_2$$

Démonstration

« $\Rightarrow$ » Supposons que

$$\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n) \equiv \mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n)$$

Soit f l'isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$ à $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n)$.

Soient $*$ et $\circ$ les produits de Clifford respectivement sur $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$ et $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n)$.

Soit $\left(\gamma^\mu, \gamma^\alpha\right)_{\substack{1\le\mu\le p_1 \\ p_1+1\le\alpha\le p_1+q_1}}$ générateur de $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$.

$$(\gamma^\mu)^2 = +1, \quad \mu = 1, 2, \ldots, p_1$$

$$(\gamma^\alpha)^2 = -1, \quad \alpha = p_1+1, p_1+2, \ldots, p_1+q_1$$

$$\gamma^{\alpha} * \gamma^{\beta} + \gamma^{\beta} * \gamma^{\alpha} = 0, \text{ si } \alpha, \beta \in \{p_1+1, p_1+2, \ldots, p_1+q_1\}$$

$$\gamma^{\mu} * \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} * \gamma^{\mu} = 0, \text{ si } \mu, \nu \in \{1, 2, \ldots, p_1\}$$

$$\gamma^{\mu} * \gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha} * \gamma^{\mu} = 0, \text{ si } \alpha \in \{p_1+1, p_1+2, \ldots, p_1+q_1\}, \mu \in \{1, 2, \ldots, p_1\}$$

Soit $[U] \in \mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$,

$$f([U]) = f([U]) \circ f(1)$$

On a :

$$f([U]) \circ [1 - f(1)] = 0, \ \forall [U] \in \mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$$

Comme f est une bijection, donc

$$\forall \lambda \in IR, \ \lambda[1 - f(1)] = 0$$

Ainsi,

$$f(1) = 1$$

$$[f(\gamma^{\mu})]^2 = f((\gamma^{\mu})^2) = 1, \text{ si } \mu = 1, 2, \ldots, p_1$$

$$[f(\gamma^{\alpha})]^2 = f((\gamma^{\alpha})^2) = -1, \text{ si } \alpha = p_1+1, p_1+2, \ldots, p_1+q_1$$

$$f(\gamma^{\mu}) \circ f(\gamma^{\nu}) + f(\gamma^{\nu}) \circ f(\gamma^{\mu}) = f(\gamma^{\mu} * \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} * \gamma^{\mu}) = 0, \text{ si } \mu, \nu \in \{1, 2, \ldots, p_1\}$$

$$f(\gamma^{\alpha}) \circ f(\gamma^{\beta}) + f(\gamma^{\beta}) \circ f(\gamma^{\alpha}) = f(\gamma^{\alpha} * \gamma^{\beta} + \gamma^{\beta} * \gamma^{\alpha}) = 0, \text{ si } \alpha, \beta \in \{p_1+1, , \ldots, p_1+q_1\}$$

$$f(\gamma^{\mu}) \circ f(\gamma^{\alpha}) + f(\gamma^{\alpha}) \circ f(\gamma^{\mu}) = f(\gamma^{\mu} * \gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha} * \gamma^{\mu}) = 0, \text{ si } \mu \in \{1, 2, \ldots, p_1\}$$

$$\text{et } \alpha \in \{p_1+1, , \ldots, p_1+q_1\}$$

Ainsi, $\left(f(\gamma^{\mu}), f(\gamma^{\alpha})\right)_{\substack{1 \le \mu \le p_1 \\ p_1+1 \le \alpha \le p_1+q_1}}$ est générateur de $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n)$.

D'où, $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$

" $\Leftarrow$ " Supposons que $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$

Soient $\left(\gamma^{\mu}, \gamma^{\alpha}\right)_{\substack{1 \le \mu \le p_1 \\ p_1+1 \le \alpha \le p_1+q_1}}$ et $\left(\tau^{\mu}, \tau^{\alpha}\right)_{\substack{1 \le \mu \le p_1 \\ p_1+1 \le \alpha \le p_1+q_1}}$ générateurs respectifs de $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$

et $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n)$.

L'isomorphisme d'espace vectoriel f de $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}(\mathcal{E}_n)$ à $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}(\mathcal{E}'_n)$.

tel que

$$f(\gamma^\mu) = \tau^\mu \text{ , si } \mu \in \{1,2, \ldots, p_1\}$$

$$f(\gamma^\alpha) = \tau^\alpha \text{ , si } \alpha \in \{p_1+1, , \ldots, p_1+q_1\}$$

est un isomorphisme d'algèbre.

Ce qui démontre le théorème.

2.4.4. Algèbre de Clifford des matrices carrées

Une telle algèbre est l'ARC $\mathcal{C}l_{p,q}$ engendrée par n = p+q matrices carrées de même dimension et à éléments dans $\mathbb{C}$, soumises aux relations :

$$\begin{cases} (\gamma^\mu)^2 = 1 \text{ pour } \mu \in \{1,2,\ldots,p\} \\ (\gamma^\nu)^2 = -1 \text{ pour } \nu \in \{p+1, p+2, \ldots, p+q\} \\ \gamma^\mu \cdot \gamma^\nu + \gamma^\nu \cdot \gamma^\mu = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu \end{cases}$$

dont g est la forme bilinéaire symétrique canonique définie par

$$g([A],[B]) = \frac{1}{2}([A].[B] + [B].[A]),$$

pour toutes matrices carrées $[A],[B]$ de l'espace vectoriel engendré par les γ^μ ; $\mu = 1, 2, \ldots, p+q$, et le produit de Clifford est le produit matriciel habituel.

Dans tout ce qui suit, si nous ne mentionnons pas la forme bilinéaire symétrique définissant une ARC, alors il s'agira de la forme bilinéaire symétrique canonique. Ainsi, l' ARC que nous notons $\mathcal{C}l(\mathcal{E})$ est définie par la forme bilinéaire symétrique canonique.

D'après le théorème ci-dessus, dans toute la suite nous ne considérons plus que les ARC des matrices carrées.

2.5. Algèbre d'espace-temps

Dans tout ce qui suit nous notons le produit matriciel habituel par la simple succession de matrices. C'est-à-dire nous remplaçons " **.** " par le " vide ".

2.5.1. L'équation de Dirac pour le négaton libre

C'est l'équation

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + \mathrm{i}\frac{mc}{\hbar})\breve{\psi} = 0$$

où

$\breve{\psi}$ fonction d'onde à quatre composantes $\breve{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$

les γ^{μ} , $\mu = 0,1,2,3$ les matrices de Dirac, avec

$$\gamma^{0} = \begin{bmatrix} \sigma^{0} & 0 \\ 0 & -\sigma^{0} \end{bmatrix} , \quad \gamma^{j} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^{j} \\ -\sigma^{j} & 0 \end{bmatrix} , \ \mathrm{j} = 1,2,3.$$

2.5.2. Propriété

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\, g^{\mu\nu} \quad \mu,\ \nu \in \{0,1,2,3\} \tag{39.1}$$

où

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & si \quad \mu \neq \nu \\ -1 & si \quad \mu = \nu = j\ ,\ \mathrm{j} = 1,2,3. \\ 1 & si \quad \mu = \nu = 0 \end{cases}$$

2.5.3. Propriété

Les 16 matrices

$\lfloor \mathrm{I}_4 \rfloor = \sigma^0 \otimes \sigma^0$,

$\gamma^0 = \sigma^3 \otimes \sigma^0$, $\quad -\mathrm{i}\gamma^{\mathrm{j}} = \sigma^2 \otimes \sigma^{\mathrm{j}}$, j = 1, 2, 3

$\gamma^0\, \gamma^{\mathrm{j}} = \sigma^1 \otimes \sigma^{\mathrm{j}}$, j = 1, 2, 3

$i\gamma^2\gamma^3 = \sigma^0 \otimes \sigma^1$, $i\gamma^3\gamma^1 = \sigma^0 \otimes \sigma^2$, $i\gamma^1\gamma^2 = \sigma^0 \otimes \sigma^3$

$i\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = \sigma^3 \otimes \sigma^1$, $i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 = \sigma^3 \otimes \sigma^2$, $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \sigma^3 \otimes \sigma^3$,

$\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \sigma^2 \otimes \sigma^0$

$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \sigma^1 \otimes \sigma^0$

forment une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$.

Démonstration

D'après le théorème **1.4.12.** $\left(\sigma^\mu \otimes \sigma^\nu\right)_{\substack{0\leq\mu\leq 3\\ 0\leq\nu\leq 3}}$ est une base de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$.

Nous allons énoncer sans démonstration les théorèmes bien connus suivants.

2.5.4. Théorème fondamental de Pauli $[18],[19]$

Etant donnés deux systèmes de matrices 4×4 , $\left(\gamma^\mu\right)_{0\leq\mu\leq 3}$, $\left(\gamma'^\mu\right)_{0\leq\mu\leq 3}$ vérifiant la relation (39.1).

Alors, il existe une matrice $[S]$, définie à une constante près et non singuliere (dét$[S] \neq 0$), telle que l'on ait :

$$\gamma^\mu = [S]\,\gamma'^\mu\,[S]^{-1},\ \mu = 0,1,2,3$$

2.5.5. Corollaire $[18]$

Etant donnés deux systèmes de matrices unitaires 4×4, $\left(\gamma^\mu\right)_{0\leq\mu\leq 3}$, $\left(\gamma'^\mu\right)_{0\leq\mu\leq 3}$ vérifiant la relation (39.1), il existe une matrice unitaire $[U]$, définie à une phase près, telle que l'on ait :

$$\gamma^\mu = [U]\,\gamma'^\mu\,[U]^+,\ \mu = 0,1,2,3$$

2.5.6. Définition

Nous savons, d'après la propriété **2.4.2.**, que $(\gamma^\mu)_{0\le\mu\le3}$ engendre une ARC $\mathcal{C}l_{1,3}$, appelée algèbre de Dirac que l'on note tout simplement $\mathcal{C}l_{1,3}$. Cette algèbre est isomorphe à l'ARC sur l'espace de Minkowski $\mathcal{M}$ de signature +,-,-,- . C'est pour cela qu'on l'appelle, algèbre d'espace-temps. Un élément de l'algèbre d'espace-temps est appelé d-nombre.

Soit $(\overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ une base pseudo-orthonormale de $\mathcal{M}$.

Soit $A \in \mathcal{M}$, $A = A^\mu\, \overline{e}_\mu = A^0 \overline{e}_0 + A^1 \overline{e}_1 + A^2 \overline{e}_2 + A^3 \overline{e}_3$

$$A = A_0 \overline{e}_0 - A_1 \overline{e}_1 - A_2 \overline{e}_2 - A_3 \overline{e}_3$$

avec $A^i = - A_i$ pour $i \in \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$ et $A^0 = A_0$.

On identifie A à $\mathbb{A} = \gamma^0 A_0 + \gamma^1 A_1 + \gamma^2 A_2 + \gamma^3 A_3 = \gamma_0 A_0 - \gamma_1 A_1 - \gamma_1 A_2 - \gamma_3 A_3$

avec $\gamma^i = - \gamma_i$ pour $i \in \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$ et $\gamma^0 = \gamma_0$.

$$A \equiv \mathbb{A} = \gamma^\mu A_\mu$$

où les γ^μ sont les matrice de Dirac .

On pose $\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{bmatrix}$

Le produit de Clifford de deux vecteurs A et B est simplement le produit de deux matrices $\mathbb{A} \equiv A$ et $\mathbb{B} \equiv B$ associées à A et B.

$$AB = A \bullet B + A \wedge B$$

$$A \bullet B = B \bullet A = \frac{1}{2}(AB + BA) = A_\mu B^\mu \left[I_4\right] = A_\mu B^\mu$$

Tout élément A de l'algèbre d'espace-temps est la somme d'un scalaire A_s, d'un vecteur A_v, d'un bivecteur A_b, d'un trivecteur ou pseudo-vecteur A_t et d'un quadrivecteur ou pseudo-scalaire A_p.

$$A = A_s + A_v + A_b + A_t + A_p$$

$$A = \lambda_1[I_4] + \lambda_2\gamma^2 + \lambda_{1+2}\gamma^1 + \lambda_{1+5}\gamma^0\gamma^1 + \lambda_{1+8}\,\varepsilon^{jkl}\,\gamma^j\gamma^k + \lambda_{1+11}\,\varepsilon^{jkl}\,\gamma^0\,\gamma^j\gamma^k + \lambda_{15}\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$
$$+\ \lambda_{16}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

avec $\lambda_A \in \mathrm{IR}$, pour tout $A \in \{1,2,..,16\}$.

$$A_s = \lambda_1[I_4] = \lambda_1\sigma^0 \otimes \sigma^0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \in \Lambda^0 \mathcal{M}$$

$$A_v = \lambda_2\gamma^2 + \lambda_{1+2}\gamma^1 = \lambda_2\sigma^3 \otimes \sigma^0 + i\,\lambda_{1+2}\sigma^2 \otimes \sigma^1$$

$$A_v = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_{1+2}\sigma^1 \\ -\lambda_{1+2}\sigma^1 & -\lambda_0 \end{bmatrix}$$

qui est de la forme

$$A_v = \begin{bmatrix} A_0 & -A \\ A & -A_0 \end{bmatrix}$$

où, A est un vecteur d'espace et A_0 un scalaire.

Tout élément de $\mathcal{C}l_{1,3}$ de cette forme est un vecteur [21].

$$A_b = \lambda_{1+5}\gamma^0\gamma^1 + \lambda_{1+8}\,\varepsilon^{jkl}\,\gamma^j\gamma^k$$

où les ε^{jkl} sont les composantes d'un tenseur complètement antisymétrique du troisième ordre.

$$A_b = \lambda_{1+5}\sigma^1 \otimes \sigma^1 - i\,\lambda_{1+8}\sigma^0 \otimes \sigma^1$$

$$A_b = \begin{bmatrix} i\lambda_{1+8}\sigma^1 & \lambda_{1+5}\sigma^1 \\ \lambda_{1+5}\sigma^1 & i\lambda_{1+8}\sigma^1 \end{bmatrix}$$

qui est de la forme

$$A_b = \begin{bmatrix} iH & E \\ E & iH \end{bmatrix}$$

avec H et E sont des vecteurs d'espace .

Tout élément de $\mathcal{C}l_{1,3}$ de cette forme est un bivecteur [21].

$$A_t = \lambda_{1+11}\ \varepsilon^{jkl}\ \gamma^0\gamma^j\gamma^k + \lambda_{15}\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$A_t = - i\,\lambda_{1+11}\sigma^3 \otimes \sigma^1 + \lambda_{15}\sigma^2 \otimes \sigma^0$$

$$A_t = \begin{bmatrix} -i\lambda_{1+11}\sigma^1 & -i\lambda_{15}\sigma^0 \\ i\lambda_{15}\sigma^0 & -i\lambda_{1+11}\sigma^1 \end{bmatrix}$$

qui est de la forme

$$A_t = \begin{bmatrix} iB & -iB_0 \\ iB_0 & -iB \end{bmatrix}$$

Tout élément de $\mathcal{C}l_{1,3}$ de cette forme est un trivecteur[21].

$$A_P = \lambda_{16}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = - i\,\sigma^1 \otimes \sigma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma^0 \\ -i\sigma^0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5.7. Opérateur de dérivation en algèbre d'espace-temps [16], [21]

On pose $\partial = \gamma^{\mu}\partial_{\mu} = \begin{bmatrix} \partial_0 & \nabla \\ - \nabla & -\partial_0 \end{bmatrix}$, en considérant ∂ comme vecteur d'espace-temps

$$\partial = \sigma^3 \otimes \partial_0\sigma^0 + i\sigma^2 \otimes \nabla$$

Donc, pour un scalaire A_s, ∂A_s est un vecteur, c'est-à-dire le gradient d'un scalaire est un vecteur.

∂A_v est produit de deux vecteurs, donc c'est la somme d'un scalaire et d'un bivecteur.

∂A_b est produit d'un vecteur par un bivecteur, c'est donc la somme d'un vecteur et d'un trivecteur.

∂A_t est produit d'un vecteur par un trivecteur, c'est donc la somme d'un bivecteur et d'un pseudo-scalaire.

∂A_p est un trivecteur.

2.6. Théorèmes de factorisation

2.6.1. Notation

Soit $\mathcal{S} = \left(\gamma^{\mu}\right)_{1\leq\mu\leq n}$ un système de matrices carrées de même dimension qui engendrent une ARC $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$.

Notons

$$\varepsilon_{\mathcal{S}} = \prod_{\mu=1}^{n}\gamma^{\mu}$$

2.6.2. Notation

Soient $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$, $\mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/})$ deux ARC. Notons $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/})$ l'ensemble

$$\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)\otimes\mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/}) = \left\{[X] \,/\, \exists\,[A]\in \mathcal{C}l(\mathcal{E},g), \exists\,[B]\in \mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/}), [X]=[A]\otimes[B]\right\}$$

2.6.3. Proposition

Soient $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$, $\mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/})$ deux ARC. L'application $g\oplus g^{/}$ définie sur

$(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}^{/})\times(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}^{/})$ par

$$g\oplus g^{/}(\overline{x}+\overline{x_{/}}, \overline{y}+\overline{y_{/}}) = g(\overline{x},\overline{y}) + g^{/}(\overline{x_{/}},\overline{y_{/}}), \forall\ (\overline{x},\overline{y}),(\overline{x_{/}},\overline{y_{/}})\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}^{/}.$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}^{/}$.

2.6.4. Proposition

Soient $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$, $\mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/})$ deux ARC, d'éléments matrices carrées, respectivement

$\mathcal{C}l_{p_1,q_1}$, $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}$. Alors,

$\mathcal{C}l(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}^{/}, g\oplus g^{/})$ est une ARC $\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2}$.

2.6.5. Théorème

Soient $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$, $\mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/})$ deux ARC, d'éléments matrices carrées, avec g, $g^{/}$ sont les formes bilinéaires symétriques canoniques.

Supposons que $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$ est engendrée par $\mathcal{S}=\left(\gamma^{\mu}\right)_{1\leq\mu\leq 2p}$, $p\in\mathbb{N}$. Alors,

$$\mathcal{C}l(\mathcal{E},g) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/}) = \mathcal{C}l(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}^{/}, g\oplus\varepsilon^{2}g^{/})$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{S}}$

<u>Démonstration</u>

Soit $\left(\gamma^{\alpha}\right)_{2p+1\leq\alpha\leq n}$ engendre $\mathcal{C}l(\mathcal{E}^{/},g^{/})$, avec $n = \mathrm{Dim}(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}^{/})$.

Posons :

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} \otimes 1 \ , \ \mu = 1,\ldots,2p$$

$$\Gamma^{\alpha} = \varepsilon \otimes \gamma^{\alpha} \ , \ \alpha = 2p+1,\ldots, n$$

$$\Gamma^{\mu}\,\Gamma^{\nu} + \Gamma^{\nu}\,\Gamma^{\mu} = 0 \ , \ \forall\, \mu,\nu \in \{1,\ 2,\ldots,\ 2p\},\ \mu \neq \nu$$

$$\Gamma^{\alpha}\,\Gamma^{\beta} + \Gamma^{\beta}\,\Gamma^{\alpha} = 0 \ , \ \forall\, \alpha,\beta \in \{2p+1,\ 2,\ldots,\ n\},\ \alpha \neq \beta$$

ε anticommute avec les γ^{μ}, $\forall\, \mu \in \{1,\ 2,\ldots,\ 2p\}$, donc

$$\Gamma^{\mu}\,\Gamma^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}\,\Gamma^{\mu} = 0,\ \forall\, \mu \in \{1,\ 2,\ldots,\ 2p\},\ \forall\, \alpha \in \{2p+1,\ 2,\ldots,\ n\}$$

En plus,

$$(\Gamma^{\mu})^2 = (\gamma^{\mu})^2$$

$$(\Gamma^{\alpha})^2 = \varepsilon^2\,(\gamma^{\alpha})^2$$

Tout élément de $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{E}', g')$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de produits matriciels des $\gamma^{\mu} \otimes \gamma^{\alpha}$.

En plus,

$$\gamma^{\mu} \otimes \gamma^{\alpha} = \pm(\gamma^{\mu} \otimes 1)(\varepsilon \otimes \gamma^{\alpha}) \prod_{\nu=1}^{2p} (\gamma^{\nu} \otimes 1) = \pm\, \Gamma^{\mu}\,\Gamma^{\alpha} \prod_{\nu=1}^{2p} \Gamma^{\nu},$$

$\forall\, \mu \in \{1,\ 2,\ldots,\ 2p\}, \forall\, \alpha \in \{2p+1,\ 2,\ldots,\ n\}$

Tout élément de $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{E}', g')$ peut donc s'exprimer comme combinaison linéaire de produits matriciels des Γ^{μ}, Γ^{α}, $\mu = 1,\ldots,2p$, $\alpha = 2p+1,\ldots, n$.

Si $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$ est ARC $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}$ et $\mathcal{C}l(\mathcal{E}', g')$ est $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}$, alors

$\mathcal{C}l(\mathcal{E},g) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{E}', g')$ est une ARC,

$\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2}$ si $\varepsilon^2 = +1$ et

$\mathcal{C}l_{p_1+q_2,q_1+p_2}$ si $\varepsilon^2 = -1$,

engendrée par $\left(\Gamma^{\mu},\Gamma^{\alpha}\right)_{\substack{\mu=1,\ldots,2p \\ \alpha=2p+1,\ldots,n}}$

$\mathcal{C}l(\mathcal{E}', \varepsilon^2 g')$ est une ARC $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}$ si $\varepsilon^2 = +1$ et

$$\mathcal{C}l_{q_2,p_2} \text{ si } \varepsilon^2 = -1$$

D'où, d'après la proposition **2.6.3.** et le théorème **2.4.3.**

$$\mathcal{C}l(\mathcal{E},g) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{E}',g') \equiv \mathcal{C}l(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}', g\oplus\varepsilon^2 g')$$

2.6.6. Corollaire

Soit $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$ ARC, d'éléments matrices carrées, avec g forme bilinéaire symétrique canonique sur $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{F}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension paire. Soit $\mathcal{F}^{\perp}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}$.

Supposons que $\mathcal{C}l\ (\mathcal{F},g_{\mathcal{F}})$, avec $g_{\mathcal{F}}$ la restriction de g sur $\mathcal{F}$, soit engendrée par $\mathcal{G}=\left(\gamma^{\mu}\right)_{1\leq\mu\leq 2p}$. Alors,

$$\mathcal{C}l(\mathcal{E},g_{\mathcal{F}}\oplus(\varepsilon_{\mathcal{G}})^2 g_{\mathcal{F}^{\perp}}) \equiv \mathcal{C}l\ (\mathcal{F},g_{\mathcal{F}})\otimes \mathcal{C}l(\mathcal{F}^{\perp},g_{\mathcal{F}^{\perp}})$$

2.6.7. Théorème de réduction dimensionnelle [17]

Soit $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$ ARC, d'éléments matrices carrées, avec g forme bilinéaire symétrique canonique sur $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{F}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension paire.

Supposons que $\mathcal{C}l\ (\mathcal{F},g_{\mathcal{F}})$, avec $g_{\mathcal{F}}$ la restriction de g sur $\mathcal{F}$, soit engendrée par $\mathcal{G}=\left(\gamma^{\mu}\right)_{1\leq\mu\leq 2p}$. Alors,

$$\mathcal{C}l(\mathcal{E}) \equiv \mathcal{C}l\ (\mathcal{F})\otimes\mathcal{C}l(\varepsilon_{\mathcal{G}}\mathcal{F}^{\perp})$$

<u>Démonstration</u>

Posons

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{G}}$$

Si $\mathcal{C}l(\mathcal{F}^{\perp})$ est une ARC $\mathcal{C}l_{p_2,q_2}$, alors $\mathcal{C}l(\varepsilon\,\mathcal{F}^{\perp})$ est une ARC $\mathcal{C}l_{q_2,p_2}$ si $\varepsilon^2 = -1$ et

$\mathcal{C}l_{p_2,q_2}$ si $\varepsilon^2 = +1$.

$\left(\gamma^{\alpha}\right)_{1\leq\alpha\leq p_2+q_2}$ engendre $\mathcal{C}l(\mathcal{F}^{\perp})$, alors les γ^{α} commutent avec ε, selon le produit matriciel habituel.

D'après la proposition **2.6.4.** et le théorème **2.4.3.**

$$\mathcal{C}l\,(\mathcal{F})\otimes\mathcal{C}l(\varepsilon\,\mathcal{F}^{\perp}) \equiv \mathcal{C}l(\mathcal{F}\oplus\varepsilon\,\mathcal{F}^{\perp}, g_{\mathcal{F}}\oplus\varepsilon^2 g_{\varepsilon\mathcal{F}\perp})$$

avec $g_{\mathcal{F}}$ et $g_{\varepsilon\mathcal{F}\perp}$ les formes bilinéaires symétriques canoniques sur $\mathcal{F}$ et $\varepsilon\,\mathcal{F}^{\perp}$.

On peut montrer facilement que

$$\mathcal{C}l(\mathcal{F}\oplus\varepsilon\,\mathcal{F}^{\perp}, g_{\mathcal{F}}\oplus\varepsilon^2 g_{\varepsilon\mathcal{F}\perp}) \equiv \mathcal{C}l(\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}^{\perp})$$

Ce qui démontre le théorème.

2.6.8. Remarque

L'ARC $\mathcal{C}l(\mathcal{E})$, qui est $\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2}$, se décompose par produit tensoriel de matrices, en deux ARC de dimensions plus petites.

Si $\varepsilon^2 = +1$, $\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2} \equiv \mathcal{C}l_{p_1,q_1}\otimes\mathcal{C}l_{p_2,q_2}$

Si $\varepsilon^2 = -1$, $\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2} \equiv \mathcal{C}l_{p_1,q_1}\otimes\mathcal{C}l_{q_2,p_2}$

2.6.9. Théorème [22]

Soient $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{N}$, p_1+q_1 est un nombre pair.

Alors,

$$\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2} \equiv \mathcal{C}l_{p_1,q_1}\otimes\mathcal{C}l_{p_2,q_2} \quad \text{si } \frac{p_1-q_1}{2} \text{ est pair}$$

$$\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2} \equiv \mathcal{C}l_{p_1,q_1}\otimes\mathcal{C}l_{q_2,p_2} \quad \text{si } \frac{p_1-q_1}{2} \text{ est impair.}$$

<u>Démonstration</u>

Soit $\mathcal{C}l(\mathcal{E},g)$ ARC $\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2}$.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension paire.

Supposons que $\mathcal{C}l\ (\mathcal{F})$ soit une ARC $\mathcal{C}l_{p_1,q_1}$ engendrée par $\mathcal{G} = \left(\gamma^{\mu}\right)_{1\leq\mu\leq 2p}$.

Soit

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{G}}$$

$$(\gamma^{\mu})^2 = +1,\ \forall\ \mu \in \left\{1,\ 2,\ldots,\ p_1\right\},$$

$$(\gamma^{\mu})^2 = +1,\ \forall\ \mu \in \left\{p_1+1,\ p_1+2,\ldots,\ p_1+q_1\right\}$$

$$\varepsilon = \gamma^1\,\gamma^2 \ldots \gamma^{p_1}\,\gamma^{p_1+1} \ldots \gamma^{p_1+q_1}$$

$$\varepsilon^2 = (-1)^{(p_1+q_1-1)+(p_1+q_1-2)+\ldots+2+1}(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2\ldots(\gamma^{p_1})^2(\gamma^{p_1+1})^2\ldots(\gamma^{p_1+q_1})^2$$

$$\varepsilon^2 = (-1)^{\frac{(p_1+q_1-1)(p_1+q_1)}{2}+q_1} = (-1)^{\frac{(p_1+q_1)^2}{2}-\frac{p_1-q_1}{2}}$$

Ce qui démontre le théorème, d'après la remarque **2.6.8.**.

2.6.10. Exemple

Considérons l'algèbre d'espace-temps $\mathcal{C}l_{1,3}$ engendrée par $(\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$

1) (γ^0,γ^1) engendre une ARC $\mathcal{C}l_{1,1}$.

$$\varepsilon = \gamma^0\gamma^1 \quad , \quad \varepsilon^2 = +1$$

(γ^2,γ^3) engendre une ARC $\mathcal{C}l_{0,2}$.

Alors,

$$\mathcal{C}l_{1,3} \equiv \mathcal{C}l_{1,1} \otimes \mathcal{C}l_{0,2}$$

est engendrée par $(\gamma^0 \otimes 1,\ \gamma^1 \otimes 1,\ \varepsilon \otimes \gamma^2,\ \varepsilon \otimes \gamma^3)$.

2) (γ^2,γ^3) engendre une ARC $\mathcal{C}l_{0,2}$.

$$\varepsilon = \gamma^2\gamma^3 \quad , \quad \varepsilon^2 = -1$$

(γ^0,γ^1) engendre une ARC $\mathcal{C}l_{1,1}$.

Alors,

$$\mathcal{Cl}_{1,3} \equiv \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{1,1}$$

est engendrée par $(\gamma^2 \otimes 1, \gamma^3 \otimes 1, \varepsilon \otimes \varepsilon\, \gamma^0, \ \varepsilon \otimes \varepsilon\, \gamma^1)$

Des théorèmes analogues s'obtiennent en changeant la place de ε, de gauche à droite ou de droite à gauche du produit tensoriel. Nous n'allons que les citer.

2.6.11. Théorème

Soient $\mathcal{Cl}(\mathcal{E},g)$, $\mathcal{Cl}(\mathcal{E}', g')$ deux ARC, d'éléments matrices carrées, avec g, g' sont les formes bilinéaires symétriques canoniques.

Supposons que $\mathcal{Cl}(\mathcal{E}', g')$ est engendrée par $\mathscr{G} = \left(\gamma^{\mu}\right)_{1 \leq \mu \leq 2p}$, $p \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\mathcal{Cl}(\mathcal{E},g) \otimes \mathcal{Cl}(\mathcal{E}', g') = \mathcal{Cl}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}', \varepsilon^2 g \oplus g')$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_{\mathscr{G}}$

2.6.12. Théorème de réduction dimensionnelle

Soit $\mathcal{Cl}(\mathcal{E},g)$ ARC, d'éléments matrices carrées, avec g forme bilinéaire symétrique canonique sur $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{F}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension paire.

Supposons que $\mathcal{Cl}(\mathcal{F}, g_{\mathcal{F}})$, avec $g_{\mathcal{F}}$ la restriction de g sur $\mathcal{F}$, soit engendrée par $\mathscr{G} = \left(\gamma^{\mu}\right)_{1 \leq \mu \leq 2p}$. Alors,

$$\mathcal{Cl}(\mathcal{E}) \equiv \mathcal{Cl}(\varepsilon_{\mathscr{G}} \mathcal{F}^{\perp}) \otimes \mathcal{Cl}(\mathcal{F})$$

2.6.13. Théorème

Soient $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{N}$, $p_2 + q_2$ est un nombre pair.

Alors,

$$\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2} \equiv \mathcal{C}l_{p_1,q_1} \otimes \mathcal{C}l_{p_2,q_2} \quad \text{si } \frac{p_2-q_2}{2} \text{ est pair}$$

$$\mathcal{C}l_{p_1+p_2,q_1+q_2} \equiv \mathcal{C}l_{q_1,p_1} \otimes \mathcal{C}l_{p_2,q_2} \quad \text{si } \frac{p_2-q_2}{2} \text{ est impair}$$

Le fait que $\mathcal{C}l_{1,3}$ est engendrée par

$$(\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3) = (\sigma^3 \otimes \sigma^0, i\sigma^2 \otimes \sigma^1, i\sigma^2 \otimes \sigma^2, i\sigma^2 \otimes \sigma^3)$$

échappe au théorème de réduction dimensionnelle: premièrement, parce que les sous-espaces de la décomposition, engendrés par (σ^3, σ^1) et $(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ ne sont pas orthogonaux ; deuxièmement, parce qu'on part d'une ARC $\mathcal{C}l_{3,0}$ de dimension plus petite pour obtenir une ARC $\mathcal{C}l_{1,3}$ de dimension plus grande. Il s'agit donc plutôt d' "agrandissement" que de "réduction". Cela nous conduit à construire le théorème suivant.

2.6.14. Théorème d'agrandissement dimensionnel

Soit $\mathcal{C}l(\mathcal{E})$ une ARC $\mathcal{C}l_{p,q}$ engendrée par $\{\sigma^1,\sigma^2,\ldots,\sigma^p,\tau^1,\tau^2,\ldots,\tau^q\}$.

Soit $\mathcal{F}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension paire, engendré par le système pseudo-orthonormal $\mathcal{S} = (\sigma^\mu, \tau^\alpha)_{\substack{1\leq\mu\leq r \\ 1\leq\alpha\leq s}}$. $\mathcal{C}l(\mathcal{F})$ est une ARC $\mathcal{C}l_{r,s}$.

Alors,

$$\mathcal{C}l(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{C}l(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{C}l(\mathcal{E}) \text{ est } \begin{cases} \mathcal{C}l_{p+r,q+s} & \text{si } \frac{r-s}{2} \text{ est pair} \\ \\ \mathcal{C}l_{p+s,q+r} & \text{si } \frac{r-s}{2} \text{ est impair} \end{cases}$$

2.6.15. Exemple

Considérons l'algèbre d'espace $\mathcal{C}l_{3,0}$ engendrée par $(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$.

(σ^3,σ^1) engendre une autre ARC $\mathcal{C}l_{2,0}$.

$$\varepsilon = \sigma^3 \sigma^1 = i\sigma^2 , \qquad \varepsilon^2 = -1$$

alors, en appliquant le théorème d'agrandissement dimensionnel, on a :

$Cl_{2,0} \otimes Cl_{3,0}$ est une ARC $Cl_{2,3}$ engendrée par

$$(\sigma^3 \otimes \sigma^0 , \sigma^1 \otimes \sigma^0 , i\sigma^2 \otimes \sigma^1 , i\sigma^2 \otimes \sigma^2 , i\sigma^2 \otimes \sigma^3) = (\gamma^0 , i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 , \gamma^1 , \gamma^2 , \gamma^3)$$

Si nous prenons la première matrice de ce système et les trois dernières, nous avons le système $(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ qui sont les coefficients de l'équation de Dirac dans la représentation standard ou de Pauli-Dirac et qui engendre une ARC $Cl_{1,3}$.

$Cl_{3,0} \otimes Cl_{2,0}$ est une ARC $Cl_{2,3}$ engendrée par

$$(\sigma^0 \otimes \sigma^3 , \sigma^0 \otimes \sigma^1 , \sigma^1 \otimes i\sigma^2 , \sigma^2 \otimes i\sigma^2 , \sigma^3 \otimes i\sigma^2).$$

Le système ($\sigma^0 \otimes \sigma^3 , \sigma^1 \otimes i\sigma^2 , \sigma^2 \otimes i\sigma^2 , \sigma^3 \otimes i\sigma^2$) choisi de la même façon que précédemment engendre une ARC $Cl_{1,3}$.

Prenons (σ^1 , σ^3) au lieu de (σ^3 , σ^1). Les deux engendrent la même ARC $Cl_{2,0}$, nous avons les systèmes

$$(\sigma^1 \otimes \sigma^0 , \sigma^3 \otimes \sigma^0 , - i\sigma^2 \otimes \sigma^1 , - i\sigma^2 \otimes \sigma^2 , - i\sigma^2 \otimes \sigma^3)$$

$$(\sigma^0 \otimes \sigma^1 , \sigma^0 \otimes \sigma^3 , -\sigma^1 \otimes i\sigma^2 , -\sigma^2 \otimes i\sigma^2 , -\sigma^3 \otimes i\sigma^2)$$

qui engendrent respectivement $Cl_{2,0} \otimes Cl_{3,0}$ et $Cl_{3,0} \otimes Cl_{2,0}$.
En prenant la première et les trois dernières nous avons les systèmes

$$(\sigma^1 \otimes \sigma^0 , - i\sigma^2 \otimes \sigma^1 , - i\sigma^2 \otimes \sigma^2 , - i\sigma^2 \otimes \sigma^3)$$

$$(\sigma^0 \otimes \sigma^1 , -\sigma^1 \otimes i\sigma^2 , -\sigma^2 \otimes i\sigma^2 , -\sigma^3 \otimes i\sigma^2)$$

qui engendrent une ARC $Cl_{1,3}$.

En procédant de cette manière, nous avons au total douze systèmes qui engendrent un ARC $Cl_{1,3}$. Nous choisissons la façon de les construire de manière à avoir les coefficients des douze équations des fermions fondamentaux dans $[11]$(Cf. les tableaux).

2.6.16. Remarque

2.6.16. Remarque

Les ARC $\mathcal{C}l_{2,3}$ de l'exemple sont toutes égales à $\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{C})$. En effet : ces ARC sont contenues dans le IR-espace vectoriel $\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{C})$ et sont des IR-espaces vectoriels de même dimension $2^5 = 32$ que $\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{C})$.

EQUATIONS DE DIRAC

Chapitre 3. LES EQUATIONS DE DIRAC POUR LES FERMIONS FONDAMENTAUX

La théorie du modèle standard suppose que les fermions fondamentaux satisfont à des équations de Dirac de même forme. La seule différence entre ces équations sont les masses des fermions aux repos. Selon l'auteur de $[11]$ cette supposition pose des problèmes. Le but de l'article $[11]$est de donner douze équations de formes différentes pour ces douze fermions. Dans ce chapitre nous étudions ces douze équations.

3.1. Forme des équations

3.1.1. Ecriture utilisant le produit tensoriel

Ecrivons les équations de Dirac pour les fermions fondamentaux $[11]$, en utilisant le produit tensoriel de matrices .

Pour les leptons

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^1 \otimes \sigma^j\partial_j\right) - m_e c^2\sigma^3 \otimes \sigma^0\right]\Psi = 0 \quad \text{pour le négaton} \qquad (55.1)$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^1 \otimes \sigma^j\partial_j\right) - m_{\nu_e} c^2\sigma^2 \otimes \sigma^0\right]\Psi = 0 \quad \text{pour le neutrino électronique}$$

(55.2)

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^2 \otimes \sigma^j\partial_j\right) - mc^2\sigma^1 \otimes \sigma^0\right]\Psi = 0 \qquad ? \qquad (55.3)$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^2 \otimes \sigma^j\partial_j\right) - mc^2\sigma^2 \otimes \sigma^0\right]\Psi = 0 \qquad ? \qquad (55.4)$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^3 \otimes \sigma^j\partial_j\right) - mc^2\sigma^1 \otimes \sigma^0\right]\Psi = 0 \qquad ? \qquad (55.5)$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^3 \otimes \sigma^j\partial_j\right) - mc^2\sigma^2 \otimes \sigma^0\right]\Psi = 0 \qquad ? \qquad (55.6)$$

Pour les quarks

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^j\partial_j \otimes \sigma^1\right) - mc^2\sigma^0 \otimes \sigma^3\right]\Psi = 0 \quad ? \tag{56.7}$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^j\partial_j \otimes \sigma^1\right) - mc^2\sigma^0 \otimes \sigma^2\right]\Psi = 0 \quad ? \tag{56.8}$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^j\partial_j \otimes \sigma^2\right) - mc^2\sigma^0 \otimes \sigma^1\right]\Psi = 0 \quad ? \tag{56.1}$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^j\partial_j \otimes \sigma^2\right) - mc^2\sigma^0 \otimes \sigma^3\right]\Psi = 0 \quad ? \tag{56.2}$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^j\partial_j \otimes \sigma^3\right) - mc^2\sigma^0 \otimes \sigma^1\right]\Psi = 0 \quad ? \tag{56.3}$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma^j\partial_j \otimes \sigma^3\right) - mc^2\sigma^0 \otimes \sigma^2\right]\Psi = 0 \quad ? \tag{56.4}$$

3.1.2. Forme générale des équations

Ces équations peuvent se mettre sous la forme (Cf. les tableaux)

$$\left(\Gamma^\mu\partial_\mu + \frac{imc}{\hbar} \right)\Psi = 0$$

avec

$$\Gamma^\mu\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\Gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}[I_4]$$

pour tous $\mu,\nu \in \{0,1,2,3\}$

3.2. Solution de l'équation de Dirac pour un fermion libre

3.2.1. Résolution

Cherchons d'abord la solution à énergie positive $E = \sqrt{c^2p^2 + m_e^2c^4}$, sous la forme

$$\breve{\Psi}_+ = U_+(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x} - Et)}$$

Considérons d'abord les leptons. Pour un négaton l'équation peut s'écrire

$$\sigma^0 \otimes \sigma^0 \; i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\breve{\Psi} - c\sigma^j \otimes \sigma^j(-i\hbar\partial_j)\breve{\Psi} - m_e c^2\sigma^3 \otimes \sigma^0\breve{\Psi} = 0$$

Soit $\hat{p}_j$ l'opérateur impulsion

$$\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j \quad , j = 1,2,3.$$

Soit $\hat{E}$ l'opérateur énergie

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\left[\hat{p}_j \;,\; \hat{E}\right]_- = 0 \quad , j = 1,2,3.$$

$\breve{\Psi}_+$ est un vecteur propre commun de $\hat{p}_j$, j = 1,2,3 et $\hat{E}$.

$$\hat{p}_j\breve{\Psi}_+ = -i\hbar\partial_j\breve{\Psi}_+ = p_j\breve{\Psi}_+$$

Notons $\vec{p} = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix}$ et $\vec{n} = \dfrac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \dfrac{\vec{p}}{p}$

En remplaçant $\breve{\Psi}_+$ dans l'équation (55.1), on a :

$$E\sigma^0 \otimes \sigma^0 U_+(\vec{p}) - \frac{2}{\hbar}cp\sigma^1 \otimes \left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\,.\,\vec{n}\right)U_+(\vec{p}) - m_e c^2\sigma^3 \otimes \sigma^0 U_+(\vec{p}) = 0 \quad (57.1)$$

avec $\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\,.\,\vec{n}\right)$ est l'opérateur spin dans la direction du vecteur impulsion $\vec{p}$.

Cherchons donc une solution de (57.1) sous la forme

$$U_+(\vec{p}) = \varphi \otimes u$$

où u est le vecteur propre de $\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\ .\ \vec{n}\right)$. φ et u sont à deux composantes.

En remplaçant $U_+(\vec{p})$ par $\varphi \otimes u$, l'équation (57.1) devient

$$E\sigma^0 \otimes \sigma^0(\varphi \otimes u) - \frac{2}{\hbar}cp\sigma^1 \otimes \left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\ .\ \vec{n}\right)(\varphi \otimes u) - m_e c^2\sigma^3 \otimes \sigma^0(\varphi \otimes u) = 0$$

ou $E\varphi \otimes u - cp\sigma^1 \varphi \otimes \varepsilon u - m_e c^2 \sigma^3 \varphi \otimes u = 0$ avec $\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{spin en haut} \\ -1 & \text{spin en bas} \end{cases}$

ou encore $(E - \varepsilon cp\sigma^1 - m_e c^2 \sigma^3)\varphi \otimes u = 0$

Comme $u \neq 0$, d'après la propriété **1.4.10.**

$$(\varepsilon cp\sigma^1 + m_e c^2 \sigma^3)\varphi = E\varphi \qquad (58.1)$$

Soit $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$. On a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (m_e c^2 - E)\varphi_1 + \varepsilon cp\varphi_2 = 0 \\ \varepsilon cp\varphi_1 - (m_e c^2 + E)\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta = m_e^2 c^4 - E^2 + c^2p^2$$

qui est égal à 0, d'après la relation bien connue

$$E^2 = c^2p^2 + m_e^2 c^4.$$

Les deux équations sont compatibles.

Comme

$$E + m_e c^2 \neq 0,$$

prenons

$$\varphi_2 = \frac{\varepsilon cp}{E + m_e c^2}\varphi_1$$

Alors, on peut prendre

$$U_+(\vec{p}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\varepsilon cp}{E + m_e c^2} \end{bmatrix} \otimes u$$

On a,

$$\breve{\Psi}_{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix} \otimes u\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x} - Et)}$$

Soit

$$u(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x} - Et)} = N\, U_{+}(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x} - Et)}$$

vecteur propre normé de $\hat{E}$, avec N facteur de normalisation.

$$u(\vec{p})^{+} u(\vec{p}) = 1$$

$$N^2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix}^{+} \otimes u^{+} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix} \otimes u \right) = 1$$

$$N^2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix} \right) \otimes \left(u^{+} u\right) = 1$$

$$N^2\, u^{+} u \frac{2E}{E + m_e c^2} = 1$$

Soit

$$N = \sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2E u^{+} u}}$$

$$u(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2Eu^+u}} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix} \otimes u$$

d'où, la solution à valeur propre de l'énergie :

$$\breve{\Psi}_+ = \sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2E}} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix} \otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x} - Et)} = \sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2E}} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \otimes s\, e^{\frac{i p.\vec{x}}{\hbar}}$$

la solution à énergie positive et en utilisant la même méthode,

$$\breve{\Psi}_- = \sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2E}} \begin{bmatrix} \frac{-\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \\ \\ 1 \end{bmatrix} \otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x} + Et)} = \sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2E}} \begin{bmatrix} \frac{-\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \\ \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}Et} \otimes s\, e^{\frac{i p.\vec{x}}{\hbar}}$$ la

solution à énergie négative.

3.2.2. Remarques

1) Pour le négaton $\hat{h} = \varepsilon c p \sigma^1 + m_e c^2 \sigma^3$ est un opérateur dont l'énergie positive

$+E = \sqrt{c^2p^2 + m_e^2c^4}$ est la valeur propre associée au vecteur propre

$\sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2E}} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \end{bmatrix}$ et l'énergie négative $-E = -\sqrt{c^2p^2 + m_e^2c^4}$ est la valeur

propre associée au vecteur propre $\sqrt{\frac{E + m_e c^2}{2E}} \begin{bmatrix} \frac{-\varepsilon c p}{E + m_e c^2} \\ \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nous appelons opérateur signe de l'énergie l'opérateur $\hat{h}$.

2) L'équation (58.1) montre que le produit tensoriel de matrices sépare le vecteur propre de l'énergie en deux vecteurs propres, à deux composantes dont l'un de l'opérateur signe énergie $\hat{h}$ et l'autre de l'opérateur spin $\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\,.\,\vec{n}\right)$. Pour les leptons le vecteur propre de l'énergie se trouve au premier terme du produit tensoriel et celui du spin se trouve au deuxième terme, vice versa pour les quarks.

3) Pour le négaton l'opérateur hamiltonien de Dirac peut s'écrire

$$\hat{H} = m_e c^2 \sigma^3 \otimes \sigma^0 - i\hbar c \sigma^1 \otimes \sigma^j \partial_j$$

Soit $u(\vec{p})$ un vecteur propre de l'opérateur énergie $\hat{H}$

$$\hat{H}(u(\vec{p})) = m_e c^2 \sigma^3 \otimes \sigma^0\, u(\vec{p}) \;-\; i\hbar c \sigma^1 \otimes \sigma^j \partial_j\, u(\vec{p})$$

$$\hat{H}(u(\vec{p})) = \varepsilon\, m_e c^2 \sigma^3 \otimes \sigma^0\; \varepsilon\, u(\vec{p}) \;+\; cp\sigma^1 \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n})\, u(\vec{p})$$

Alors,

$$\hat{H}(u(\vec{p})) = \left[\; \varepsilon\, m_e c^2 \sigma^3 \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n}) + cp\sigma^1 \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n}) \;\right] u(\vec{p})$$

$$\hat{H}(u(\vec{p})) = \left[\; \varepsilon\, m_e c^2 \sigma^3 \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n}) + cp\sigma^1 \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n}) \;\right] u(\vec{p})$$

$$\hat{H}(u(\vec{p})) = \varepsilon\,(m_e c^2 \sigma^3 + \varepsilon\, cp\sigma^1) \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n})\, u(\vec{p}) = \varepsilon\, \hat{h} \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n})\, u(\vec{p})$$

Cette décomposition montre que le signe de l'énergie est indépendant de celui du spin.

. Pour les quarks on cherche la solution sous la forme $u \otimes \varphi$, avec u vecteur propre de l'opérateur spin, en utilisant la même méthode.

Nous avons les tableaux récapitulatifs suivants :

3.3. Tableaux récapitulatifs

Equation	Lepton	$U_+(\vec{p})$	$U_-(\vec{p})$	$\hat{h}\otimes(\vec{\sigma}.\vec{n})$
$\sigma^3\otimes\sigma^0\partial_0\breve{\Psi}+i\sigma^2\otimes\sigma^j\partial_j\breve{\Psi}+\frac{im_e c}{\hbar}\breve{\Psi}=0$	e^-	$\sqrt{\frac{E+m_ec^2}{2E}}\begin{bmatrix}1\\ \frac{\varepsilon cp}{E+mc^2}\end{bmatrix}\otimes s$	$\sqrt{\frac{E+m_ec^2}{2E}}\begin{bmatrix}\frac{-\varepsilon cp}{E+m_ec^2}\\ 1\end{bmatrix}\otimes s$	$(m_ec^2\sigma^3+\varepsilon\, cp\,\sigma^1)\otimes(\vec{\sigma}.\vec{n})$
$\sigma^2\otimes\sigma^0\partial_0\breve{\Psi}-i\sigma^3\otimes\sigma^j\partial_j\breve{\Psi}+\frac{im_{\nu_e} c}{\hbar}\breve{\Psi}=0$	ν_e	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \frac{iE}{m_{\nu_e}c^2+i\varepsilon cp}\end{bmatrix}\otimes s$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{iE}{m_{\nu_e}c2-i\varepsilon cp}\\ 1\end{bmatrix}\otimes s$	$(m_{\nu_e}c^2\sigma^2+\varepsilon\, cp\,\sigma^1)\otimes(\vec{\sigma}.\vec{n})$
$\sigma^1\otimes\sigma^0\partial_0\breve{\Psi}+i\sigma^3\otimes\sigma^j\partial_j\breve{\Psi}+\frac{im_{l_3} c}{\hbar}\breve{\Psi}=0$	l_3 ?	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \frac{E}{m_{l_3}c^2-i\varepsilon cp}\end{bmatrix}\otimes s$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{E}{m_{l_3}c2+i\varepsilon cp}\\ 1\end{bmatrix}\otimes s$	$(m_{l_3}c^2\sigma^1\ \ \varepsilon\, cp\,\sigma^2)\otimes(\vec{\sigma}.\vec{n})$

Equation	Lepton	$U_+(\vec{p})$	$U_-(\vec{p})$	$\hat{h} \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n})$
$\sigma^3 \otimes \sigma^0 \partial_0 \breve{\Psi} - i\sigma^1 \otimes \sigma^j \partial_j \breve{\Psi} + \frac{i m_{l_4} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	l_4 ?	$\sqrt{\frac{E + m_{l_4} c^2}{2E}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i\varepsilon cp}{E + m_{l_4} c^2} \end{bmatrix} \otimes s$	$\sqrt{\frac{E + m_{l_4} c^2}{2E}} \begin{bmatrix} \frac{i\varepsilon cp}{E + m_{l_4} c^2} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes s$	$(m_{l_4} c^2 \sigma^3 + \varepsilon\, cp\, \sigma^2) \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n})$
$\sigma^1 \otimes \sigma^0 \partial_0 \breve{\Psi} - i\sigma^2 \otimes \sigma^j \partial_j \breve{\Psi} + \frac{i m_{l_5} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	l_5 ?	$\frac{m_{l_5} c^2}{\sqrt{2E(E - \varepsilon cp)}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E - \varepsilon cp}{m_{l_5} c^2} \end{bmatrix} \otimes s$	$\frac{m_{l_5} c^2}{\sqrt{2E(E + \varepsilon cp)}} \begin{bmatrix} \frac{E + \varepsilon cp}{m_{l_5} c^2} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes s$	$(m_{l_5} c^2 \sigma^1 + \varepsilon\, cp\, \sigma^3) \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n})$
$\sigma^2 \otimes \sigma^0 \partial_0 \breve{\Psi} + i\sigma^1 \otimes \sigma^j \partial_j \breve{\Psi} + \frac{i m_{l_6} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	l_6 ?	$\frac{m_{l_6} c^2}{\sqrt{2cp(\varepsilon E - cp)}} \begin{bmatrix} 1 \\ i\frac{E - \varepsilon cp}{m_{l_6} c^2} \end{bmatrix} \otimes s$	$\frac{m_{l_6} c^2}{\sqrt{2cp(\varepsilon E - cp)}} \begin{bmatrix} i\frac{E - \varepsilon cp}{m_{l_6} c^2} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes s$	$(m_{l_6} c^2 \sigma^2 + \varepsilon\, cp\, \sigma^3) \otimes (\vec{\sigma}.\vec{n})$

Equation	Quark	$U_+(\vec{p})$	$U_-(\vec{p})$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes \hat{h}$
$\sigma^0 \otimes \sigma^3 \partial_0 \breve{\Psi} + i\sigma^j \otimes \sigma^2 \partial_j \breve{\Psi} + \frac{im_{q_1} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	q_1 ?	$\sqrt{\frac{E + m_{q_1} c^2}{2E}}\, s \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\varepsilon cp}{E + m_{q_1} c^2} \end{bmatrix}$	$\sqrt{\frac{E + m_{q_1} c^2}{2E}}\, s \otimes \begin{bmatrix} \frac{-\varepsilon cp}{E+mc^2} \\ 1 \end{bmatrix}$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes (m_{q_1} c^2 \sigma^3 + \varepsilon\, cp\, \sigma^1)$
$\sigma^0 \otimes \sigma^2 \partial_0 \breve{\Psi} - i\sigma^j \otimes \sigma^3 \partial_j \breve{\Psi} + \frac{im_{q_2} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	q_2 ?	$\frac{1}{\sqrt{2}}\, s \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{iE}{m_{q_2} c^2 + i\varepsilon cp} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\, s \otimes \begin{bmatrix} \frac{iE}{m_{q_2} c2 - i\varepsilon cp} \\ 1 \end{bmatrix}$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes (m_{q_1} c^2 \sigma^2 + \varepsilon\, cp\, \sigma^1)$
$\sigma^0 \otimes \sigma^1 \partial_0 \breve{\Psi} + i\sigma^j \otimes \sigma^3 \partial_j \breve{\Psi} + \frac{im_{q_3} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	q_3 ?	$\frac{1}{\sqrt{2}}\, s \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E}{m_{q_3} c^2 - i\varepsilon cp} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\, s \otimes \begin{bmatrix} \frac{E}{m_{q_3} c2 + i\varepsilon cp} \\ 1 \end{bmatrix}$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes (m_{q_3} c^2 \sigma^1 + \varepsilon\, cp\, \sigma^2)$

Equation	Quark	$U_+(\vec{p})$	$U_-(\vec{p})$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes \hat{h}$
$\sigma^0 \otimes \sigma^3 \partial_0 \breve{\Psi} - i\sigma^j \otimes \sigma^1 \partial_j \breve{\Psi} + \frac{im_{q_4} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	q_4 ?	$\sqrt{\frac{E + m_{q_4} c^2}{2E}}\, s \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i\varepsilon cp}{E + mc^2} \end{bmatrix}$	$\sqrt{\frac{E + m_{q_4} c^2}{2E}}\, s \otimes \begin{bmatrix} \frac{i\varepsilon cp}{E + m_{q_4} c^2} \\ 1 \end{bmatrix}$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes (m_{q_4} c^2 \sigma^3 + \varepsilon cp \sigma^2)$
$\sigma^0 \otimes \sigma^1 \partial_0 \breve{\Psi} - i\sigma^j \otimes \sigma^2 \partial_j \breve{\Psi} + \frac{im_{q_5} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	q_5 ?	$\frac{m_{q_5} c^2}{\sqrt{2E(E-\varepsilon cp)}}\, s \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E - \varepsilon cp}{m_{q_5} c^2} \end{bmatrix}$	$\frac{m_{q_5} c^2}{\sqrt{2E(E-\varepsilon cp)}}\, s \otimes \begin{bmatrix} \frac{E+\varepsilon cp}{m_{q_5} c^2} \\ 1 \end{bmatrix}$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes (m_{q_5} c^2 \sigma^1 + \varepsilon cp \sigma^3)$
$\sigma^0 \otimes \sigma^2 \partial_0 \breve{\Psi} + i\sigma^j \otimes \sigma^1 \partial_j \breve{\Psi} + \frac{im_{q_6} c}{\hbar} \breve{\Psi} = 0$	q_6 ?	$\frac{m_{q_6} c^2}{\sqrt{2cp(\varepsilon E - cp)}}\, s \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ i\frac{E - \varepsilon cp}{m_{q_6} c^2} \end{bmatrix}$	$\frac{m_{q_6} c^2}{\sqrt{2cp(\varepsilon E - cp)}}\, s \otimes \begin{bmatrix} i\frac{E-\varepsilon cp}{m_{q_6} c^2} \\ 1 \end{bmatrix}$	$(\vec{\sigma}.\vec{n}) \otimes (m_{q_6} c^2 \sigma^2 + \varepsilon cp \sigma^3)$

avec $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ et $s = \dfrac{1}{\sqrt{2(1+n_3)}} \begin{bmatrix} n_3 + 1 \\ n_1 + in_2 \end{bmatrix}$ spin en haut

ou $s = \dfrac{1}{\sqrt{2(1+n_3)}} \begin{bmatrix} -n_1 + in_2 \\ n_3 + 1 \end{bmatrix}$ spin en bas [23]

pour toutes les équations ci-dessus.

Si $\vec{n} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ alors, $s = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}$ spin en haut

ou $s = \begin{bmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ spin en bas

3.4. Construction des équations des fermions

3.4.1. Quantification de $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$

Nous allons maintenant étudier les équations des fermions fondamentaux en les retrouvant par quantification de la relation énergie-impulsion

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \qquad (66.1)$$

La fonction d'onde d'une particule de spin-$\frac{1}{2}$ est à deux composantes. Ainsi, pour quantifier l'équation (66.1) afin d'obtenir une équation relativiste d'une particule de spin-$\frac{1}{2}$, il faut que les opérateurs prenant part dans la quantification soient des matrices carrées de dimension deux. Considérons donc l'isomorphisme entre l'espace physique et l'algèbre d'espace.

Pour retrouver l'équation relativiste du négaton libre, prenons comme règle de quantification [19],[20]

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sigma^0$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^1}\sigma^1 - i\hbar\frac{\partial}{\partial x^2}\sigma^2 - i\hbar\frac{\partial}{\partial x^3}\sigma^3 = -i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}$$

L'équation (66.1) se quantifie de la manière suivante :

$$\left[\left(i\hbar\sigma^0\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2 - \left(i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\right)^2\right]\psi = (mc)^2\psi \qquad (67.1)$$

qui est équivalente à

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\right)\psi = (mc)^2\psi \qquad (67.2)$$

ψ étant la fonction d'onde du fermion.

En posant,

$$\phi = \psi \text{ et } \chi = \frac{1}{mc}\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\right)\phi$$

L'équation (67.2) est équivalente au système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\phi - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\phi = mc\chi \\ \\ i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\chi + i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\chi = mc\phi \end{array}\right. \qquad (67.3)$$

Par addition et par soustraction membre à membre, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}(\chi + \phi) + i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}(\chi - \phi) = mc(\chi + \phi) \\ \\ -i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}(\chi + \phi) - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}(\chi - \phi) = mc(\chi - \phi) \end{array}\right.$$

En écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} & i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla} \\ -i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla} & -i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix} = mc\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix}$$

Soit,

$$i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix} + \hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\begin{bmatrix} 0 & i\sigma^0 \\ -i\sigma^0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix} = mc\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix}$$

d'où,

$$\sigma^3\otimes\sigma^0\,\frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix} + i\sigma^2\otimes\sigma^j\partial_j\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix} + \frac{imc}{\hbar}\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix} = 0 \qquad (68.1)$$

l'équation de Dirac pour le négaton libre si m est la masse d'une telle particule.

Le système d'équation (67.3) peut s'écrire matriciellement

$$\begin{bmatrix} 0 & i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla} \\ i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix} = mc\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix}$$

qui peut encore s'écrire

$$\sigma^1\otimes\sigma^0\,\frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix} + (-i\sigma^2\otimes\sigma^j)\partial_j\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix} + \frac{imc}{\hbar}\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix} = 0 \qquad (68.2)$$

C'est l'équation du lepton libre l_5 si m est la masse d'une telle particule.

L'équation (67.1) est équivalente à

$$\left[\left(i\hbar\sigma^0\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2 - \left(i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\right)^2\right]\psi = -(\text{imc})^2\psi$$

et alors,

$$(\, i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\,)(\, i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\,)\ \psi = -(\text{imc})^2\psi$$

Posons

$$\phi = \psi \text{ et } \chi' = \frac{1}{\text{imc}}(\, i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\,)\phi\ ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \text{imc}\,\chi' = i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\phi - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\phi \\ \text{imc}\phi = -i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\chi' - i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\chi' \end{cases}$$

En utilisant la même méthode que précédemment, nous avons :

$$\sigma^2\otimes\sigma^0\frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix}\chi' \\ \\ \phi\end{bmatrix} + (\, i\sigma^1\otimes\sigma^j\,)\partial_j\begin{bmatrix}\chi' \\ \\ \phi\end{bmatrix} + \frac{\text{imc}}{\hbar}\begin{bmatrix}\chi' \\ \\ \phi\end{bmatrix} = 0 \qquad (69.1)$$

C'est l'équation du lepton l_6 si m est la masse d'une telle particule.

Et,

$$\sigma^2\otimes\sigma^0\frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix}\chi'-\phi \\ \\ \chi'+\phi\end{bmatrix} + (-\, i\sigma^3\otimes\sigma^j)\partial_j\begin{bmatrix}\chi'-\phi \\ \\ \chi'+\phi\end{bmatrix} + \frac{\text{imc}}{\hbar}\begin{bmatrix}\chi'-\phi \\ \\ \chi'+\phi\end{bmatrix} = 0$$

C'est l'équation du lepton l_2 si m est la masse d'une telle particule.

Il nous reste à déterminer l'équation du lepton l_3 et l_4.

L'équation (67.1) est équivalente à

$$(-\, i\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\,)^2\Psi = \left[(-imc)^2 - \left(\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2\right]\Psi \qquad (70.1)$$

Posons

$$\phi'' = \Psi \text{ et } \left(-\,\mathrm{imc} - \hbar\frac{\partial}{c\partial t}\right)\phi'' = -\,\mathrm{i}\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\,\chi'' \ .$$

Si

$$\left(-\,\mathrm{imc} + \hbar\frac{\partial}{c\partial t}\right)\chi'' = -\,\hbar\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\,\phi''$$

alors, on a l'équation (70.1).

En continuant comme précédemment, nous avons :

$$\sigma^3\otimes\sigma^0\,\frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix}\phi''\\ \\ \chi''\end{bmatrix} + (-\,\mathrm{i}\sigma^1\otimes\sigma^j)\,\partial_j\begin{bmatrix}\phi''\\ \\ \chi''\end{bmatrix} + \frac{\mathrm{imc}}{\hbar}\begin{bmatrix}\phi''\\ \\ \chi''\end{bmatrix} = 0$$

C'est l'équation du lepton l_4 si m est la masse d'une telle particule.

Et,

$$\sigma^1\otimes\sigma^0\,\frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix}\phi''-\chi''\\ \\ \phi''+\chi''\end{bmatrix} + \mathrm{i}\sigma^3\otimes\sigma^j\partial_j\begin{bmatrix}\phi''-\chi''\\ \\ \phi''+\chi''\end{bmatrix} + \frac{\mathrm{imc}}{\hbar}\begin{bmatrix}\phi''-\chi''\\ \\ \phi''+\chi''\end{bmatrix} = 0$$

C'est l'équation du lepton l_3 si m est la masse d'une telle particule.

L'équation d'un quark libre peut s'obtenir à partir de celle d'un lepton de la manière suivante. Prenons par exemple l'équation du négaton. En supposant d'abord la masse m comme paramètre, posons

$$\begin{bmatrix}\chi+\phi\\ \\ \chi-\phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\chi_1+\phi_1\\ \chi_2+\phi_2\\ \chi_1-\phi_1\\ \chi_2-\phi_2\end{bmatrix}$$

L'équation (68.1) peut se transformer en :

$$\sigma^0 \otimes \sigma^3 \frac{\partial}{c\partial t}\begin{bmatrix}\chi_1+\phi_1\\ \chi_2+\phi_2\\ \chi_1-\phi_1\\ \chi_2-\phi_2\end{bmatrix} + \sigma^j \otimes i\sigma^2 \partial_j \begin{bmatrix}\chi_1+\phi_1\\ \chi_2+\phi_2\\ \chi_1-\phi_1\\ \chi_2-\phi_2\end{bmatrix} + \frac{imc}{\hbar}\begin{bmatrix}\chi_1+\phi_1\\ \chi_2+\phi_2\\ \chi_1-\phi_1\\ \chi_2-\phi_2\end{bmatrix} = 0$$

C'est l'équation du quark q_1 si m est la masse d'une telle particule.

3.4.2. Transformation entre les matrices coefficients

Supposons que $\begin{bmatrix}\chi\\ \phi\end{bmatrix}$ de l'équation (68.2) est normalisée, alors

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\chi+\phi\\ \chi-\phi\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sigma^0 & \sigma^0\\ \sigma^0 & -\sigma^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi\\ \phi\end{bmatrix}$$

est normalisée.

La matrice

$$[T_{15}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sigma^0 & \sigma^0\\ \sigma^0 & -\sigma^0\end{bmatrix}$$

est une matrice unitaire, et

$$[T_{15}]^{-1} = [T_{15}] = [T_{15}]^{+}$$

Cette matrice transforme les coefficients de l'équation du lepton l_1 à ceux de l'équation du lepton l_5, de la manière suivante

$$[T_{15}](\sigma^3 \otimes \sigma^0)[T_{15}]^{+} = \sigma^1 \otimes \sigma^0$$

$$[T_{15}](\mathrm{i}\sigma^2 \otimes \sigma^j)[T_{15}]^+ = -\mathrm{i}\sigma^2 \otimes \sigma^j \ , \ \mathrm{j} = 1,2,3.$$

Soit

$$[T_{51}] = [T_{15}]^{-1} = [T_{15}]$$

$$[T_{51}](\sigma^1 \otimes \sigma^0)[T_{51}]^+ = \sigma^3 \otimes \sigma^0$$

$$[T_{51}](-\mathrm{i}\sigma^2 \otimes \sigma^j)[T_{51}]^+ = \mathrm{i}\sigma^2 \otimes \sigma^j$$

C'est-à-dire, de la manière de la transformation du théorème **2.5.5.**.

$\begin{bmatrix} \chi' \\ \\ \phi \end{bmatrix}$ de l'équation (69.1) est égale à

$$\begin{bmatrix} \chi' \\ \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\chi \\ \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sigma^0 & 0 \\ \\ 0 & \sigma^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \\ \phi \end{bmatrix}$$

Soit

$$[T_{56}] = \begin{bmatrix} -i\sigma^0 & 0 \\ \\ 0 & \sigma^0 \end{bmatrix}$$

$[T_{56}]$ est une matrice unitaire.

$$[T_{56}](\sigma^1 \otimes \sigma^0)[T_{56}]^+ = \sigma^2 \otimes \sigma^0$$

$$[T_{56}](-\mathrm{i}\sigma^2 \otimes \sigma^j)[T_{56}]^+ = \mathrm{i}\sigma^1 \otimes \sigma^j$$

C'est-à-dire, $[T_{56}]$ transforme les coefficients de l'équation du lepton l_5 à ceux de l'équation du lepton l_6.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \chi' - \phi \\ \chi' + \phi \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma^0 & -\sigma^0 \\ \sigma^0 & \sigma^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi' \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$[T_{62}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma^0 & -\sigma^0 \\ \sigma^0 & \sigma^0 \end{bmatrix}$$

est une matrice unitaire.

$$[T_{62}]^{-1} = [T_{62}]^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma^0 & \sigma^0 \\ -\sigma^0 & \sigma^0 \end{bmatrix} = [T_{26}]$$

$$\begin{cases} \phi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\chi + \phi) \\ \chi_2 = \dfrac{i}{\sqrt{2}}(\chi - \phi) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_2 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma^0 & \sigma^0 \\ i\sigma^0 & -i\sigma^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix}$$

Soit .

$$[T_{54}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma^0 & \sigma^0 \\ i\sigma^0 & -i\sigma^0 \end{bmatrix}$$

$$[T_{54}]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma^0 & -i\sigma^0 \\ \sigma^0 & i\sigma^0 \end{bmatrix} = [T_{54}]^{+}$$

$[T_{54}]$ est une matrice unitaire.

$$[T_{34}] = [T_{56}]$$

La matrice de transformation qui fait passer

$$N\begin{bmatrix} \chi_1+\phi_1 \\ \chi_2+\phi_2 \\ \chi_1-\phi_1 \\ \chi_2-\phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{à} \quad N\begin{bmatrix} \chi_1+\phi_1 \\ \chi_1-\phi_1 \\ \chi_2+\phi_2 \\ \chi_2-\phi_2 \end{bmatrix}$$

avec $N = \dfrac{1}{\sqrt{|\chi_1+\phi_1|^2+|\chi_2+\phi_2|^2+|\chi_1-\phi_1|^2+|\chi_2-\phi_2|^2}}$ facteur de normalisation,

est

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est une matrice unitaire

$$[U]^{-1} = [U]^{+} = [U]$$

Pour toutes matrices, 2×2 à éléments complexes, $[A]$ et $[B]$

$$[U]([A]\otimes[B]) = ([B]\otimes[A])[U]$$

Pour toutes matrices unicolonnes, à deux lignes $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

$$[U]\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

3.4.3. Conclusion

Les coefficients de l'équation du lepton l_i (resp. quark q_i), $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ se transforment à ceux du lepton l_j (resp. quark q_i), $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $j \neq i$, de la manière de la transformation du théorème **2.5.5.** par la transformation $[T_{ij}]$.

Les coefficients de l'équation du lepton l_i se transforment à ceux de l'équation du quark q_i , $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ de la manière de la transformation du théorème **2.5.5.** par la matrice unitaire $[U]$ et vice versa.

Les coefficients des équations des fermions fondamentaux se transforment entre eux par ces matrices unitaires ou par leurs produits.

3.5. Equivalence de particules

3.5.1. Définition

Soit une théorie T dans laquelle deux types de particules f_1 et f_2 admettent respectivement les équations

$$E_1(\phi) = 0 \quad \text{et} \quad E_2(\phi) = 0$$

où, ϕ la fonction inconnue.

Disons qu'une particule de type f_1 dans l'état ψ_1 est équivalente à une particule de type f_2 dans l'état ψ_2 si les équations $E_1(\psi_1) = 0$ et $E_2(\psi_2) = 0$ sont équivalentes,

$$E_1(\psi_1) = 0 \Leftrightarrow E_2(\psi_2) = 0$$

Si nous prenons comme équation des fermions fondamentaux libres une seule équation paramétrée par la masse m, même forme que l'une des douze équations des fermions fondamentaux libres, nous déduisons facilement que :

Un fermion f_i , i = 1,2,...,12, libre dans l'état à valeur propre de l'énergie E > 0, et de l'impulsion $\vec{p}$ est équivalente à un fermion f_j , j =1,2,...,12, libre dans l'état à valeur propre de l'énergie $\frac{m_{f_j}}{m_{f_i}} E > 0$, et de l'impulsion $\frac{m_{f_j}}{m_{f_i}} \vec{p}$.

La construction des équations des fermions fondamentaux par quantification de la relation impulsion-énergie nous fait remarquer l'existence des équations équivalentes, si on fixe le paramètre m. Par exemple, sur la construction de l'équation du négaton et celle du lepton l_5, sur la construction de l'équation du lepton l_i et celle du quark q_i. Nous allons voir s'il y a vraiment équivalence de particules, par exemple entre le lepton l_5 et le négaton.

Soit $\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix}$, fonction d'onde normalisée du lepton l_5.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \chi+\phi \\ \chi-\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma^0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & -\sigma^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix}$$

Si la masse du lepton l_5 était égale à celle du négaton, nous pourrions dire que le lepton l_5 dans l'état $\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix}$ serait équivalente à un négaton dans l'état $[T_{15}]\begin{bmatrix} \chi \\ \phi \end{bmatrix}$.

Or les masses de ces deux particules sont différentes.

Un lepton l_5 à l'état libre, à énergie bien définie E > 0 et à impulsion $\vec{p}$ est traduit par l'équation

$$\sigma^1 \otimes \sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} \psi_{5+}(E, \vec{p}) + (-i\sigma^2 \otimes \sigma^j)\partial_j \psi_{5+}(E, \vec{p}) + i\frac{m_5 c}{\hbar} \psi_{5+}(E, \vec{p}) = 0 \quad (76.1)$$

avec

$$\psi_{5+}(E, \vec{p}) = \frac{m_5 c^2}{\sqrt{2E(E-\varepsilon cp)}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E-\varepsilon cp}{m_5 c^2} \end{bmatrix} \otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-Et)}$$

Soit

$$\frac{m_5}{m_e} = \frac{m_5}{m_1} = \lambda_1^5 = \lambda$$

En divisant (76.1) par λ, on a :

$$\sigma^1\otimes\sigma^0 \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{c\partial t}\psi_{5+}(E, \vec{p}) + (-i\sigma^2\otimes\sigma^j)\frac{1}{\lambda}\partial_j \psi_{5+}(E, \vec{p}) + i\frac{m_e c}{\hbar}\psi_{5+}(E, \vec{p}) = 0 \tag{77.1}$$

$$\sigma^1\otimes\sigma^0 \frac{i}{\hbar c}\left(-\frac{E}{\lambda}\right)\psi_{5+}(E, \vec{p}) + (-i\sigma^2\otimes\sigma^j)\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p_j}{\lambda}\right)\psi_{5+}(E, \vec{p}) +$$

$$+ i\frac{m_e c}{\hbar}\psi_{5+}(E, \vec{p}) = 0$$

En simplifiant par $e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-Et)}$ puis en multipliant par $e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{\vec{p}}{\lambda}.\vec{x}-\frac{E}{\lambda}t)}$, l'équation (77.1) devient

$$\sigma^1\otimes\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t}\frac{m_e c^2}{\sqrt{2\frac{E}{\lambda}\left(\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}\right)}}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{\vec{p}}{\lambda}.\vec{x}-\frac{E}{\lambda}t)} +$$

$$+ (-i\sigma^2\otimes\sigma^j)\partial_j \frac{m_e c^2}{\sqrt{2\frac{E}{\lambda}\left(\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}\right)}}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{\vec{p}}{\lambda}.\vec{x}-\frac{E}{\lambda}t)} +$$

$$+ i\frac{m_e c}{\hbar}\frac{m_e c^2}{\sqrt{2\frac{E}{\lambda}\left(\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}\right)}}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{\vec{p}}{\lambda}.\vec{x}-\frac{E}{\lambda}t)} = 0$$

En multipliant à gauche par $\left[T_{15}\right]$ et en remarquant que

$$\left[T_{15}\right]\sigma^1\otimes\sigma^0 = \sigma^3\otimes\sigma^0\left[T_{15}\right]$$

$$\left[T_{15}\right]\sigma^2\otimes\sigma^j = -(\sigma^2\otimes\sigma^j)\left[T_{15}\right]$$

l'équation (77.1) devient

$$\sigma^3\otimes\sigma^0\,\frac{\partial}{c\partial t}\,\frac{m_e c^2}{\sqrt{2\frac{E}{\lambda}\left(\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}\right)}}\left[T_{15}\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\vec{p}}{\lambda}.\vec{x}-\frac{E}{\lambda}t\right)} +$$

$$+\ (i\sigma^2\otimes\sigma^j)\,\partial_j\,\frac{m_e c^2}{\sqrt{2\frac{E}{\lambda}\left(\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}\right)}}\left[T_{15}\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\vec{p}}{\lambda}.\vec{x}-\frac{E}{\lambda}t\right)} +$$

$$+\ i\frac{m_e c}{\hbar}\,\frac{m_e c^2}{\sqrt{2\frac{E}{\lambda}\left(\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}\right)}}\left[T_{15}\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\vec{p}}{\lambda}.\vec{x}-\frac{E}{\lambda}t\right)} = 0$$

On montre facilement que

$$\frac{m_e c^2}{\sqrt{2\frac{E}{\lambda}\left(\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}\right)}}\left[T_{15}\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\frac{E}{\lambda}-\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s = \sqrt{\frac{\frac{E}{\lambda}+m_e c^2}{2\frac{E}{\lambda}}}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\varepsilon c\frac{p}{\lambda}}{\frac{E}{\lambda}+m_e c^2}\end{bmatrix}\otimes s$$

Finalement, l'équation (76.1) devient

$$\sigma^3\otimes\sigma^0\,\frac{\partial}{c\partial t}\,\psi_{e+}\left(\frac{E}{\lambda},\frac{\vec{p}}{\lambda}\right)+i\sigma^2\otimes\sigma^j\,\partial_j\,\psi_{e+}\left(\frac{E}{\lambda},\frac{\vec{p}}{\lambda}\right)+i\frac{m_e c}{\hbar}\,\psi_{e+}\left(\frac{E}{\lambda},\frac{\vec{p}}{\lambda}\right)=0$$

D'où, un lepton l_5 libre dans l'état à valeur propre de l'énergie $E > 0$ et à impulsion $\vec{p}$ est équivalent à un négaton libre dans l'état à valeur propre de l'énergie

$$\frac{m_e}{m_5}E = \frac{E}{\lambda}$$

et à impulsion

$$\frac{m_e}{m_5}\vec{p} = \frac{\vec{p}}{\lambda}$$

De façon analogue, mais en utilisant la matrice $[U]$ au lieu de $[T_{15}]$, on obtiendra qu'un lepton l_i libre dans l'état à énergie $E > 0$, impulsion $\vec{p}$ est équivalent au quark q_i à énergie

$\frac{m_{q_i}}{m_{l_i}}E$ et impulsion $\frac{m_{q_i}}{m_{l_i}}\vec{p}$.

m_{q_i} masse du quark q_i

m_{l_i} masse du lepton l_i

3.5.2. Théorème

Un fermion f_i, $i = 1,2,\ldots,12$, libre dans l'état à valeur propre de l'énergie $E > 0$, et de l'impulsion $\vec{p}$ est équivalente à un fermion f_j, $j = 1,2,\ldots,12$, libre dans l'état à valeur propre de l'énergie $\frac{m_{f_j}}{m_{f_i}}E > 0$, et de l'impulsion $\frac{m_{f_j}}{m_{f_i}}\vec{p}$.

Ainsi, les fermions libres sont équivalents entre eux.

Nous avons le même théorème que lorsque l'on prenait comme équation des fermions fondamentaux libres une seule équation paramétrée par la masse m, même forme que l'une des douze équations des fermions fondamentaux libres, supposée par la théorie du modèle standard.

Chapitre 4. EQUATION DE HESTENES ET EQUATION DE DIRAC

Beaucoup d'auteurs $[8],[16],[21]$ ont démontré que l'équation de Dirac

$$\left[\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_{\mu}\right)+\mathrm{i}\frac{mc}{\hbar}\right]\breve{\psi}=0 \qquad (81.1)$$

pour un négaton dans un champ électromagnétique,

avec $\breve{\psi}=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix}$

est équivalente à l'équation de Hestenes .

4.1. Equation de Hestenes

4.1.1. Définition

C'est l'équation

$$\partial[\Psi]+\left(\frac{mc}{\hbar}[\Psi]\gamma^0+\frac{e}{\hbar c}\mathrm{P_v}[\Psi]\right)\gamma^2\gamma^1=0 \qquad (81.2)$$

avec

$$\mathrm{P_v}=\begin{bmatrix}A_0 & A\\ & \\ -A & -A_0\end{bmatrix}$$

où A_0 désigne le potentiel éléctrique , $A = A_i\sigma^i$, avec les A_i sont les composantes du potentiel-vecteur.

$$[\Psi]=\begin{bmatrix}[\Phi_1] & [\Phi_2]\\ & \\ [\Phi_2] & [\Phi_1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_1 & -\psi_2^* & \psi_3 & \psi_4^*\\ \psi_2 & \psi_1^* & \psi_4 & -\psi_3^*\\ \psi_3 & \psi_4^* & \psi_1 & -\psi_2^*\\ \psi_4 & -\psi_3^* & \psi_2 & \psi_1^*\end{bmatrix}$$

où ψ_μ^* est le conjugué complexe de ψ_μ ,

$$\lfloor\Phi_1\rfloor = \begin{bmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{bmatrix}, \quad \lfloor\Phi_2\rfloor = \begin{bmatrix} \psi_3 & \psi_4^* \\ \psi_4 & -\psi_3^* \end{bmatrix}$$

Nous allons donner une autre démonstration de l'équivalence de ces deux équations, en utilisant le produit tensoriel de matrices $\otimes$.

4.1.2. Théorème

L'équation de Hestenes (81.2) est équivalente à l'équation de Dirac (81.1).

Démonstration

$$[\Psi] = \sigma^0 \otimes \lfloor\Phi_1\rfloor + \sigma^1 \otimes \lfloor\Phi_2\rfloor$$

$$\partial\!\!\!/ = \sigma^3 \otimes \sigma^0\partial_0 + i\sigma^2 \otimes \nabla$$

$$\gamma^0 = \sigma^3 \otimes \sigma^0 \quad , \quad \gamma^2\gamma^1 = i\sigma^0 \otimes \sigma^3$$

$$P_v = A_0\sigma^3 \otimes \sigma^0 + i\sigma^2 \otimes A,$$

où A est le potentiel-vecteur.

L'équation de Hestenes s'écrit alors :

$$(\sigma^3 \otimes \sigma^0\partial_0 + i\sigma^2 \otimes \nabla)(\sigma^0 \otimes \lfloor\Phi_1\rfloor + \sigma^1 \otimes \lfloor\Phi_2\rfloor) + \Big\{\frac{mc}{\hbar}(\sigma^0 \otimes \lfloor\Phi_1\rfloor +$$
$$\sigma^1 \otimes \lfloor\Phi_2\rfloor)(\sigma^3 \otimes \sigma^0) + \frac{e}{\hbar c}(A_0\sigma^3 \otimes \sigma^0 + i\sigma^2 \otimes A)(\sigma^0 \otimes \lfloor\Phi_1\rfloor + \sigma^1 \otimes \lfloor\Phi_2\rfloor)\Big\}$$
$$i\sigma^0 \otimes \sigma^3 = 0$$

En développant cette équation, nous avons:

$$(\sigma^3 \otimes \partial_0\lfloor\Phi_1\rfloor) + i\sigma^2 \otimes \partial_0\lfloor\Phi_2\rfloor + i\sigma^2 \otimes \nabla\lfloor\Phi_1\rfloor + \sigma^3 \otimes \nabla\lfloor\Phi_2\rfloor +$$
$$i\frac{mc}{\hbar}(\sigma^3 \otimes \lfloor\Phi_1\rfloor\sigma^3) + \frac{mc}{\hbar}(\sigma^2 \otimes \lfloor\Phi_2\rfloor\sigma^3) + i\frac{eA_0}{\hbar c}\sigma^3 \otimes \lfloor\Phi_1\rfloor\sigma^3 - \frac{eA_0}{\hbar c}\sigma^2 \otimes \lfloor\Phi_2\rfloor\sigma^3 -$$
$$\frac{e}{\hbar c}\sigma^2 \otimes A\lfloor\Phi_1\rfloor\sigma^3 + i\frac{e}{\hbar c}\sigma^3 \otimes A\lfloor\Phi_2\rfloor\sigma^3 = 0$$

C'est-à-dire :

$$\sigma^3 \otimes \lfloor\partial_0\lfloor\Phi_1\rfloor + \nabla\lfloor\Phi_2\rfloor + i\frac{mc}{\hbar}\lfloor\Phi_1\rfloor\sigma^3 + i\frac{eA_0}{\hbar c}\lfloor\Phi_1\rfloor\sigma^3 + i\frac{e}{\hbar c}A\lfloor\Phi_2\rfloor\sigma^3\ \rfloor +$$

$$+\ \sigma^2 \otimes \lfloor i\partial_0\lfloor\Phi_2\rfloor + i\nabla\lfloor\Phi_1\rfloor + \frac{mc}{\hbar}\lfloor\Phi_2\rfloor\sigma^3 - \frac{eA_0}{\hbar c}\lfloor\Phi_2\rfloor\sigma^3 - \frac{e}{\hbar c}A\lfloor\Phi_1\rfloor\sigma^3\ \rfloor = 0$$

Or, $\sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

Donc, l'équation de Hestenes est équivalente à

$$\begin{cases} \partial_0[\Phi_1] + \nabla[\Phi_2] + i\dfrac{mc}{\hbar}[\Phi_1]\sigma^3 + i\dfrac{eA_0}{\hbar c}[\Phi_1]\sigma^3 + i\dfrac{e}{\hbar c}A[\Phi_2]\sigma^3 = 0 \\ \\ -\partial_0[\Phi_2] - \nabla[\Phi_1] + i\dfrac{mc}{\hbar}[\Phi_2]\sigma^3 - i\dfrac{eA_0}{\hbar c}[\Phi_2]\sigma^3 - i\dfrac{e}{\hbar c}A[\Phi_1]\sigma^3 = 0 \end{cases}$$

Comme

$$[\Phi_1]\sigma^3 = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2^* \\ \psi_2 & -\psi_1^* \end{bmatrix} \quad , \quad [\Phi_2]\sigma^3 = \begin{bmatrix} \psi_3 & -\psi_4^* \\ \psi_4 & \psi_3^* \end{bmatrix}$$

Alors, elle est équivalente à

$$\begin{cases} \partial_0\begin{bmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{bmatrix} + \nabla\begin{bmatrix} \psi_3 & \psi_4^* \\ \psi_4 & -\psi_3^* \end{bmatrix} + i\dfrac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2^* \\ \psi_2 & -\psi_1^* \end{bmatrix} + i\dfrac{eA_0}{\hbar c}\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2^* \\ \psi_2 & -\psi_1^* \end{bmatrix} + i\dfrac{e}{\hbar c}A\begin{bmatrix} \psi_3 & -\psi_4^* \\ \psi_4 & \psi_3^* \end{bmatrix} = 0 \\ \\ -\partial_0\begin{bmatrix} \psi_3 & \psi_4^* \\ \psi_4 & -\psi_3^* \end{bmatrix} - \nabla\begin{bmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{bmatrix} + i\dfrac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix} \psi_3 & -\psi_4^* \\ \psi_4 & \psi_3^* \end{bmatrix} - i\dfrac{eA_0}{\hbar c}\begin{bmatrix} \psi_3 & -\psi_4^* \\ \psi_4 & \psi_3^* \end{bmatrix} - i\dfrac{e}{\hbar c}A\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2^* \\ \psi_2 & -\psi_1^* \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

D'après l'égalité de deux matrices

$$\begin{cases} \partial_0\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + \nabla\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} + i\dfrac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + i\dfrac{eA_0}{\hbar c}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + i\dfrac{e}{\hbar c}A\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0 \\ -\partial_0\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} - \nabla\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + i\dfrac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} - i\dfrac{eA_0}{\hbar c}\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} - i\dfrac{e}{\hbar c}A\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \partial_0\begin{bmatrix} -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{bmatrix} + \nabla\begin{bmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \end{bmatrix} + i\dfrac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{bmatrix} + i\dfrac{eA_0}{\hbar c}\begin{bmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{bmatrix} + i\dfrac{e}{\hbar c}A\begin{bmatrix} -\psi_4^* \\ \psi_3^* \end{bmatrix} = 0 \\ -\partial_0\begin{bmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \end{bmatrix} - \nabla\begin{bmatrix} -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{bmatrix} + i\dfrac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix} -\psi_4^* \\ \psi_3^* \end{bmatrix} - i\dfrac{eA_0}{\hbar c}\begin{bmatrix} -\psi_4^* \\ \psi_3^* \end{bmatrix} - i\dfrac{e}{\hbar c}A\begin{bmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (83.1)$$

Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$\begin{bmatrix} \partial_0 & \nabla \\ -\nabla & -\partial_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{bmatrix} + i\frac{e}{\hbar c}\begin{bmatrix} A_0 & A \\ -A & -A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{bmatrix} + i\frac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{bmatrix} = 0$$

qui n'est autre que l'équation de Dirac (81.1)
En remplaçant ∇ par $\sigma^1\partial_1 + \sigma^2\partial_2 + \sigma^3\partial_3$ et A par $A^1\sigma^1 + A^2\sigma^2 + A^3\sigma^3$, puis en passant aux conjugués complexes , avec les conjugués complexes de σ^1, σ^2, σ^3 sont respectivement σ^1, - σ^2, σ^3 , les deux dernières équations peuvent se condenser à la seule équation de Dirac (81.1).

4.2. Equation de Hestenes et particules équivalentes

On peut montrer par la méthode analytique que l'équation de Hestenes est équivalente au système de quatre équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lr}
\gamma^\mu\partial_\mu\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix} + i\frac{e}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix} + i\frac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix} = 0 & (84.1)\\
\gamma^\mu\partial_\mu\begin{bmatrix}\psi_3\\ \psi_4\\ \psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} + i\frac{e}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu\begin{bmatrix}\psi_3\\ \psi_4\\ \psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} - i\frac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix}\psi_3\\ \psi_4\\ \psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = 0 & (84.2)\\
\gamma^\mu\partial_\mu\begin{bmatrix}\psi_4^*\\ -\psi_3^*\\ -\psi_2^*\\ \psi_1^*\end{bmatrix} - i\frac{e}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu\begin{bmatrix}\psi_4^*\\ -\psi_3^*\\ -\psi_2^*\\ \psi_1^*\end{bmatrix} + i\frac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix}\psi_4^*\\ -\psi_3^*\\ -\psi_2^*\\ \psi_1^*\end{bmatrix} = 0 & (84.3)\\
\gamma^\mu\partial_\mu\begin{bmatrix}-\psi_2^*\\ \psi_1^*\\ \psi_4^*\\ -\psi_3^*\end{bmatrix} - i\frac{e}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu\begin{bmatrix}-\psi_2^*\\ \psi_1^*\\ \psi_4^*\\ -\psi_3^*\end{bmatrix} - i\frac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix}-\psi_2^*\\ \psi_1^*\\ \psi_4^*\\ -\psi_3^*\end{bmatrix} = 0 & (84.4)
\end{array}\right.$$

L'équation (84.1) n'est autre que l'équation de Dirac et l'équation (84.4) est équivalente au système d'équations formé par les deux dernières équations du système (83.1). Comme l'équation de Hestenes est équivalente à l'équation de Dirac, donc les trois équations sont équivalentes à l'équation de Dirac (84.1).

L'équation (84.2) équivalente à (84.1), nous permet de dire que :

un négaton dans l'état $\breve{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$ est équivalente à un négaton de masse –m dans l'état

$$K\breve{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}.$$

L'équation (84.3) équivalente à (84.1), permet de dire que :

Un négaton dans l'état $\breve{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$ est équivalente à un positon dans l'état $C\breve{\psi} = \begin{bmatrix} -i\psi_4^* \\ i\psi_3^* \\ i\psi_2^* \\ -i\psi_1^* \end{bmatrix}$.

Nous appelons ceci « équivalence de particules par conjugaison de charge ».

L'équation (84.4) équivalente à (84.1), permet également de dire que :

un négaton de masse m dans l'état $\breve{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$ est équivalente à un positon de masse –m

dans l'état $T\breve{\psi} = \begin{bmatrix} -i\psi_2^* \\ i\psi_1^* \\ i\psi_4^* \\ -i\psi_3^* \end{bmatrix}$. Nous appelons ceci « équivalence de particules par renversement de temps ».

Examinons l'équation (84.4). Soit T l'application antilinéaire :

$$T\breve{\psi}(-t,\vec{r}) = i\gamma^3\gamma^1\breve{\psi}^*(t,\vec{r}) = i\begin{bmatrix} -\psi_2^*(t,\vec{r}) \\ \psi_1^*(t,\vec{r}) \\ \psi_4^*(t,\vec{r}) \\ -\psi_3^*(t,\vec{r}) \end{bmatrix}$$

T est l'opérateur de renversement de temps [24]. Alors, en multipliant l'équation (84.4) par i, nous avons :

$$\gamma^\mu\partial_\mu\left(T\breve{\psi}(-t,\vec{r})\right) + i\frac{(-e)}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu\left(T\breve{\psi}(-t,\vec{r})\right) + i\frac{(-m)c}{\hbar}\left(T\breve{\psi}(-t,\vec{r})\right) = 0$$

Il est facile de montrer que T commute avec γ^0 et anticommute avec les γ^j, j = 1,2,3.

Alors,

$$T\left[(-\gamma^0 \partial_0 - \gamma^j \partial_j)(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) + i\frac{e}{\hbar c}(\gamma^0 A_0 - \gamma^j A_j)(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) + i\frac{mc}{\hbar}(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) \right] = 0$$

Or, T est injective , donc

$$(-\gamma^0 \partial_0 - \gamma^j \partial_j)(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) + i\frac{e}{\hbar c}(\gamma^0 A_0(-t,\vec{r}) - \gamma^j A_j(-t,\vec{r}))(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) + i\frac{mc}{\hbar}(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) = 0.$$

C'est-à-dire,

$$(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^j \partial_j)(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) + i\frac{(-e)}{\hbar c}(\gamma^0 A_0(-t,\vec{r}) - \gamma^j A_j(-t,\vec{r}))(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) - i\frac{mc}{\hbar}(\breve{\psi}(-t,\vec{r})) = 0.$$

Or, nous savons que A_0 ne change pas de signe si nous changeons le signe du temps alors que les A_j changent de signe. [25]

D'où, l'interprétation de Feynmann et Stuckelberg sur les phénomènes de création et d'annihilation [27] :

4.2.1. Théorème

Un négaton (particule) qui voyage du passé vers le futur est équivalent à un positon (antiparticule) qui voyage du futur vers le passé.

CONCLUSION GENERALE

Les propriétés du produit tensoriel de matrices construites sont utilisées pour construire un théorème que nous appelons « théorème d'agrandissement dimensionnel », et qui permet d'obtenir, à partir d'une ARC donnée d'autres ARC de dimensions plus grandes. L'application de ce théorème sur l'algèbre de Pauli nous permet d'obtenir douze systèmes et douze seulement, dont chacun engendre une ARC $\mathcal{C}l_{2,3}$. De chacun de ces systèmes, nous pouvons extraire quatre matrices, coefficients d'une équation de Dirac pour un fermion libre, et qui engendre une algèbre de Dirac.

La résolution de ces douze équations à l'aide des propriétés du produit tensoriel de matrices nous permet de séparer, par produit tensoriel de matrices, la solution à valeur propre de l'énergie en deux termes, dont pour les leptons, le premier est vecteur propre d'un opérateur que nous appelons opérateur signe de l'énergie et le second est vecteur propre de l'opérateur spin, vice versa pour les quarks, tableaux récapitulatifs.

Les douze fermions libres fondamentaux sont équivalents entre eux, si nous adoptons les douze équations comme leurs équations (tableaux).

La démonstration de l'équivalence entre l'équation de Hestenes et celle de Dirac en utilisant le produit tensoriel de matrices nous conduit à l'équivalence de particules de Feynmann-Stuckelberg, selon notre définition de l'équivalence de particules.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

[1] P.A.DIRAC.-*The Quantum Theory of the Electron.*- Proc.Roy.Soc (London) 117, 610(1928).

[2] D.HESTENES.- *Real Spinor Fields.*- Journal of Mathematical Physics,8 No.4, (1967), 798-808 ou http://modelingts.la.asu.edu/pdf/RealSpinorFields. pdf

[3] P.ROWLAND.- *The Nilpotent Dirac Equation and its Applications in Particle Physic.*- http://arXiv.org/ftp//quant-ph/papers/0301/0301071.PDF.

[4] C.DAVIAU.- *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli.*- Ann.Fond.Louis de Broglie, 22 n°1 1997

[5] C.DAVIAU.- *Dirac Equation in the Clifford Algebra of Space.*- Fundamental Theories of Physics, Vol 94, 1998, pp.67-87.

[6] W.E.BAYLIS.- *Eigenspinors and electron spin.*- in "The theory of the electron", Advances in Applied Clifford Algebras **7** (S), 1997.

[7] N.G.MARCHUK.- *Dirac* γ *-Equation, Classical Gauge Field and Clifford Algebra.*- of Physics, Vol 94, 1998, pp.67-87.

[8] N.G.MARCHUK.- *A tensor form of Dirac equation.*- http://www.Slac.Stanford.edu/Spires/hep/ , january 14, 2002.

[9] N.G.MARCHUK.- *The Dirac Equation vs. the Dirac type tensor equation.*- arXiv: math –ph/0211073v1 29Nov2002.

[10] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA.- *Algèbre linéaire et multilinéaire. Application.*-, collection LIRA, tome 1, 1986.

[11] R.P. WANG.- *Varieties of Dirac equations and flavors of leptons and quarks.*- juillet 2001.http://arxiv.org/PS_cach/hep-ph/pdf/0107/0107184 .pdf

[12] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA.- *Algèbre linéaire et multilinéaire. Application.*-, collection LIRA, tome 2, 1986.

[13] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA.- *Représentation matricielle des bases et des tenseurs –Etude* compacte.- Annales de l'université de Madagascar, série Sciences de la Nature et Mathématiques, n°14, 1977, pp.1-13.

[14] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA et RAMIARAMANANA Désiré.- *De la définition intrinsèque des tenseurs et de son utilisation pratique en calcul tensoriel. Changement de bases.*- Annales de l'université de Madagascar, série Sciences de la Nature et Mathématiques, n°11, 1974, pp.19-43.

[15] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA.- *Etude intrinsèque et représentation matricielle des produits kroneckeriens d'opérateurs linéaires – Etude générale.*- Annales de l'université de Madagascar, série Sciences de la Nature et Mathématiques, n°14, 1977, pp.15-29.

[16] G.CASANOVA.- *Algèbre vectorielle.*- collection Que sais-je, Ed. Presse universitaire de France, 1976, pp. 3-69.

[17] R.COQUEREAUX.- *Spinors, Reflections and Clifford algebras.*- dans "Spinors in Physics and Geometry", Trieste, 11- 13 Septembre 1986, édité par TRAUTMAN.A et FURLAN.G, World Scientific, pp.135-157.

[18] A.MESSIAH.- *Mécanique quantique.*- Dunod Paris, tome II, 1959, pp. 773-775.

[19] J.J.SAKURAI.- *Advanced Quantum Mechanics.*- Addison Wesley Publishing Company, 1967, pp.308-311.

[20] N.NELIPA.- *Physique des particules élémentaires.*- édition Mir Moscou, 1981, p. 30.

[21] C.DAVIAU.- *Electromagnétisme, monopoles magnétique et ondes de matière dans l'algèbre d'espace-temps(1ère partie).*- Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol.14, n°3, 1989, pp.273-280.

[22] M.KREUZER.- *Geometrische Methoden der Theoretischen Physik.*- http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/inc/gmtp.ps.gz, Sommersemester 2001.

[23] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA.- Cours de DEA de Physique Théorique (2000).

[24] G.BERESTETSKI, E.LIFCHITZ, L.PITAYEVSKI.-*Théorie quantique relativiste.*- Collection L.LANDAU et E.LIFCHITZ, PHYSIQUE THEORIQUE tome IV, Première partie, Edition Mir Moscou 1972, pp. 119-120.

[25] L.LANDAU, E.LIFCHITZ.- *Théorie du champ*, Collection L.LANDAU et E.LIFCHITZ , PHYSIQUE THEORIQUE tome II, Edition Mir Moscou 1972, pp.64-65.

[26] M.POSTNIKOV.- *Leçons de géométrie, Groupes et algèbres de Lie.*- Edition mir

Moscou, 1985.

[27] RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA.- Algèbre linéaire et Multilinéaire. Application.- Collection LIRA, Tome 3, 1986.

RESUME

Des propriétés du produit tensoriel de matrices ont été construites. Ces propriétés sont utilisées pour étudier les factorisations par produits tensoriels de matrices des algèbres réelles de Clifford de matrices carrées. Appliquant ces factorisations, nous avons trouvé une façon d'obtenir, à partir des matrices de Pauli, douze systèmes et douze seulement, dont chacun est formé de quatre matrices coefficients d'une équation de Dirac. Nous avons cherché les solutions de ces douze équations pour les fermions fondamentaux. Ces douze équations peuvent se construire par quantification de la relation impulsion-énergie. Nous avons introduit une notion que nous appelons ''équivalence de particules''. L'équivalence entre les fermions libres a été étudiée. Nous avons démontré en outre l'équivalence entre l'équation de Dirac et celle de Hestenes.

Mots-clés : Produit tensoriel, Algèbre réelle de Clifford, Algèbre de Pauli, Equation de Dirac, lepton, quark, Equation de Hestenes.

ABSTRACT

Properties of tensor product of matrices have been constructed. These properties are used to study factorization by tensor product of matrices of some real Clifford algebras of square matrices. Applying these factorizations, we have found a way to get , from the Pauli matrices, twelve systems and only twelve. Each of them is formed of four matrices coefficients of a Dirac equation. We have looked for solutions of these twelve equations for free fundamental fermions. These twelve equations can be constructed by quantification of the relativistic energy-momentum relation. We have introduced a notion that we call ''equivalence of particles''. Then, the equivalence between free fundamental fermions have been studied. Finally, we have proved equivalence between the Dirac equation and the Hestenes equation.

Keywords : Tensor product, real Clifford algebra, Pauli algebra, Dirac equation, lepton, quark, Hestenes equation.

Directeur de thèse : M. RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA, Professeur Titulaire de Classe exceptionnelle au Département de Physique, Université d'Antananarivo. Directeur Général de Madagascar-Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires, Madagascar-INSTN.