FLORENTIN SMARANDACHE

Paradoxe mathématique ?

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

PARADOXE MATHEMATIQUE ?

Propriété : Les axes radicals de n cercles d'un même plan, pris deux à deux, dont les centres ne sont pas alignés, sont concourants.

"Démonstration" par récurrence sur $n \geqslant 3$.

Pour le cas $n=3$ on sait que les 3 axes radicals sont concourants en un point qui s'appelle le centre radical. On suppose la propriété vraie pour les valeurs inférieures ou égales à un certain n.

Aux n cercles on ajoute le $(n+1)^{è}$ cercle.
On a (1) : les axes radicaux des n premiers cercles sont concourants en M.

Prenons 4 cercles quelconques, parmi lesquels figure le $(n+1)^{è}$. Ceux-ci ont les axes radicals concourants, conformémeént à l'hypothèse de récurrence, et au point M (puisque les 3 premiers cercles, qui font partie des n cercles de l'hypothèse de récurrence, ont leurs axes radicals concourrant en M).

Donc les axes radicals des (n+1) cercles sont concourants, ce qui montre que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 3$ de $\mathbb{N}$.

ET POURTANT, on peut construire le
Contre-exemple suivant :

On considère le parallélogramme ABCD qui n'a aucun angle droit. Puis on construit 4 cercles de centres respectifs A, B, C et D, et de même rayon. Alors les axes radicals des cercles $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(B)$, respectivement $\mathcal{C}(C)$ et $\mathcal{C}(D)$, sont deux droites, médiatrices respectivement des segments AB et CD .
Comme (AB) et (CD) sont parallèles, et que le parallélogramme n'a aucun angle droit, il en résulte que les deux axes radicals sont parallèles ... c'est-à-dire qu'ils ne se coupent jamais.

Expliquer cette (apparente !) contradiction avec la propriété antérieure ?

Réponse : La "propriété" est vraie seulement pour $n = 3$. Or dans la démonstration proposée on utilise la prémisse (fausse) selon laquelle pour $n=4$ la propriété serait vraie. Pour achever la preuve par récurrence il faudrait pouvoir montrer que $P(3) \Longrightarrow P(4)$, ce qui n'est pas possible puisque P(3) est vraie mais que le contre-exemple prouve que P(4) est fausse.