FLORENTIN SMARANDACHE

Sur la resolution dans l'ensemble des naturels des equationes linéaires

In Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

SUR LA RESOLUTION DANS L'ENSEMBLE DES NATURELS DES EQUATIONS LINEAIRES

L'utilité de cet article est qu'il établit si le nombre des solutions naturelles d'une équation linéaire est limité ou non. On expose aussi une méthode de résolution en nombres entiers de l'équation $ax - by = c$ (qui représente une généralisation des lemmes 1 et 2 de [4]), un exemple de résolution d'équation à 3 inconnues, et quelques considérations sur la résolution en nombres entiers naturels des équations à n inconnues.

Soit l'équation :

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ avec tous les a_i, b dans Z, $a_i \neq 0$, et $(a_1, \dots, a_n) = d$.

<u>Lemme 1</u> : L'équation (1) admet au moins une solution dans l'ensemble des entiers, si d divise b.

Ce résultat est classique.

Dans (1), on ne nuit pas à la généralité en preant $(a_1, \dots, a_n) = 1$, parce que dans le cas où $d \neq 1$ on divise l'équation par ce nombre ; si la division n'est pas entière, alors l'équation n'admet pas de solutions naturelles.

Il est évident que chaque équation linéaire homogène admet des solutions dans N : au moins la solution banale !

PROPRIETES SUR LE NOMBRE DE SOLUTIONS NATURELLES D'UNE EQUATION LINEAIRE GENERALE.

On va introduire la notion suivante :

<u>Déf.1</u> : L'équation (1) a des variations de signe s'il y a au moins deux coefficients a_i, a_j avec $1 \leq i, j \leq n$, tels que $a_i \cdot a_j < 0$.

<u>Lemme 2</u> : Une équation (1) qui a des variations de signe admet une infinité de solutions naturelles (généralisation du lemme 1 de [4]).

Preuve : De l'hypothèse du lemme résulte que l'équation a h termes positifs non nuls, $1 \leq h \leq n$, et $k = n-h$ termes négatifs non nuls. On a $1 \leq k \leq n$. On suppose que les h premiers termes sont positifs et les k suivants négatifs.

On peut alors écrire :

$$\sum_{t=1}^{h} a_t x_t - \sum_{j=h+1}^{n} a'_j x_j = b \quad \text{où } a'_j = -a_j > 0.$$

Soit $0 < M = [a_1, \dots, a_n]$ et $c_i = |M/a_i|$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Soit aussi $0 < P = [h, k]$, et $h_1 = P/h$ et $k_1 = P/k$.

Prenant $\begin{cases} x_t = h_1 c_t \cdot z + x_t^0 , & 1 \leq t \leq h , \\ x_j = k_1 c_j \cdot z + x_j^0 , & h+1 \leq j \leq n , \end{cases}$

où $z \in N$, $z \geq \max_{t,j} \left\{ \left[\frac{-x_t^0}{h_1 c_t} \right], \left[\frac{x_j^0}{k_1 c_j} \right] \right\} + 1$, et x_i^o , $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ une solution particulière entière (qui existe d'après le lemme 1), on obtient une infinité de solutions dans l'ensemble des naturels pour l'équation (1).

Lemme 3 : a) Une équation (1) qui n'a pas de variation de signe a au maximum un nombre limité de solutions naturelles.
b) Dans ce cas, pour $b \neq 0$, constant, l'équation a le nombre maximum de solutions si et seulement si $a_i = 1$ pour $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Preuve (voir aussi [6]).

a) On considère tous les $a_i > 0$ (dans le cas contraire, multiplier l'équation par -1).

Si $b < 0$, il est évident que l'équation n'a aucune solution (dans N).

Si $b = 0$, l'équation admet seulement la solution banale.

Si $b > 0$, alors chaque inconnue x_i prend des valeurs entières positives comprises entre 0 et $b/a_i = d_i$ (fini), et pas nécessairement toutes ces valeurs. Donc le nombre maximum de solutions est inférieur ou égal à :

$$\prod_{i=1}^{n} (1+d_i) \quad \text{qui est fini.}$$

b) Pour $b \neq 0$, constant, $\prod_{i=1}^{n} (1+d_i)$ est maximum ssi les d_i sont maximums, càd ssi $a_i = 1$ pour tout i de $\{1,2,\ldots,n\}$.

Théorème 1 : L'équation (1) admet une infinité de solutions naturelles si et seulement si elle a des variations de signe.

Ceci résulte naturellement de ce qui précède.

Méthode de résolution.

Théorème 2 : Soit l'équation à coefficients entiers $ax - by = c$, où a et $b > 0$ et $(a,b) = 1$. Alors la solution générale en nombres naturels de cette équation est :

$$\begin{cases} x = bk + x_0 \\ y = ak + y_0 \end{cases}$$ où (x_0, y_0) est une solution particulière entière de l'équation,

et $k \geq \max\left\{ [-x_0/b],\ [-y_0/a] \right\} + 1$ est un paramètre entier (généralisation du lemme 2 de [4]).

Preuve. Il résulte de [1] que la solution générale entière de l'équation est $\begin{cases} x = bk + x_0 \\ y = ak + y_0 \end{cases}$ où (x_0, y_0) est une solution particulière entière de l'équation et $k \in Z$. Puisque x et y sont des entiers naturels, il nous faut imposer des conditions à k, d'où la suite du théorème.

SYSTEMATISONS ! Pour résoudre dans l'ensemble des naturels une équation linéaire à n inconnues on utilise les résultats antérieurs de la façon suivante ;

a) Si l'équation n'a pas de variation de signe, comme elle a un nombre limité de solutions naturelles, la résolution est faite par épreuves (voir aussi [6]).

b) Si elle a des variations de signe et que b divisible par d, alors elle admet une infinité de solutions naturelles. On détermine d'abord sa solution générale entière (voir [2] , [5]):

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} k_j + \beta_i \quad , 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ où tous les } \alpha_{ij}, \beta_i \in Z$$

et les k_j sont des paramètres entiers.

En appliquant la restriction $x_i \geqslant 0$ pour tout i de $\{1,2,\ldots,n\}$, on détermine les conditions qui doivent être réalisées par les paramètres entiers k_j pour tout j de $\{1,2,\ldots,n-1\}$. (c)

Le cas n = 2 et n = 3 peut être traité par cette méthode, mais quand n augmente, les conditions (c) deviennent de plus en plus difficiles à trouver.

<u>Exemple</u> : Résoudre dans N l'équation $3x - 7y + 2z = -18$.

Sol. : dans Z on obtient la solution générale entière :

$$\begin{cases} x = k_1 \\ y = k_1 + 2\,k_2 \\ z = 2\,k_1 + 7\,k_2 - 9 \end{cases} \quad \text{avec } k_1 \text{ et } k_2 \text{ dans Z.}$$

Les conditions (c) résultent des inégalités $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Il en résulte $k_1 \geqslant 0$, et aussi $k_2 \geqslant [-k_1/2] + 1$ et $k_2 \geqslant [(9-2k_1)/7] + 1$, c'est-à-dire $k_2 \geqslant [(2-2k_1)/7] + 2$.

Avec ces conditions sur k_1 et k_2, on a la solution générale en nombres naturels de l'équation.

* * *

BIBLIOGRAPHIE :

[1] Creangă I.,Cazacu C.,Mihuţ P., Opaiţ Gh., Reisher, Corina - "Introducere în teoria numerelor ", Editura didactică şi pedagogică, Bucarest, 1965.

[2] Ion D., Ion, Niţă C. - "Elemente de aritmetică cu aplicaţii in tehnici de calcul" , Editura tehnică, Bucarest, 1978.

[3] Popovici C.P. - "Logica şi teoria numerelor" , Editura didactică şi pedagogică, Bucarest, 1970.

[4] Andrica, Dorin şi Andreescu, Titu - "Existenţa unei soluţii de bază pentru ecuaţia $ax^2 - by^2 = 1$" , Gazeta Matematică, n° 2/1981.

[5] Smarandache, Florentin Gh. - "Un algorithme de résolution ds l'ensemble des nombres entiers des équations linéaires" ,Analele Universităţii din Craiova, 1981.

[6] Smarandache, Florentin Gh. - Problema E : 6919, G.M 7/1980.