FLORENTIN SMARANDACHE

# Une classe d'ensembles recursifs

*In* Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

# UNE CLASSE D'ENSEMBLES RECURSIFS

Dans cet article on construit une classe d'ensembles récursifs, on établit des propriétés de ces ensembles et on propose des applications. Cet article élargit quelques résultats de [1] .

## 1) Définitions, propriétés.

On appelle ensembles récursifs les ensembles d'éléments qui se construisent de manière récursive ; soit T un ensemble d'éléments et $f_i$ pour i compris entre 1 et s, des opérations $n_i$-aires ,càd que $f_i : T^{n_i} \longrightarrow T$. Construisons récursivement l'ensemble M inclus dans T et tel que :

(déf.1) 1°) certains éléments $a_1,\ldots,a_n$ de T, appartiennent à M.

2°) si $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}$ appartiennent à M, alors $f_i(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}})$ appartient à M pour tout $i \in \{1,2,\ldots,s\}$.

3°) chaque élément de M s'obtient en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

Nous allons démontrer plusieurs propriétés de ces ensembles M, qui découlent de la façon dont ils ont été définis.
L'ensemble M est le représentant d'une classe d'ensembles récursifs parce que dans les règles 1° et 2°, en particularisant les éléments $a_1,\ldots,a_n$ , respectivement $f_1,\ldots,f_s$ , on obtient des ensembles différents.

Observation 1 : Pour obtenir un élément de M, il faut nécessairement appliquer d'abord la règle 1.

(déf.2) Les éléments de M s'appellent éléments M-récursifs.
(déf.3) On appelle ordre d'un élément a de M le plus petit naturel $p \geq 1$ qui a la propriété que a s'obtient en appliquant p fois les règles 1° ou 2°.
On note $M_p$ l'ensemble qui contient tous les éléments d'ordre p de M. Il est évident que $M_1 = \{a_1,\ldots,a_n\}$.

$$M_2 = \bigcup_{i=1}^{s}\left\{ \bigcup_{\substack{(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \in \\ \in M_1^{n_i}}} f_i(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \right\} \setminus M_1 .$$

On soustrait $M_1$ car il est possible que $f_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_{n_j}}) = a_i$ qui appartient à $M_1$, et donc pas à $M_2$.

On démontre que pour $k \geq 1$ on a :

$$M_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{s} \left\{ \bigcup_{(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \in \Pi_k^{(i)}} f_i(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \right\} \setminus \bigcup_{h=1}^{k} M_h$$

où chaque $\Pi_k^{(i)} = \Big\{ (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \,/\, \alpha_{i_j} \in M_{q_j} \quad j \in \{1,2,\ldots,n_i\}$ ;

$1 \leqslant q_j \leqslant k$ et au moins un élément $\alpha_{i_{j_0}} \in M_k$ , $1 \leqslant j_0 \leqslant n_i \Big\}$ .

Les ensembles $M_p$ , $p \in \mathbb{N}^*$, forment une partition de l'ensemble $M$.

Théorème 1 :
$$M = \bigcup_{p \in N^*} M_p \quad , \text{ où } \quad N^* = \{1,2,3,\ldots\} .$$

Preuve. De la règle 1° il résulte que $M_1 \subseteq M$.

On suppose que cette propriété est vraie pour des valeurs inférieures à p. Il en résulte que $M_p \subseteq M$, parce que $M_p$ est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments de $\bigcup_{i=1}^{p-1} M_i$.

Donc $\bigcup_{p \in N^*} M_p \subseteq M$. Réciproquement , on a l'inclusion en sens contraire en accord avec la règle 3°.

Théorème 2 : L'ensemble $M$ est le plus petit ensemble qui ait les propriétés 1° et 2°.

Preuve : soit $R$ le plus petit ensemble ayant les propriétés 1° et 2°. On va démontrer que cet ensemble est unique. Supposons qu'il existe un autre ensemble $R'$ ayant les propriétés 1° et 2° et qui soit le plus petit. Comme $R$ est le plus petit ensemble ayant ces propriétés, et puisque $R'$ les possède aussi, il en résulte que $R \subseteq R'$ ; de manière analogue, il vient $R' \subseteq R$ : donc $R = R'$.
Il est évident que $M_1 \subseteq R$. On suppose que $M_i \subseteq R$ pour $1 \leqslant i < p$. Alors (règle 3°), et en tenant compte du fait que chaque élément de $M_p$ est obtenu en appliquant la règle 2° à certains éléments de $M_i$ , $1 \leqslant i < p$ , il en résulte que $M_p \subseteq R$. Donc $\bigcup_p M_p \subseteq R$ ($p \in N^*$), càd $M \subseteq R$. Et comme $R$ est unique, $M = R$.

Observation 2. Le théorème 2 remplace la règle 3° de la définition récursive de l'ensemble $M$ par : "$M$ est le plus petit ensemble satisfaisant les propriétés 1° et 2° ".

Théorème 3 : $M$ est l'intersection de tous les ensembles de $T$ qui satisfont aux conditions 1° et 2°.

Preuve : soit $T_{12}$ la famille de tous les ensembles de $T$ satisfaisant les conditions 1° et 2°. Soit $I = \bigcap_{A \in T_{12}} A$ .

I a les propriétés 1° et 2° parce que :
1) Pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $a_i \in I$ , parce que $a_i \in A$ pour tout $A$ de $T_{12}$.

2) Si $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}} \in I$, il en résulte que $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}}$ appartiennent à A quel que soit A de $T_{12}$. Donc, $\forall i \in \{1,2,\dots,s\}$ $f_i(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}}) \in A$ quel que soit A de $T_{12}$, donc $f_i(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}}) \in I$ pour tout i de $\{1,2,\dots,s\}$.

Du théorème 2 il résulte que $M \subseteq I$.

Puisque M remplit les conditions 1° et 2°, il en résulte que $M \in T_{12}$, d'où $I \subseteq M$. Donc $M = I$.

Déf.) Un ensemble $A \subseteq I$ est dit fermé pour l'opération $f_{i_0}$ ssi pour tout $\alpha_{i_0 1},\dots,\alpha_{i_0 n_{i_0}}$ de A, on a : $f_{i_0}(\alpha_{i_0 1},\dots,\alpha_{i_0 n_{i_0}})$ appartient à A.

(Déf.5) Un ensemble $A \subseteq T$ est dit fermé M-récursif ssi :

1) $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A$.

2) A est fermé par rapport aux opérations $f_1,\dots,f_s$.

Avec ces définitions, les théorèmes précédents deviennent :

Théorème 2' : L'ensemble M est le plus petit ensemble fermé M-récursif.

Théorème 3' : M est l'intersection de tous les ensembles fermés M-récursifs.

(Déf.6) Le système d'éléments $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_m \rangle$, $m \geqslant 1$ et $\alpha_i \in T$ pour $i \in \{1,2,\dots,m\}$, constitue une description M-récursive pour l'élément $\alpha$, si $\alpha_m = \alpha$ et que chaque $\alpha_i$ ($i \in \{1,2,\dots,m\}$) satisfait au moins l'une des propriétés :

1) $\alpha_i \in \{a_1,\dots,a_n\}$.

2) $\alpha_i$ s'obtient à partir des éléments qui le précèdent dans le système en appliquant les fonctions $f_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, définies par la propriété 2° de (déf.1).

(Déf.7) Le nombre m de ce système s'appelle la longueur de la description M-récursive pour l'élément $\alpha$.

Observation 3 : Si l'élément $\alpha$ admet une description M-récursive, alors il admet une infinité de telles descriptions.

En effet, si $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_m \rangle$ est une description M-récursive de $\alpha$, alors $\langle \underbrace{a_1,\dots,a_1}_{\text{h fois}}, \alpha_1,\dots,\alpha_m \rangle$ est aussi une description M-récursive pour $\alpha$, h pouvant prendre toute valeur de N.

Théorème 4 : L'ensemble M est confondu avec l'ensemble de tous les éléments de T qui admettent une description M-récursive.

Preuve : soit D l'ensemble de tous les éléments qui admettent une description M-récursive. Nous allons démontrer par récurrence que $M_p \subseteq D$ pour tout p de $N^*$.

Pour $p = 1$ on a : $M_1 = \{a_1,\dots,a_n\}$, et les $a_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

admettent comme description M-récursive : $\langle a_j \rangle$. Ainsi $M_1 \subseteq D$. Supposons que la propriété est vraie pour les valeurs inférieures à p. $M_p$ est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments de $\bigcup_{i=1}^{p-1} M_i$ ; $\alpha \in M_p$ entraîne $\alpha \in f_i(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in_i})$ et $\alpha_{ij} \in M_{h_j}$ pour $h_j < p$ et $1 \leqslant j \leqslant n_i$.
Mais $\alpha_{ij}$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$, admet des descriptions M-récursives d'après l'hypothèse de récurrence, soit $\langle \beta_{j1}, \dots, \beta_{js_j} \rangle$.
Alors $\langle \beta_{11}, \dots, \beta_{1s_1}, \beta_{21}, \dots, \beta_{2s_2}, \dots, \beta_{n_i1}, \dots, \beta_{n_is_{n_i}}, \alpha \rangle$ constitue une description M-récursive pour l'élément $\alpha$.
Donc si $\alpha$ appartient à D, alors $M_p \subseteq D$, càd $M = \bigcup_{p \in N^*} M_p \subseteq D$.

Réciproquement, soit x appartenant à D. Il admet une description M-récursive $\langle b_1, \dots, b_t \rangle$ avec $b_t = x$. Il en résulte par récurrence sur la longueur de la description M-récursive de l'élément x, que $x \in M$. Pour t = 1, on a $\langle b_1 \rangle$, $b_1 = x$, et $b_1 \in \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$. On suppose que tous les éléments y de D qui admettent une description M-récursive de longueur inférieure à t appartiennent à M. Soit $x \in D$, décrit par un système de longueur t : $\langle b_1, \dots, b_t \rangle$, $b_t = x$. Alors $x \in \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$, ou bien x est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments qui le précèdent dans le système : $b_1, \dots, b_{t-1}$. Mais ces éléments admettent des descriptions M-récursives de longueurs inférieures à t : $\langle b_1 \rangle$, $\langle b_1, b_2 \rangle$, ..., $\langle b_1, \dots, b_{t-1} \rangle$. D'après l'hypothèse de récurrence, $b_1, \dots, b_{t-1}$ appartiennent à M.
Donc $b_t$ appartient aussi à M. Il en résulte que $M \equiv D$.

Théorème 5 : Soient $b_1, \dots, b_q$ des éléments de T qui s'obtiennent à partir des éléments $a_1, \dots, a_n$ en appliquant un nombre fini de fois les opérations $f_1, f_2, \dots$, ou $f_s$. Alors M peut être défini récursivement de la façon suivante :

1) Certains éléments $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_q$ de T appartiennent à M.
2) M est fermé pour les applications $f_i$, avec $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.
3) Chaque élément de M est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles (1) ou (2) qui précèdent.

Preuve : évidente. Comme $b_1, \dots, b_q$ appartiennent à T, et s'obtiennent à partir des éléments $a_1, \dots, a_n$ de M en appliquant un nombre fini de fois les opérations $f_i$, il en résulte que $b_1, \dots, b_q$ appartiennent à M.

<u>Théorème 6</u> : Soient $g_j$ , $1 \leqslant j \leqslant r$ , des opérations $n_j$-aires , càd $g_j : T^{n_j} \longrightarrow T$ , telles que M soit fermé par rapport à ces opérations. Alors M peut être défini récursivement de la façon suivante :

1) Certains éléments $a_1,\dots,a_n$ de T appartiennent à M.
2) M est fermé pour les opérations $f_i$ , $i \in \{1,2,\dots,s\}$ et $g_j$ , $j \in \{1,2,\dots,r\}$.
3) Chaque élément de M est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles précédentes.

Preuve facile : comme M est fermé pour les opérations $g_j$ (avec $j \in \{1,2,\dots,r\}$ ), on a , quels que soient $\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jn_j}$ de M , $g_j(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jn_j}) \in M$ pour tout $j \in \{1,2,\dots,r\}$.

Les théorèmes 5 et 6 entraînent :

<u>Théorème 7</u> : L'ensemble M peut être défini récursivement de la façon suivante :

1) Certains éléments $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_q$ de T appartiennent à M.
2) M est fermé pour les opérations $f_i$ ($i \in \{1,2,\dots,s\}$ ) et pour les opérations $g_j$ ($j \in \{1,2,\dots,r\}$) définies précédemment.
3) Chaque élément de M est défini en appliquant un nombre fini de fois les 2 règles précédentes.

Déf.8) L'opération $f_i$ conserve la propriété P ssi quels que soient les éléments $\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in_i}$ ayant la propriété P, $f_i(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in_i})$ a la propriété P.

<u>Théorème 8</u> : Si $a_1,\dots,a_n$ ont la propriété P, et si les fonctions $f_1,\dots,f_s$ conservent cette propriété, alors tous les éléments de M ont la propriété P.

Preuve : $M = \bigcup_{p \in N^*} M_p$ . Les éléments de $M_1$ ont la propriété P.
Supposons que les éléments de $M_i$ pour $i < p$ ont la propriété P.
Alors les éléments de $M_p$ l'ont aussi parce que $M_p$ s'obtient en appliquant les opérations $f_1,\dots,f_s$ aux éléments de :
$\bigcup_{i=1}^{p-1} M_i$ , éléments qui ont la propriété P. Donc, quel que qoit p de N , les éléments de $M_p$ ont la propriété P .
Donc tous les éléments de M l'ont.

<u>Conséquence 1</u> : Soit la propriété P : "x peut être représenté sous la forme F(x) ".
Si $a_1,\dots,a_n$ peuvent être représentés sous la forme $F(a_1),\dots,$ respectivement $F(a_n)$ , et si $f_1,\dots,f_s$ conservent la propriété P, alors tout élément $\alpha$ de M peut être représenté sous la forme $F(\alpha)$.

Rem : on peut trouver encore d'autres déf. équivalentes de M.

## 2 - APPLICATIONS , EXEMPLES .

Dans les applications, certaines notions générales comme : élément M-récursif, description M-récursive, ensemble fermé M-récursif seront remplacés par les attributs caractérisant l'ensemble M. Par exemple dans la théorie des fonctions récursives, on trouve des notions comme : fonctions primitives récursives, description primitive récursive, ensemble fermé primitivement récursif. Dans ce cas "M" a été remplacé par l'attribut "primitif" qui caractérise cette classe de fonctions, mais il peut être remplacé par les attributs "général", "partiel".

En particularisant les règles 1° et 2° de la déf.1 , on obtient plusieurs ensembles intéressants :

<u>Exemple 1</u> : (voir [2] , pages 120-122, problème 7.97).

<u>Exemple 2</u> : L'ensemble des termes d'une suite définie par une relation de récurrence constitue un ensemble récursif.
Soit la suite : $a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$ , pour tout n de $N^*$ , avec $a_i = a_i^\circ$ , $1 \leqslant i \leqslant k$ . On va construire récursivement l'ensemble $A = \{a_m\}_{m \in N^*}$ et on va définir en même temps la position d'un élément dans l'ensemble A :

1°) $a_1^\circ, \ldots, a_k^\circ$ appartiennent à A, et chaque $a_i^\circ$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ occupe la position i dans l'ensemble A ;

2°) si $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}$ appartiennent à A , et chaque $a_j$ , pour $n \leqslant j \leqslant n+k-1$ , occupe la position j dans l'ensemble A , alors $f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$ appartient à A et occupe la position n+k dans l'ensemble A.

3°) chaque élément de B s'obtient en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° **ou** 2°.

<u>Exemple 3</u> : Soit $G = \{e, a^1, a^2, \ldots, a^p\}$ un groupe cyclique engendré par l'élément a. Alors (G, .) peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) a appartient à G.

2°) si b et c appartiennent à G alors b.c appartiennent à G.

3°) chaque élément de G est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1 ou 2.

<u>Exemple 4</u> : Chaque ensemble fini $ML = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ peut être défini récursivement (avec $ML \subseteq T$) :

1°) Les éléments $x_1, \ldots, x_n$ de T appartiennent à ML.

2°) Si a appartient à ML , alors f(a) appartient à ML, où $f: T \longrightarrow T$ telle que $f(x) = x$ ;

3°) Chaque élément de ML est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

<u>Exemple 5</u> : Soit L un espace vectoriel sur le corps commutatif K et $\{x_1, \ldots, x_m\}$ une base de L. Alors L peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) $x_1, \ldots, x_m$ appartiennent à L ;

2°) si x, y appartiennent à L et si a appartient à K, alors $x \perp y$ appartient à L et $a \ast x$ appartient à L.

3°) chaque élément de L est obtenu récursivement en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

(Les lois $\perp$ et $\ast$ sont respectivement les lois interne et externe de l'espace vectoriel L).

Exemple 6 : Soient X un A-module, et $M \subset X$ ($M \neq \emptyset$), avec $M = \{x_i\}_{i \in I}$. Le sous-module engendré par M est :

$$\langle M \rangle = \{x \in X \,/\, x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \,,\ a_i \in A,\ x_i \in M,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \in \langle M \rangle$ ;

2°) si x et y appartiennent à $\langle M \rangle$ et a appartient à A, alors $x + y$ appartient à $\langle M \rangle$, et ax aussi ;

3°) chaque élément de $\langle M \rangle$ est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

En accord avec le paragraphe 1 de cet article, $\langle M \rangle$ est le plus petit sous-ensemble de X vérifiant les conditions 1° et 2°, c'est-à-dire que $\langle M \rangle$ est le plus petit sous-module de X incluant M. $\langle M \rangle$ est aussi l'intersection de tous les sous-ensemebles de X vérifiant les conditions 1° et 2°, c'est-à-dire que $\langle M \rangle$ est l'intersection de tous les sous-modules de X qui contiennent M. On retrouve ainsi directement quelques résultats classiques d'algèbre.
On peut aussi parler de sous-groupes ou d'idéal engendré par un ensemble : on obtient ainsi quelques applications importantes en algèbre.

Exemple 7 : On obtient aussi comme application la théorie des langages formels, parce que, comme on le sait, chaque langage régulier (linéaire à droite) est un ensemble régulier et réciproquement. Mais un ensemble régulier sur un alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ appartiennent à R.

2°) si P et Q appartiennent à R, alors $P \cup Q$, PQ, et $P^*$ app. à R, avec $P \cup Q = \{x / x \in P \text{ ou } x \in Q\}$ ; $PQ = \{xy / x \in P \text{ et } y \in Q\}$, et

$$P^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} P^n \quad \text{avec } P^n = \underbrace{P.P\ldots P}_{n \text{ fois}} \quad \text{et, par convention, } P^0 = \{\varepsilon\}.$$

3°) Rien d'autre n'appartient à R que ce qui est obtenu à l'aide de 1° ou de 2°.

D'où plusieurs propriétés de cette classe de langages avec applications aux langages de programmation.

## Bibliographie:


[1] C.P.Popovici, L.Livovschi, H.Georgescu, N.Ţăndăreanu - "Curs de bazele informaticii (funcţii booleene şi circuite combinaţionale)", Tipografia Universitaţii din Bucarest, 1976.

[2] F.Smarandache - "Problèmes avec et sans... problèmes !" - Somipress, Fès (Maroc), 1983.