FLORENTIN SMARANDACHE

Une généralisation de l’inegalité Cauchy-Bouniakovski-Schwartz

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE CAUCHY-BOUNIAKOVSKI-SCHWARTZ

Enoncé : Soient les réels $a_i^{(k)}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $k\in\{1,2,\dots,m\}$, avec $m \geq 2$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^2 \leq \prod_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(k)}\right)^2 .$$

Démonstration. On note A le membre de gauche de l'inégalité et B le membre de droite. On a :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m)}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n}\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m)}\right)\left(a_k^{(1)}\dots a_k^{(m)}\right)$$

$$\text{et } B = \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in E}\left(a_{i_1}^{(1)}\dots a_{i_m}^{(m)}\right)^2 ,$$

où $E = \{(i_1,\dots,i_m) \,/\, i_k\in\{1,2,\dots,n\},\ 1\leq k\leq m\}$. D'où :

$$B = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n}\left[\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m-1)}a_k^{(m)}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(a_k^{(1)}\dots a_k^{(m-1)}a_i^{(m)}\right)^2\right] + \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in E-(\Delta_E\cup L^m)}\left(a_{i_1}^{(1)}\dots a_{i_m}^{(m)}\right)^2 ,$$

avec $\Delta_E = \{\underbrace{(\gamma,\dots,\gamma)}_{m \text{ fois}}/\gamma\in\{1,2,\dots,n\}\}$

et $L = \{(\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{m-1},\beta),(\underbrace{\beta,\dots,\beta}_{m-1},\alpha) / (\alpha,\beta)\in\{1,2,\dots,n\}^2 \text{ et } \alpha<\beta\}$.

$$\text{Alors } A-B = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n}\left[-\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m-1)}a_k^{(m)} - a_k^{(1)}\dots a_k^{(m-1)}a_i^{(m)}\right)^2\right]$$

$$- \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in E-(\Delta_E\cup L)}\left(a_{i_1}^{(1)}\dots a_{i_m}^{(m)}\right)^2 \leq 0 .$$

Remarque ; pour m=2 on obtient l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwartz.