La logique des nombres premiers

« The logic of the prime numbers »

Par Mohamed Ouiter

ouiter_med@hotmail.com

27 juin 2016

Résumé

Partant de la définition qu'un nombre n'est premier que s'il n'admet que deux diviseurs et que tout nombre non premier peut s'ecrire comme produit de facteurs premiers, j'ai pu dégager une loi simple qui régit la distribution des nombres premiers.

Abstract

From the definition that a number is Prime if he admits that two dividers and any number not prime can it write as a product of prime factors, I was able to identify a simple law that governs the distribution of prime numbers.

Préliminaire

On s'est depuis l'antiquité intéressé aux nombres dits « ***premiers*** », à essayer de dégager une logique quant à leur distribution laquelle à première vue ne semble obéir à aucune des lois mathématiques connues. Ces fameux nombres ont fait dés lors l'objet de plusieurs conjectures dont la plus célèbre ; l'hypothèse de Riemann.

Le présent article n'est nullement une tentative de démonstration de l'une de ces conjectures[1]. Il ne fait d'ailleurs référence à aucune étude antérieure et ne s'articule que sur les principes de l'arithmétique élémentaire. Le but étant de cerner ces fameux nombres de manière à pouvoir dégager une loi très simple qui permet de résoudre, je le pense, cette problématique.

Ma démarche étant de partir de la définition classique des nombres premiers pour suivre ensuite un enchainement logique d'assertions, que je pense et j'espère ne contient aucune erreur, jusqu'à aboutir à une loi simple sur la distribution de ces nombres.
Les moyens mis à ma portée m'ont permit d'effectuer des tests sur des nombres relativement petits (de l'ordre des milliers) qui se sont avérés tous concluants.

Définition

(A) Selon la définition classique : ***un entier naturel non nul est dit « premier » s'il n'admet que deux diviseurs entiers naturels distincts, en l'occurrence le nombre 1 et l'entier lui-même***[2].

Selon cette définition, le nombre 1, et comme il n'admet qu'un seul diviseur distinct, n'est pas considéré comme premier.

Par opposition, un entier naturel non nul est dit non premier ou « *composé* » s'il admet plus de deux diviseurs entiers naturels distincts. Il peut alors s'écrire comme produit de ses diviseurs.

Exemple :

Le nombre 7 est premier car il n'admet d'autres diviseurs que 1 et 7.
Le nombre 12 est composé car il admet plus de deux diviseurs distincts : 1, 2, 3, 4, 6.
Le nombre 12 peut alors se mettre sous la forme de produit de ses diviseurs selon une ou plusieurs formes telles :

$$12 = 2 \times 6 \qquad (2)$$

[1] Le théorème sur les nombres premiers en fin de cet article permettra, je le pense, de résoudre certaines de ces conjectures notamment celle dite « *des quatre problèmes de Landau* »
[2] Source : Wikipédia

Ou encore

$$12= 3 \times 4$$

De même que le nombre 6 de la relation (2) est composé et peut se mettre à son tour sous la forme :

$$6 = 2 \times 3$$

Ce qui permet alors de réduire encore plus la relation (2) qui dans ce cas va s'écrire :

$$12= 2 \times 2 \times 3 \qquad (3)$$

Les facteurs de la relation (3) sont alors premiers ce qui les rend irréductibles. D'où la définition :

(B) ***Que tout nombre entier naturel non nul est soit premier soit produit de facteurs premiers***[3].

Développement

Selon la définition (A) et à l'exception du nombre 2, les nombres premiers ne peuvent en aucun cas être pairs sinon ils admettraient au moins un autre diviseur autre que les deux mentionnés dans (A) qui est alors dans ce cas le nombre 2.
Donc à l'exception du nombre 2, l'ensemble des nombres premiers est à rechercher dans le sous ensemble des nombres entiers naturels impairs :

$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,\dots\}$$

C'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme :

$$n = 2k+1 \quad (k\geq 0) \qquad (4)$$

Soit maintenant à considérer le sous ensemble de I des nombres impairs supérieurs au nombre 3. Cet ensemble qu'on nommera I_p aura la forme :

$$I_p = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,\dots\}$$

[3] Même source.

Où chaque élément aura la forme :

$$n = 2k+1 \qquad (k>1) \qquad\qquad (5)$$

Or cet ensemble contient encore des éléments composés qu'on va essayer de déduire. A commencer par l'ensemble M_3 des multiples impairs de 3 :

$$M_3 = \{9, 15, 21, 27, 33,\ldots\}$$

Ces éléments peuvent se mettre sous la forme :

$$m=3q \quad (q>1) \qquad\qquad (6)$$

Et comme ces multiples ne peuvent être qu'impairs « q » ne peut être qu'impair (« m » produit de deux nombres impairs « 3 » et « q ») et la relation (6) s'écrira alors sous la forme :

$$m = 3(2v+1)$$

$$\text{avec} \qquad q=2v+1 \qquad \text{où} \quad (v\geq 1)$$

ou encore :

$$m= 6v+3 \qquad\qquad (7)$$

Donc de l'ensemble I_p des nombres impairs supérieurs à 3 on écarte l'ensemble M_3 des multiples impairs de 3 (qui sont composés donc non premiers) en posant la condition que les éléments retenus ne doivent pas vérifier la relation (7) c'est-à-dire que pour tout n élément de I_p :

$$n=2k+1 \qquad \text{doit être différent de} \qquad 6v+3$$

Ce qui n'est vérifié que si :

$$k \neq 3v+1$$

Autrement dit, et comme k étant entier, il ne peut donc être que de la forme :

$$3v+2$$

ou

$3v+3$ qui par substitution (v par $v+1$) devient $3v$.

Donc le nombre *n* de la relation (5) qui est sous la forme *2k+1*, ne peut prendre que les formes :

$$n_1 = 2(3k+2)+1 = 6k+5$$

que l'on peut encore par substitution (*k* par *k-1*) écrire :

$$n_1=6k-1 \qquad (k\geq 1)$$

et

$$n_2=2(3k)+1 = 6k+1 \qquad (k\geq 1)$$

L'ensemble ainsi obtenu que l'on nommera π est qui devrait alors contenir l'ensemble des nombres premiers à l'exception du 2 et 3 est l'ensemble des entiers naturels de la forme[4] :

$$6n\pm 1$$

où *n* est un entier naturel non nul.

$$\pi = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, \ldots\}$$

D'où mon premier lemme :

« Tout nombre premier supérieur à 3 ne peut être que de la forme :

$$\boldsymbol{6n\pm 1} \qquad \textbf{où} \quad \boldsymbol{n>0} \qquad \text{»}$$

D'autre part, et comme le produit de deux nombres de la forme $\boldsymbol{6n\pm 1}$ est un nombre de cette même forme[5], cet ensemble π qui devrait contenir tous les nombres premiers contient encore un sous ensemble d'éléments composés tels par exemple certains multiples de 5 non encore éliminés lors de la précédente étape, les puissances de 7, de 11, de 13 …etc.
Ces éléments composés $\boldsymbol{E_c}$ ne peuvent être, par définition (B), que produits de facteurs de nombres premiers, c'est-à-dire de nombre appartenant à π ou encore de la forme $\boldsymbol{6n\pm 1}$:

$$\boldsymbol{E_c} = \prod ki \qquad avec \quad k_i=6n_i \pm 1$$

---

[4] On notera que cet ensemble π n'est autre que l'ensemble des entiers naturels où l'on a extrait les deux premiers nombres premiers « 2 » et « 3 » et leurs multiples respectifs.

[5] Il suffit de multiplier deux nombres de la forme ($\boldsymbol{6n\pm 1}$) pour voir que le résultat est aussi de cette forme. Voir plus bas la preuve.

De manière plus explicite $\boldsymbol{E_c}$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{E_c} = k_1.k_2.k_3.....k_i$$

Ou encore :

$$\boldsymbol{E_c} = (6n_1\pm1).\ (6n_2\pm1)......\ (6n_i\pm1).$$

Or quelque soit le nombre de facteurs k_i de $\boldsymbol{E_c}$, on peut ramener ce dernier à un produit d'uniquement 2 facteurs de la forme :

$$\boldsymbol{E_c} = (6n_i\pm1).\ (6n_j\pm1)$$

Preuve :

$$\boldsymbol{E_c} = (6n_1\pm1).\ (6n_2\pm1)......\ (6n_i\pm1).$$

En développant les deux premiers facteurs, on obtient :

$$\boldsymbol{E_c} = (36n_1n_2\pm6n_1\pm6n_2\pm1)....(6n_i\pm1)$$

Ou encore :

$$\boldsymbol{E_c} = (6\underbrace{(6n_1n_2\pm n_1\pm n_2)}_{n_j}\pm1)....\ (6n_i\pm1)$$

Qui n'est autre que la forme :

$$\boldsymbol{E_c} = (6n_j\pm1)....\ (6n_i\pm1)$$

Avec :

$$n_j = 6n_1n_2\pm n_1\pm n_2$$

et où $\boldsymbol{E_c}$ est réduit d'un facteur.

Ce qui me mène à mon second lemme :

« L'ensemble des nombres premiers supérieur à 3 serait égal à l'ensemble π des nombres de la forme ($6n\pm1$) lequel on lui soustrait l'ensemble des éléments composés E_c exprimables sous la forme du produit :

$$E_c = (6k_i \pm 1)(6k_j \pm 1) \quad »$$

Ce produit que l'on peut décomposer comme suit :

- $36k_ik_j+6k_i+6k_j+1 = 6(\underbrace{6k_ik_j+k_i+k_j})+1 = \mathbf{6n_1+1}$

  où $\mathbf{n_1=6k_ik_j+k_i+k_j}$

- $36k_ik_j-6k_i+6k_j-1 = 6(\underbrace{6k_ik_j-k_i+k_j})-1 = \mathbf{6n_2-1}$

  où $\mathbf{n_2=6k_ik_j-k_i+k_j}$

- $36k_ik_j+6k_i-6k_j-1 = 6(\underbrace{6k_ik_j+k_i-k_j})-1 = \mathbf{6n_3-1}$

  où $\mathbf{n_3=6k_ik_j+k_i-k_j}$

- $36k_ik_j-6k_i-6k_j+1 = 6(\underbrace{6k_ik_j-k_i-k_j})+1 = \mathbf{6n_4+1}$

  où $\mathbf{n_4=6k_ik_j-k_i-k_j}$

et où k_i et k_j non nuls

Autrement dit : pour tout élément $\mathbf{p=6n\pm1}$ de π, ***p*** n'est premier que si ***n*** est différent des quatres formes sus-mentionnées : n_1, n_2, n_3, n_4.

D'où le ***Théorème*** :

« Un entier naturel supérieur à 3 est premier s'il est de la forme :

$$\mathbf{6n+1} \quad \text{où} \quad n \neq 6k_ik_j + k_i + k_j \quad \text{et} \quad n \neq 6k_ik_j - k_i - k_j$$

Ou bien

$$\mathbf{6n-1} \quad \text{où} \quad n \neq 6k_ik_j - k_i + k_j \quad \text{et} \quad n \neq 6k_ik_j + k_i - k_j$$

Pour tous k_i, k_j non nuls. »

Fin