Continued Radicals

the numbers $\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\cdots}}}$, $m \in \{1,2,3,\dots\}$

Abstract. We give some formulas related with continued radicals

Resumen. Se muestran algunas relaciones que involucran a los números:

$$x_m = \sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\cdots}}} \quad , \qquad m \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$$

Introducción

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $x_m = \sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\cdots}}}$, en esta nota se muestran algunos resultados que involucran a los números x_m . Para $m \in \mathbb{N}$, el número x_m es un cero de la función:

$$f_m(x) = x^{m+1} - x - 1$$

Por ejemplo, para $m = 1$:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

La recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1+y_n-y_n^2}{y_n} \; , y_1 = 1$$

Produce la sucesión

$$\{y_n\} = \left\{1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\dots\right\}, \lim_{n\to\infty} y_n = x_1$$

Y la serie

$$x_1 = y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1} - y_n = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} + \frac{1}{40} - \frac{1}{104} + \cdots$$

La recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1+y_n-y_n^2}{1+y_n} \; , y_1 = 1$$

Produce la sucesión

$$\{y_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{21}{13}, \frac{55}{34}, \frac{144}{89}, \frac{377}{233}, \dots\right\}, \lim_{n\to\infty} y_n = x_1$$

Y la serie

$$x_1 = y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1} - y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{65} + \frac{1}{442} + \frac{1}{3026} + \cdots$$

Para $m = 2$, se tiene

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \cdots}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots}}}}}$$

$$x_2 = Re\left((1-i)\sqrt[3]{2 - 2i + 2i\sqrt[3]{2 - 2i + 2i\sqrt[3]{2 - 2i + \cdots}}}\right)$$

Para $m = 3$, se tiene

$$x_3 = \sqrt[4]{1 + \sqrt[4]{1 + \sqrt[4]{1 + \cdots}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}}}}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u} + \sqrt{2\sqrt{4 + u^2} - u}\right), u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{283}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{283}{3}}}$$

Una recurrencia de convergencia rápida para x_3 es

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^4 - y_n - 1}{4y_n^3 - 1} - \frac{6y_n^2}{4y_n^3 - 1}\left(\frac{y_n^4 - y_n - 1}{4y_n^3 - 1}\right)^2, y_1 = 1$$

$$x_3 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Para $m = 4$, se tiene

$$x_4 = \lim_{n\to\infty}\left(p_n 8^{-(5^{n-1}-1)/4}\right)$$

donde

$$p_{n+1} = -p_n^5 + 9\, p_n 8^{5^{n-1}-1} + 8^{(5^n-5)/4}\ , p_1 = 1$$

A continuación se muestran algunos resultados que involucran los números x_m , $m \in \mathbb{N}$.

1. Fórmulas

1.1. Para $m \in \mathbb{N}$, sea $a_n = a_n(m), n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por:

$$a_{n+m+1} = a_{n+1} + a_n \ \ , a_1 = a_2 = \cdots = a_{m+1} = 1$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\cdots}}}$$

Ejemplo 1: $m = 1$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ , a_1 = a_2 = 1$$

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1,1,2,3,5,8,13, \ldots\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = x_1 = \sqrt[2]{1+\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{1+\cdots}}}$$

Ejemplo 2: $m = 2$

$$a_{n+3} = a_{n+1} + a_n \ , a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1,1,1,2,2,3,4,5,7,9, \ldots\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = x_2 = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}$$

Ejemplo 3: $m = 3$

$$a_{n+4} = a_{n+1} + a_n \ , a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$$

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1,1,1,1,2,2,2,3,4,4,5,7,8,9, \ldots\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x_3 = \sqrt[4]{1+\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{1+\cdots}}}$$

1.2. Para $m \in \mathbb{N}$, sea $y_n = y_n(m), n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por:

$$y_{n+1} = \frac{m\, y_n^{m+1} + 1}{(m+1)\, y_n^m - 1} \ , y_1 = 1$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_m = \sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\cdots}}}$$

Ejemplo 4 : $m = 1$

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 1}{2y_n - 1} \ , y_1 = 1$$

$$\{y_n : n \in N\} = \{1, 2, \frac{5}{3}, \frac{34}{21}, \frac{1597}{987}, \frac{3524578}{2178309}, \dots\}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_1$$

1.3. Para $m \in \mathbb{N}$, sea $z_n = z_n(m), n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por:

$$z_{n+1} = \sqrt[m+1]{1+z_n} \ , \qquad z_1 = 1$$

entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[m+1]{z_n^{-m-1} + z_n^{-m}} = x_{m-1} = \sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\cdots}}}$$

Ejemplo 5: $m = 2$

$$x_2 = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{z_n^{-3} + z_n^{-2}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^{-1} + 2^{-2/3}} \cdot \sqrt[3]{(1+2^{1/3})^{-1} + (1+2^{1/3})^{-2/3}} \dots.$$

1.4. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$1 < x_{m+1} < x_m$$

$$\lim_{m\to\infty} x_m = 1$$

$$x_m \sim \frac{(2m+1)2^{1/(m+1)}}{2(m+1)-2^{1/(m+1)}}$$

$$x_m \sim 1 + \frac{2(m+1)}{m2^{1/(m+1)}}\Big(2^{1/(m+1)} - 2(m+1) + \sqrt{(2m+2-2^{1/(m+1)})^2 + 2m2^{1/(m+1)}(2^{1/(m+1)}-1)}\Big)$$

1.5. Para $m \in \mathbb{N}$, sea α_m , una aproximación inicial de x_m , y sea β_m definido por:

$$\beta_m = (1+\alpha_m)^{1/(m+1)} \frac{(m+1)(1+\alpha_m)-\alpha_m}{(m+1)(1+\alpha_m)-(1+\alpha_m)^{1/(m+1)}}$$

entonces

$$|x_m - \beta_m| < |x_m - \alpha_m|$$

1.6. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$x_m^k = a_{0,k} + a_{1,k}\, x_m + a_{2,k}\, x_m^2 + \cdots + a_{m,k}\, x_m^m$$

donde

$$\begin{gathered} a_{0,0} = 1 \,, a_{1,0} = a_{2,0} = \cdots = a_{m,0} = 0 \\ a_{0,k+1} = a_{m,k} \\ a_{1,k+1} = a_{0,k} + a_{m,k} \\ a_{2,k+1} = a_{1,k} \\ a_{3,k+1} = a_{2,k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,k+1} = a_{m-1,k} \end{gathered}$$

1.7. Sea $m, n \in \mathbb{N}$, sea $z_n = z_n(m)$ la sucesión definida en (1.3) , entonces:

$$\begin{gathered} 1 < z_n(m) < z_{n+1}(m) < x_m \\ 0 < x_m - z_{n+1}(m) < x_m - z_n(m) \\ \lim_{n\to\infty} z_n\,(m) = x_m \end{gathered}$$

1.8. Sea $m, n \in \mathbb{N}$, sea $z_n = z_n(m)$ la sucesión definida en (1.3) , entonces:

$$0 < x_m - z_n(m) \leq \left(\frac{2^{-m/(m+1)}}{m+1}\right)^{n-1} (x_m - 1)$$

Ejemplo 6: $m = 2$

$$z_1(2) = 1, z_2(2) = \sqrt[3]{2}, z_3(2) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}}\ , z_4(2) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}}}\ , \dots$$

$$x_2 = 1.324717\ \dots\ \Rightarrow 0 < x_2 - 1 < \frac{13}{40}$$

$$0 < x_2 - z_n(2) \leq \frac{13}{40}\left(\frac{2^{-2/3}}{3}\right)^{n-1} \quad , n \in \mathbb{N}$$

1.9. Sea $m \in \mathbb{N}$, y $z_n = z_n(m)$ la sucesión definida en (1.3) , entonces:

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\sqrt[m+1]{1+\cdots}}}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{z_{k+1}(m) - z_k(m)}{1 + z_k(m)\, z_{k+1}(m)}\right)$$

Ejemplo 7: $m = 1$

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{1+\cdots}}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt[2]{2}-1}{1+\sqrt[2]{2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{2}} - \sqrt[2]{2}}{1+\sqrt[2]{2}\ \sqrt[2]{1+\sqrt[2]{2}}}\right) - \dots$$

1.10. Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\pi = \frac{1}{2i}\oint \frac{z^{m+1} - z}{z - x_m}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\left(1+e^{i\theta}\right)^{m+1} - \left(1+e^{i\theta}\right)}{1 + e^{i\theta} - x_m}\, e^{i\theta}\, d\theta$$

Donde la integral de línea se cálcula sobre la curva C: $z = 1 + e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

1.11. Sea $m \in \mathbb{N}$, y $w_n = w_n(m)$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por:

$$w_n = \sqrt[m]{1 + \frac{1}{w_n}} \quad , w_1 = 1$$

entonces

$$w_{2n-1} < x_m < w_{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = x_m$$

1.12. Sean $m, p, q \in \mathbb{N}$, tales que $x_m < \frac{1}{q}\sqrt[m]{2\,p^m - \frac{q^m}{m+1}}$, sea $y_n = y_n(m)$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por:

$$y_{n+1} = \frac{q^{m+1} + p\, q^m + (m+1)\, p^m\, y_n - (p + q\, y_n)^{m+1}}{(m+1)\, p^m\, q - q^{m+1}} \quad , y_1 = 0$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_m - \frac{p}{q}$$

Observación. Los números $p, q \in \mathbb{N}$, se eligen de manera que $\frac{p}{q} \sim x_m$.

Ejemplo 8: $m = 1$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

Con $p = 8, q = 5$, se tiene:

$$y_{n+1} = \frac{65 + 80\, y_n - (8 + 5\, y_n)^2}{55} \quad , y_1 = 0$$

$$\{y_n\} = \{0, 0.0181818\ldots, 0.0180315\ldots, 0.0180340\ldots, 0.0180339\ldots, 0.0180339\ldots, \ldots\}$$

$$x_1 = \frac{8}{5} + \lim_{n\to\infty} y_n$$

1.13. Series para x_m , $m \in \mathbb{N}$

Inversión de Series:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, y^n \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, u^n$$

donde

$$a_1 = 1/c_1$$
$$a_2 = -\, c_2/c_1^3$$
$$a_3 = (2c_2^2 - c_1 c_3)/c_1^5$$
$$a_4 = (5c_1 c_2 c_3 - 5c_2^3 - c_1^2 c_4)/c_1^7$$
$$a_5 = (6c_1^2 c_2 c_4 + 3c_1^2 c_3^2 - c_1^3 c_5 + 14c_2^4 - 21c_1 c_2^2 c_3)/c_1^9$$

………………………………………………..

Sea $m \in \mathbb{N}$, sean $p, q \in \mathbb{N}$, tales que $\frac{p}{q} \sim x_m$, poniendo $x_m = \frac{p}{q} + y_m$, en la ecuación $x_m^{m+1} - x - 1 = 0$, se obtiene la siguiente ecuación en y_m :

$$q^m (p + q) - p^{m+1} = \left((m+1)\, p^m\, q - q^{m+1}\right) y_m + \sum_{k=2}^{m+1} \binom{m+1}{k} p^{m+1-k}\, q^k\, y_m^k$$

poniendo

$$u = q^m \, (p+q) - p^{m+1}$$
$$c_1 = (m+1) \, p^m \, q - q^{m+1}$$
$$c_n = \binom{m+1}{n} p^{m+1-n} \, q^n \quad , n = 2 \ldots m+1$$
$$c_n = 0 \, , n \geq m+2$$

Y aplicando el proceso de inversión de series se obtiene una serie para y_m , y por lo tanto una serie para x_m :

$$x_m = \frac{p}{q} + y_m = \frac{p}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, u^n$$

Ejemplo 9: $m = 1$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

$$p = 8, \qquad q = 5, \qquad \frac{p}{q} \sim x_1$$

la ecuación en y_1 es:

$$55 \, y_1 + 25 \, y_1^2 = 1$$

$$u = 1, c_1 = 55, c_2 = 25, c_n = 0, n \geq 3$$

$$x_1 = \frac{8}{5} + \frac{1}{55} - \frac{25}{55^3} + \frac{2 \cdot 25^2}{55^5} - \frac{5 \cdot 25^3}{55^7} + \frac{14 \cdot 25^4}{55^9} + \cdots$$

1.14. Series alternativas para x_m , $m \in \mathbb{N}$

$$x_m^{m+1} - x_m - 1 = 0 \Rightarrow 1 = x_m^{-m} + x_m^{-m-1}$$

Poniendo $x_m = 1 + y_m$, se tiene

$$1 = (1+y_m)^{-m} + (1+y_m)^{-m-1}$$

Desarrollando en series se tiene

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\binom{m+n-1}{n} + \binom{m+n}{n} \right) y_m^n$$

Aplicando el proceso de inversión de series , con

$$u = 1, c_n = (-1)^{n-1} \left(\binom{m+n-1}{n} + \binom{m+n}{n} \right), n \in \mathbb{N}$$

Se obtienen series para x_m , de la forma

$$x_m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo 10: $m = 1, m = 2, m = 3$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{17}{3^5} + \frac{74}{3^7} + \cdots$$
$$x_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{9}{5^3} + \frac{92}{5^5} + \frac{995}{5^7} + \cdots$$
$$x_3 = 1 + \frac{1}{7} + \frac{16}{7^3} + \frac{302}{7^5} + \frac{6130}{7^7} + \cdots$$

1.15. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sqrt[m+1]{2} < x_m < \sqrt[m]{2}$$

1.16. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, 2^n} \left(2^n (m+1) - 1\right) (x_m - 1)^n$$

1.17. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \frac{1}{k!}\, x_m^{-(m\,k+n)}$$

1.18. Para $m \in \mathbb{N}$, sea $y_n = y_n(m)$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por:

$$y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{1 + y_n + y_n^2 + \cdots + y_n^m}\ , y_1 = 1$$
$$y_{n+1} = 1 + \frac{y_n (y_n - 1)}{y_n^{m+1} - 1}\ , y_1 = 1, y_2 = 1 + \frac{1}{m+1}$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} y_n = x_m$$

1.19. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$2\,\pi\, x_m = \int_0^{2\pi} \frac{(m+1)\left(\frac{3}{2} + e^{i\,x}\right)^{m+1} - \left(\frac{3}{2} + e^{i\,x}\right)}{\left(\frac{3}{2} + e^{i\,x}\right)^{m+1} - \left(\frac{3}{2} + e^{i\,x}\right) - 1}\, e^{i\,x}\, dx$$

1.20. Para $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$x_m^{-k} = a_{0,k} + a_{1,k} x_m^{-1} + a_{2,k} x_m^{-2} + \cdots + a_{m,k} x_m^{-m}$$

donde

$$a_{0,0} = 1, a_{1,0} = a_{2,0} = \cdots = a_{m,0} = 0$$
$$a_{0,k+1} = a_{m,k}$$
$$a_{1,k+1} = a_{0,k}$$
$$a_{2,k+1} = a_{1,k}$$
$$a_{3,k+1} = a_{2,k}$$

……………………..

$$a_{m,k+1} = a_{m-1,k} - a_{m,k}$$

1.21. Para $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$x_m^{-k} = a_{0,k} + a_{1,k} x_m + a_{2,k} x_m^2 + \cdots + a_{m,k} x_m^m$$

donde

$$a_{0,0} = 1, a_{1,0} = a_{2,0} = \cdots = a_{m,0} = 0$$
$$a_{0,k+1} = -a_{0,k} + a_{1,k}$$
$$a_{1,k+1} = a_{2,k}$$
$$a_{2,k+1} = a_{3,k}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m-1,k+1} = a_{m,k}$$
$$a_{m,k+1} = a_{0,k}$$

1.22. Para $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$x_m^k = a_{0,k} + a_{1,k} x_m^{-1} + a_{2,k} x_m^{-2} + \cdots + a_{m,k} x_m^{-m-1}$$

donde

$$a_{0,0} = 1, a_{1,0} = a_{2,0} = \cdots = a_{m,0} = 0$$
$$a_{0,k+1} = 0$$
$$a_{1,k+1} = a_{2,k}$$
$$a_{2,k+1} = a_{3,k}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m-2,k+1} = a_{m-1,k+1} + a_{0,k}$$
$$a_{m-1,k+1} = a_{m,k} + a_{0,k} + a_{1,k}$$
$$a_{m,k+1} = a_{1,k}$$

1.23. Para $m \in \mathbb{N}$, sea $p_n = p_n(m)$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por

$$p_{n+1} = (m+1)^{((m+1)^n - (m+1))/m} + (m+2)(m+1)^{(m+1)^{n-1}-1} p_n - p_n^{m+1} \quad , p_1 = 1$$

entonces

$$x_m = \lim_{n \to \infty} \left(p_n (m+1)^{-((m+1)^{n-1}-1)/m} \right)$$

1.24. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{x_m}{1+x_m} \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{6m+2} - \frac{3m-m^2}{4(3m+1)^3}$$

1.25. Para $m \in \mathbb{N}$, sea $y_n = y_n(m)$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por

$$y_{n+1} = \frac{(3m+1)y_n - 2^m y_n^{m+1} + 2^m (1-y_n)^m}{3m+1} \quad , y_1 = \frac{1}{2}$$

entonces

$$\frac{x_m}{1+x_m} = \lim_{n \to \infty} y_n$$

1.26. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{\ln 2}{m+1} < \ln x_m < \frac{\ln 2}{m+1} + \frac{x_m - 1}{2m+2}$$

1.27. Para $m \in \mathbb{N}$, sea $y_n = y_n(m), n \in \mathbb{N}$ la sucesión definida por

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n + y_n^2 + y_n^3 + \cdots + y_n^m} \text{ , } y_1 = 1$$

$$y_{n+1} = 1 + \frac{y_n - 1}{y_n^{m+1} - y_n} \text{ , } y_1 = 1, y_2 = 1 + \frac{1}{m}$$

entonces

$$x_m = \lim_{n \to \infty} y_n$$

Referencias

1. Abramowitz, M. e I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions. Nueva York:Dover , 1965.
2. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals,Series, and Products (A.Jeffrey), Academic Press,New York, London, and Toronto, 1980.
3. M.R. Spiegel, Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Company, New York,1968.
4. E. Valdebenito, Pi Handbook, manuscript,unpublished,1989, (20000 formulas).