

中国古典名著

ShuShuDaLue

数术大略

Outline of Algorithm in Mathematics

《数书九章》原本

[宋] 鲁郡 秦九韶 撰

Author: Qin-JiuShao

淳佑七年（丁未，1247年）

石远东 校勘

Emendator: Shi-YuanDong

SYD 网络版

内容提要

秦九韶，十三世纪最伟大的中国数学家，所著《数术大略》博大精深，思想深刻，是理解中国古代数学的最佳途径之一。该书经过六百多年手写传抄之后，才有印刷品传世，其生命力可见一斑。遗憾的是，过去的诸多版本均有许多谬误，使人难辩雌雄。并且，今天的读者也不容易理解其解题过程。本人在学习过程中逐一辩误，校正，调整，并且尽量用现代数学思维方式重现其解题过程，以期有利于读者阅读和理解，是以有此版本面世。

想知道中国剩余定理的来源吗？

想知道如何用笔算去开任意次方吗？

想知道中国古代数学的伟大成就吗？

你有志于中国古代数学的研究吗？

请读《数术大略》这本书吧！

版权所有！欢迎传播！

禁止制作为商品销售！

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

《数术大略》目录

《数术大略》校编者序（石远东）	1
《数术大略》中用到的几个术	4
《数术大略》中用到的度量衡	6
题目顺序调整的理由	7
我冒昧更换、增删的部分文字和内容	9
数术大略·原序（秦九韶）	13
“数术大略·原序”现代文翻译	15
大衍第一	
大衍总数术	19
01 著卦发微	22
02 古历会积	28
03 推计土功	35
04 推库额钱	39
05 分巢推原	43
06 程行计地	46
07 程行相及	49
08 积尺寻源	53
09 余米推数	61
“大衍第一”现代文翻译	64
天时第二	
10 推气治历	73
11 治历推闰	75
12 治历演纪	76
13 缀术推星	82
14 揆日究微	87
15 天池测雨	91
16 圆罍测雨	92
17 峻积验雪	94
18 竹器验雪	95
“天时第二”现代文翻译	97
田域第三	
19 尖田求积	100
20 三斜求积	103
21 斜荡求积	104
22 计地容民	106
23 蕉田求积	108
24 均分梯田	110
25 漂田推积	114
26 环田三积	117
27 围田租亩	121
“田域第三”现代文翻译	123
测望第四	
28 望山高远	125
29 临台测水	127
30 陟岸测水	131
31 表望方城	132
32 遥度圆城	134
33 望敌圆营	137
34 望敌远近	139
35 望知敌众	141
36 表望浮图	143
“测望第四”现代文翻译	145
赋役第五	
37 服邑修赋	148
38 围田先计	158
39 筑梗均劳	163
40 宽减屯租	164
41 户田均宽	168
42 均科绵税	169
43 户税移割	170
44 移运均劳	173
45 均定劝分	175
“赋役第五”现代文翻译	176
钱谷第六	
46 折解轻贲	186
47 算回运费	191
48 课余贵贱	192
49 推本求息	193
50 积仓知数	195
51 推知余数	196
52 分定纲解	198
53 累收库本	199
54 米谷粒分	200
“钱谷第六”现代文翻译	201

营建第七

55 计定城筑·····	205	56 楼榭功料·····	213	57 计造石坝·····	215
58 计浚河渠·····	217	59 计作清台·····	219	60 堂皇程筑·····	230
61 砌砖计积·····	231	62 囤积量容·····	233	63 古池推元·····	237
“营建第七”现代文翻译·····					239

军旅第八

64 计立方营·····	245	65 方变锐阵·····	248	66 计布圆阵·····	251
67 圆营敷布·····	253	68 僦值推原·····	256	69 均敷徭役·····	257
70 军器功程·····	258	71 计造军衣·····	259	72 先计军程·····	262
“军旅第八”现代文翻译·····					264

市易第九

73 推求物价·····	268	74 均货摊本·····	272	75 互易推本·····	279
76 菽粟互易·····	280	77 推计互易·····	281	78 炼金计值·····	283
80 推求典本·····	284	79 竹围芦束·····	285	81 积木计余·····	286
“市易第九”现代文翻译·····					287

附录：

(1) 宋景昌：《数书九章》札记（1~4卷，删节版）·····	290
(2) 钦定四库全书·《数书九章》提要·····	359
(3) 阮元：《畴人传》卷22·秦九韶·····	360
(4) 焦循：《天元一释》卷末·····	362
(5) 陈振孙：《直斋书录解题》·····	364
(6) 李刘：回秦县尉谢差校正[九韶]·····	365
(7) 李曾伯：《可斋续稿·后》·····	366
(8) 刘克庄：缴秦九韶知临江军奏状·····	370
(9) 周密：《癸辛杂识续集》（下）·秦九韶·····	371
(10) 《宋史·志第二十一·律历》·····	373
(11) 《宋史·食货志·会子、交子之法》·····	375
(12) 陈规：守城机要·····	380
跋（石远东）·····	383

《数术大略》校编者序

一、关于《数术大略》

秦九韶的《数术大略》，自淳佑七年九月（1247年9月）写成之后，一直没有印刷版问世；直到道光二十二年（1842年），才由宋景昌以赵琦美钞本为蓝本，认真校勘之后，纳入郁松年主编的《宜稼堂丛书》，以《数书九章》的名称出版。

近六百年间，《数术大略》都以手钞本形式流传于世。其间，不乏鲁鱼亥豕的钞写错误；张冠李戴，文字脱漏，次序颠倒，乱入章节之类的错误也是层出不穷，甚至连《数术大略》的书名，都被篡改了——《文渊阁四库全书·子部·天文算法类》称之为《数学九章》，而目前众所周知的名称是《数书九章》。

李迪先生在“《数书九章》流传考”中提出：“需要指出的是：目前广泛流传的赵本系统的各种本子与秦氏原著差别较大，就是说不是本来面貌，特别是书名和卷数与原著不符”，“为此，笔者希望恢复秦书的原貌，应为《数术大略》九卷，题‘鲁郡秦九韶道古撰’，九卷按其自序来划分，即他自己所说的‘厘为九类’：大衍第一，天时第二，田域第三，测望第四，赋役第五，钱谷第六，营造第七，军旅第八，市易第九。”（引自吴文俊主编《秦九韶与〈数书九章〉》第56页）

我是十分赞同李迪先生的这一观点的，因此，我的目的是：还原其本来面目，故本书书名为《数术大略 Outline of Algorithm in Mathematics》，副标题为“《数书九章》原本”。

完全有理由怀疑：其中某些内容，已经被某些“不知数”者作了错误的删改和补充。当然，不可否认的是：某些错误是属于秦九韶本人的，这应该是可以识别的，也是情有可原的。事实上，即便是1992年由安徽科学技术出版社出版的《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校），仍然有不少问题和错误存在。我这样说并非否定王守义先生的工作，事实上，在《数书九章新释》中，王守义先生在[术曰]之后给出的【新释】就非常好，我自认无法超越，故此，本书中，我不再给出类似的内容。读者如有需要，可直接参考《数书九章新释》。我自认为已经是尽心尽力地去查漏补缺，正本清源，但是，本书仍然可能存在某些问题，期望读者慧眼识珠，予以纠正。

二、我的工作

我是1996年4月14日在广州购书中心买到《数书九章新释》，从此开始逐步了解秦九韶的成就。在这些年的阅读中，逐渐理解了秦九韶的数学思想，并且有所发现；也对书出现的问题提出修改意见。为了检查原文题目的叙述是否正确，合理，我尝试对秦九韶《数术大略》的“序”，“系”，以及题目（即：问）作现代汉语翻译，结果收获颇丰，还顺便阅读了不少历史文牍，诗词歌赋，中国古代天文学，中国古代建筑学，中国古代军事理论，等等知识，还有许多杂七杂八的知识。至于“答曰，术曰，草曰”，我就没有兴趣翻译了，主要是其中许多题，按照现代数学方法，都有更为简单的解决方案。而且，老实说，翻译中国古代汉语，相当于翻译一门外语；况且，本人不才，颇有些力不能及的感觉。

出于个人理解的需要，我将原文中的“图说”更换为“表说”，以显示对应的运算关系和运算过程——事实上，秦九韶的原著在“图说”中就保留了运算关系的说明，这在《文渊阁四库全书·数学九章》中的部分“图说”中依然可见，比如说：797-337页的法元图；797-375页，797-377页；797-424~429页；797-489页；797-510页；797-511页；797-513页；如此等等，不必一一罗列了。亦可参考郑诚，朱一文：“《数书九章》流传新考——赵琦美钞本初探”，刊载于《自然科学史研究》第29卷第3期（2010年），319—328页。

此外，《数书九章新释》中的“图说”安排混乱，许多原文分开排列的“图说”被合并为一图，使得读者难以分辨。《文渊阁四库全书·数学九章》的“图说”安排则比较合理。

《数书九章新释》中的原文：27 围田先计，35 古池推元，38 围田租亩，49 囤积量容，62 竹围芦束，63 积木计余。68 望知敌众，79 推本求息，81 值推原，一共九题，我认为其顺序安排不合理，就作了调整。我的目的是还原《数术大略》的本来面目，希望按照秦九韶最初的想法编排题目顺序。至于《文渊阁四库全书·数学九章》的顺序安排，则更是杂乱无章，不足为训。

此外，有些题，我根据自己的理解，冒昧地更换、增删了部分文字、内容；其中有几道题（特别是原文的 63 积木计余，64 计立方营，70 先计军程），我觉得需要做大幅度的修改，更换；如果读者认为我的处理不妥当，大可径直忽略而去，不必口诛笔伐。

三、参考文献

写作过程中，我着重参考的书籍是：

《数书九章新释》秦九韶原著，王守义遗著，李伊审校，安徽科学技术出版社，1992 年第一版；

《秦九韶与〈数书九章〉》吴文俊 主编，北京师范大学出版社，1987 年第一版；

《丛书集成：数书九章》秦九韶 著，王云五 主编，商务印书馆，1936 年；

《文渊阁四库全书·子部·天文算法类·数学九章》秦九韶 撰。

Ulrich Libbrecht: Chinese mathematics in the thirteenth century, 1973, MIT Press;

Ulrich Libbrecht（李倍始）的这本书让我深感惭愧：一个比利时 Leuven 大学的数学教授，中国数学史还是其第二职业，就能够把七百年多年前的中国数学文献做详细的解读，那得克服多少的困难啊！作为中国人，我真的是无颜以对。这使我痛下决心，要重新整理秦九韶的《数术大略》，以方便今天的中国人理解中国古代数学的辉煌成就。

我是 2015 年初，才在中山大学图书馆见到 Libbrecht 的这本书，Libbrecht 写得相当认真，严谨，值得仔细阅读。

白尚恕编译了其中的不定分析部分：《不定分析的发展历史》，见《数学史译文集续集》133~168 页，上海科技出版社，1985 年。

此外，我参考的书还有：

《丛书集成初篇·数书九章札记》宋景昌著（宜稼堂丛书本），商务印书馆，1936 年。

《天元一释》二卷，焦循撰，清焦氏丛书本（1799 年）；

《求一算术》三卷，张敦仁撰，清道光十一年刻本（1831 年）；

《艺游录》二卷，骆腾凤撰，清道光二十三年刻本（1843 年）；

《求一术通解》二卷，黄宗宪撰，清刻本（1874 年）；

《开方通释》[清]焦循(1801 年)

《宋史》《宋会要辑稿》《武经总要》《营造法式》《畴人传汇编》等等，不一一罗列了。

《钱宝琮科学史论文选集》，科学出版社，1983 年第一版；

《算法的源流：东方古典数学的特征》李继闵，科学出版社，2007 年第一版；

《中国古代历法》张培瑜，陈美东，薄树人，胡铁珠著，中国科学技术出版社，2008 年第一版；

《古代历法计算法》刘洪涛，南开大学出版社，2003 年第一版；

《中国历法与数学》曲安京，科学出版社，2005 年第一版；

《中国古代数理与天文学探析》曲安京，纪志刚，王荣彬，西北大学出版社，1994 年；

吕子方《“三统历”历意及其数源》（见《中国科学技术史论文集》（上册）20~96 页，四川人民出版社，1983 年）

相关的研究资料不计其数，良莠不齐，在此难以一一罗列。

四、关于秦九韶的身世和评价

关于秦九韶身世的考证，我认为：（四川安岳）杨国选先生的见解是比较合理的，值得重视。可参考杨国选的论文：“秦九韶生平年谱考”，“秦九韶的生卒约年新考”，“秦九韶生平事迹考”，“秦九韶在四川”，“秦九韶在蕲州”，“秦九韶与吴潜”，“秦九韶和陈振孙”，“秦九韶与隐君子陈元靓之说”，“秦季樵生平年谱考”，等等（网络上搜索即可）。

关于秦九韶的人品，已经被许多“中国著名的专家”描绘得不堪入目了。

这些“中国著名的专家”们，不愿意认真读一读秦九韶在《数术大略》中展示的品德、品质（难道是它们不愿读懂秦九韶的论述？），仅仅是根据秦九韶政敌的谣言、诽谤，就来评价秦九韶的人品，把秦九韶描述成“成就极大，人品极坏”的恶棍，以至于流言广布，流传中外；在英国 BBC 的专题节目“数学的故事.第 02 集.东方奇才.BBC.The.Story.of.Maths.E02.The.Genius.of.the.East”介绍秦九韶时即采纳了这个见解（时间轴：13:21~15:32 中国剩余定理，15:32~16:20 介绍秦九韶，16:20~19:48 正负开方术）。即便是以严谨、认真著称的 Ulrich Libbrecht，在 *Chinese mathematics in the thirteenth century* 中也只是翻译了周密：《癸辛杂识续集（下）·秦九韶》的内容，这显然是一种以偏概全的认识。

在西方人眼里，真正值得一提的中国数学家恐怕就只有秦九韶这一位了，但是，有个性的“中国著名的专家”却不愿意接受这个事实，仍然希望那些做实事的人的人品不如我这个“中国著名的专家”的人品优秀——尽管我这个“中国著名的专家”是个尸位素餐的东西。

我们应该“感谢”这些“中国著名的专家”作出的“伟大贡献”——尽管它们在数学研究领域没有任何贡献，但是，传播流言蜚语贡献还是非常突出的。

众所周知：宋朝，是一个盛产“莫须有”罪名的朝代，多少英雄豪杰都受累于此。

试问：假若秦九韶真的是“盖其人不孝、不义、不仁、不廉之事，具载丹书”，真的是“非复人类”，他又如何能够在“吴[潜]旋得滴，贾[似道]当国”的情况下，“在梅治政不辍，竟殁于梅。”？！要知道，刘克庄，周密可是贾似道的忠实追随者。

老实说，如果把刘克庄，周密对秦九韶的描述一字不落地“赠送”给这些“中国著名的专家”，恐怕它们也会乐享其成吧。

五、关于附录的说明

(1) 宋景昌：《数书九章》札记（1~4 卷）：这是全面校勘秦九韶《数术大略》的第一本书籍，其中纠正原文误差的部分值得参考。有鉴于此，我选择出其中有价值的部分，整理成册，其它无关紧要的部分我作了删节，以资读者对照参考。

(2) 钦定四库全书·《数书九章》提要；(3) 阮元：《畴人传》卷 22·秦九韶；对秦九韶以及《数术大略》作了粗略的介绍；(4) 焦循在《天元一释》卷末为秦九韶作了辩护。

(5) 李刘：回秦县尉谢差校正[九韶]；(6) 陈振孙：《直斋书录解题》；(7) 李曾伯：《可斋续稿·后》；则提供了关于秦九韶以及《数术大略》的部分重要信息。

(8) 周密：《癸辛杂识续集》（下）·秦九韶；(9) 刘克庄：缴秦九韶知临江军奏状；这两位是秦九韶的政敌；一些人不愿意去读秦九韶的著作（也许是它们无法读懂秦九韶的论述吧），完全信赖这两位谣言、诽谤，仅凭此二者强加的“莫须有”罪名，就对秦九韶妄下雌黄。今特录原文于此，以供有鉴别能力的读者参考。

(10) 《宋史·志第二十一·律历》则提供了宋朝的度、量、衡知识；

(11) 《宋史·食货志》会子、交子之法；(12) 陈规：守城机要；提供了宋朝的货币和军事知识，可以帮助我们理解秦九韶的《数术大略》。

校编者：石远东 序

《数术大略》原序

周教六艺，数实成之。学士大夫，所从来尚矣。其用本太虚生一，而周流无穷，大则可以通神明、顺性命，小则可以经世务、类万物，诂（jù）容以浅近窥哉！

若昔推策，以迎日定律，而知气；髀（bì）矩、浚川，土圭、度晷（guǐ）；

天地之大，圉（yòu）焉而不能外，况其间总总者乎！

爰自河图、洛书，闾（kǎi）发秘奥；八卦、九畴，错综精微；极而至于大衍，皇极之用，而人事之变，无不该；鬼神之情，莫能隐矣。要其归，则数与道非二本也。

圣人神之，言而遗其粗；常人昧之，由而莫之觉。

汉去古未远，有张苍、许商、乘马延年、耿寿昌、郑玄、张衡、刘洪之伦，或明天道，而法传于后；或计功策，而效验于时。

后世学者自高，鄙不之讲，此学殆绝。惟治历畴（chóu，世代相传）人，能为乘除，而弗通于开方衍变。若官府会事，则府吏一二系之。

算家位置，素所不识，上之人，亦委而听焉。持算者，惟若人，则鄙之也宜矣。呜呼！乐有制氏，仅记铿锵，而谓与天地同和者，止于是，可乎？

今数术之书，尚三十余家。天象、历度，谓之“缀术”；太乙、壬甲（rénjiǎ），谓之三式；皆曰内算，言其秘也。《九章》所载，即《周官》九数，系于方圆者为衷（zhuān，即：专）术，皆曰外算，对内而言也。其用相通，不可岐二。独大衍法不载《九章》，未有能推之者；历家演法颇用之，以为方程者，误也。

且天下之事多矣，古之人先事而计，计定而行。仰观俯察，人谋鬼谋，无所不用其谨，是以不愆（qiān）于成，载籍章章可覆也。

后世兴事造始，鲜能考度，又无创见，浸浸（jìn jìn，渐渐）乎天纪、人事彀（xiáo，混淆）缺矣。可不求其故哉。

九韶愚陋，不闲于艺。然早岁侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学。

际时狄患，历岁遥塞，不自意，全于矢、石间，尝险罹（lí）忧。荏苒（rěnrǎn）十祀（sì），心槁气落。

信知夫物莫不有数也，乃肆意其间，旁諏（zōu，咨询）方、能，探索杳渺，粗若有得焉。所谓通神明，顺性命，固朕未于见；若其小者，窃尝设为问答，以拟于用。积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类，立术，具草，间以图发之。

恐或可备博学多识君子之余观，曲艺可遂也。

愿进之于道，愧曰（tǎngyuē，倘若）艺成而下，是惟畴人、府吏流也，乌足尽天下之用，亦无瞢（méng，晦暗无光）焉。

时淳佑七年九月鲁郡秦九韶叙。

且系之曰：

昆仑磅礴，道本虚一。圣有大衍，微寓于易。

奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原。

数术之传，以实为体。其书九章，惟兹弗纪。

历家虽用，用而不知。小试经世，姑推所为。述大衍第一。

七精回穹，人事之纪。追缀而求，宵星画晷。

历久则疏，性智能革。不寻天道，模袭何益。

三农务耜（sì），厥（jué）施自天。以滋以生，雨膏雪零。

司牧闵焉，尺寸验之。积以器移，忧喜皆非。述天时第二。

魁隗粒民，甄度四海。苍姬井之，仁政攸在。
代远庶蕃，垦菑（zī）日广。步度庀（pǐ）赋，版图是掌。
方圆异状，袞窳（xiéyǔ）殊形。吏术精微，孰究厥真。
差之毫厘，谬乃千百。公私共弊，盍谨其籍。述田域第三。

莫高匪山，莫浚匪川。神禹奠之，积矩攸传。
智创巧述，重差夕桀（jié）。求之既详，揆（kuí）之罔越。
崇深广远，度则靡容。形格势禁，寇垒仇壙（yōng）。
欲知其数，先望以表。因差施术，坐悉微渺。述测望第四。

邦国之赋，以待百事。曠（gāi）田经入，取之有度。
未免力役，先商厥（jué）功。以衰（cuī）以率，劳逸乃同。
汉犹近古，税租以算。调均钱谷，河菑（zī）之扞（qiān）。
惟仁隐民，犹己溺饥。赋役不均，宁得勿思。述赋役第五。

物等敛赋，式时府庾（yǔ）。粒粟寸丝，褐夫红女。
商征边余（dí），后世多端。吏缘为欺，上下俱殫。
我闻理财，如智治水，澄源浚流，维其深矣。
彼昧弗察，惨急烦刑。去理益远，吁嗟（xūjiē）不仁。述钱谷第六。

斯城斯池，以保以聚。乃栋乃宅，宅生寄命。
鸿功雉制，竹籥（gè，个）木章。匪究匪度，财蠹（dù，消耗）力伤。
围蔡而栽，如子西素。匠计灵台，俾汉文惧。
惟武图功，惟俭昭德。有国有家，兹焉取则。述营建第七。

天生五材，兵去未可。不教而战，维上之过。
堂堂之阵，鹅鹳（guàn）为行。营应规矩，其将莫当。
师中之吉，惟智仁勇。夜算军书，先计攸（yōu）重。
我闻在昔，轻则寡谋。殄（tiǎn）民以幸，亦孔之忧。述军旅第八。

日中而市，万民所资。贾（gǔ）贸罽（dì，遮蔽）鬻（yù，卖），利析锱铢。
躔（dié，高峻）财役贫，封君低首。逐末兼并，非国之厚。述市易第九。

【编者注：市易第九只有一半，应该是有缺漏。

关于“余”和“巢”：

余（糶 dí）<动>（形声。从入，从米，翟声。本义：买进粮食[buy grain]；跟“巢”相对）；你来余米，将银子来我秤。——《陈州巢米》；

巢（糶 tiào）<动>（会意兼形声。从出，从糶，糶亦声。糶(tiào)，谷。本义：卖出谷物[sell grains]）；巢，出谷也。——《说文》；二月卖新丝，五月巢新谷。——唐·聂夷中《咏田家》；】

《数术大略·序》现代文翻译

周朝教育分“六艺”：礼、乐、射、御、书、数；数学位列其中，学者、士大夫因此重视数学、崇尚数学。数学，源于“太虚”，所谓“道生一，一生二，二生三，三生万物”，是以无处不在；往大里说，可知神明之禀，顺从自然规律；往小里说，则可经世致用，如意运筹画策；岂能以鼠目寸光来看待它。

过去，人们通过筹算推演，了解日月星辰的活动规律，据此制定天文历法，分别四时节气；通过立表、用矩，测量山之高，河之宽；通过沙漏状况，日影长度，确定时辰，时刻。

天高地阔，尚且不能置身其外，更何况是人间这些零零碎碎的事物？！

自从出现“河图”、“洛书”，启发人们对数的认识，产生《周易》“八卦”，出现《九章算术》；以数学的精妙入微，去解决错综复杂的现实问题；以至于著卦大衍的推演，或是帝王施政的法规，或是日常事务的变换，都不例外；连鬼神的本性，都可揭示一二；归根结底，就是“数”与“道”，在本质上毫无二致。

只是昔日的圣贤，故示神秘，只留下若干晦涩的文字；今日的凡人，则愚昧无知，无法觉悟其中的奥妙；

汉代，离上古并不遥远，产生了张苍、许商、乘马延年、耿寿昌、郑玄、张衡、刘洪等一批历算家；他们有的精通天文历法，将算理、算法传于后世；有的长于筹算推演，应用数学解决实际问题。

后世某些学者，自视高明，鄙视前人成就，不去发扬光大，以至绝学失传。唯独历算家们，还能知道些加减乘除，但对于“开方术”、“大衍术”，就一窍不通了。至于官府的会计事务，有个府吏会些加减运算，也就足够了。

数学家的地位和作用，一向不被人们正确对待，当权者对此，也是听之任之。若算学家只被当作计算工具使用，则数学这门学问遭到鄙视，也就理所当然了，可叹啊！

周公的《乐经》失传很久了。汉朝建立以后，因为制氏通晓雅乐声律，而世代代任乐官。但制氏只能记下音乐的节奏，却不能明了音乐蕴含的意义。仅仅如此，就说制氏是“与天地同和者（即：能与天地唱和出美妙乐章的歌者）”，行吗？

如今，数学著作尚存三十余家。属于天象，历法之类的，称之为“缀术”；用于太乙、壬甲的，称之为“三式”；它们统称为“内算”，算法保密而不外传。《九章算术》所载的内容，就是《周官》中的“九数”，涉及到方、圆的运算，称为“专术”；它们统称为“外算”，这是相对于“内算”而言的。“外算”与“内算”，本质相同，在应用上，彼此相通。唯独“大衍术”是《九章算术》没有载入的；历年来，也没有任何人能够推演出来。倒是历算家在制定历法时，不自觉地应用“大衍术”进行计算，但是，他们都以为这是“方程式”，这完全是张冠李戴嘛。

况且，面对人世纷繁复杂的事情，古人会事先通过计算，制定计划，然后按照计划行动；无论是仰观天文、星相，还是俯察地理、勘探，或是谋事、策划，或是占卜、问卦，无不小心翼翼，因此没有过错，能够保证成功；他们记载的算法、程序，都是可以重复再现的。

后人不能理解前人的成果，未能从本质上把握事物规律，也未能有所创新；渐渐地，在制定历法，人事策划等方面，就逐渐产生混乱，以至错误。难道我们不该反躬自问吗？

九韶愚昧，才疏学浅，但学习“六艺”，却不曾偷懒。少年时期，我随父亲到过京城中都（今杭州市），因而有机会向太史求教；又曾经拜“隐君子”为师，学习筹算推演技巧。

蒙古军攻打四川的头几年，我长年在边塞，不意间，生存于箭矢、抛石之中，尝尽艰险，历尽忧患；光阴荏苒，转瞬又是十年，不免有些心力交瘁；

好在我坚信：万物莫非数（世间万物都与数学息息相关）。于是，我潜心于数学之中，向专家、向能人讨教，探索数学之博大精深，取得一些粗浅的成果。所谓“可知神明之禀，

顺从自然规律”，我固然是力所不能及的；但从小的方面讲，私下里，我尝试把实践中遇到的问题，模拟设计成问答题的形式。经年累月的积累，丢弃了未免可惜。因此，我从中选择八十一题，分为九类，写出解题依据、运算程序，给出筹算推演过程，有些问题还将筹算示意图画了出来。

我的这些成果，或许可供博学多识的学者，在闲暇之余品评一番，这便达到了本书的目的，我也就心满意足了。

我的愿望是想从“道”的高度阐释数学；倘若是我水平有限，使得这本书，被人视为是：“历算畴人、府吏会计之流的水准，不能满足社会实践的实际需求”，那也不至于使本书黯然失色吧。

[宋]淳佑七年(1247年)九月，[鲁郡]秦九韶 叙

总结提要：

天穹无垠，地势磅礴，其根本，就是数一。

推算历法，圣人用大衍术，其奥妙，源于《周易》；

奇数、余数，辗转乘除，即可去伪存真，求得原数。

《九章算术》以应用问题为载体，记录了数术的技巧，唯独“大衍术”，不列其中。

历算家虽然会运用，却不知其所以然。

我尝试揭示其中规律，以昭示天下。

称此为“大衍”，列为第一章。

日、月及五星，在天穹回旋，决定人间四季更迭。

夜晚观测星象轨迹，白天记录圭表投影，

用“缀术”计算五纪（岁，月，日，星辰，历数）。

历法用久了，误差就会增大，历算家就得审时度势，改革旧历。

不去探索天体运动的真实规律，一味沿袭旧制，何益之有？

春耕秋收，黎民百姓，靠天吃饭；雨水似甘露，霜雪全归零。

州府官员，怜恤三农，收雨集雪，以管窥天。

器皿之中，雨雪积寸进尺，随器形向上移动，府官心情，当喜？该忧？

称此为“天时”，列为第二章。

全国土地，无论平原、丘陵，考察、测量之后，分配给黎民百姓，以资民生。

周王施行仁政，以井田制管理土地，以确保民生。

人口日益增多，需要开垦更多的土地和农田。

置办人口户籍，制作田地图册，是征收赋税的依据。

田地形状，有方有圆，有斜有正，有高有低。

计算程序，精微细致，如何取舍，必需慎之又慎。

测量、计算，都要仔细，差之毫厘，谬以千里。

征收赋税，若不根据籍册照章办事，于公于私，弊莫大焉。

称此为“田域”，列为第三章。

不高不为山，不深不为川。

测定山之高、远，川之深、阔，要用勾股定理，这是大禹治水时确立的基本方法。

在此基础上，智慧的先人，创造了更为巧妙的方法，这就是“重差术”，“夕桀术”。

求解之法，详尽而又周全；测量起来，切实而又可行。

高耸的，幽深的，宽广的，遥远的，皆可依法施为。
险要的形势，敌方的营垒，都不会妨碍测量的实施。
想知道测量的结果，就先立表，再测望；
根据两次测望得到的数值差，进行计算，即可坐悉微妙。
称此为“测望”，列为第四章。

一国之中，百事待兴；征收赋税，用之于民。
田亩赋税，应当取之有度，不可竭泽而渔。
徭役不可避免，首先要计议其中的利害关系。
以“衰分术”按比例计算，即可均匀分配赋税和徭役。
汉代距古代并不太远，也是按田亩比例计算，征收赋税和徭役。
适当筹措资金，围河（湖）造田，以增加耕地。
父母官要善待人民，犹如自己挨饿受灾一般，设身处地地为民着想。
赋税和徭役分配不均，国家将不得安宁，岂能置之不理？
称此为“赋役”，列为第五章。

根据等级收敛赋税物品，根据时节收购粮食，纳入府库。
一粒粟，一寸丝，都是黎民百姓的辛勤劳动所得。
向商人征收物税，向农民征购粮食，每个朝代的后世，都会巧立名目，花样翻新。
致使苛捐杂税横行，贪官污吏滋生，人民苦不堪言。
我曾听说：治理财政，犹如智者治水，应该正本清源，疏浚导流，方可细水长流。
如果被欺上瞒下的贪官污吏蒙蔽而不觉察，反而用酷刑去惩罚黎民百姓，
这就离真相更远，使得百姓哀叹政府的不仁了。
称此为“钱谷”，列为第六章。

城墙，城池，宫殿，庙宇，构成聚集百姓，保护人民的基本场所。
无论是雕梁画栋的亭榭楼阁，还是蓬门荜户的竹寮木屋，都是庇护生命的宅第。
建筑城市，修筑楼宇，或者是搭建寮屋，若不事先规划设计，都会耗财、伤力。
楚昭王围困蔡国，采纳子西的建议，用木板筑围垒，获得成功。
汉文帝打算建造一个天文观象台，工匠预算需黄金一百斤。汉文帝因造价太昂贵而放弃。
汉武帝以武力建立功勋，汉文帝以节俭昭示品德。
大至国家，小至百姓，都要先规划，后建设，这是个基本原则。
称此为“营建”，列为第七章。

天生的金、木、水、火、土五材，天下的老百姓都要使用，缺一不可；
作为国家，怎么能够离得开用兵打仗呢？
不经训练，就让士兵去打仗，这是指挥官的过错。
堂堂之军阵，排列成鹅阵，鹤阵，按阵行进。
行营有规有矩，其将势不可挡。
官兵都能“勇、智、仁、信、忠”，才是军队的制胜法宝。
连夜算计、策划行军路线，首先要安排好辎重、粮食。
我听说，在过去的战例中，由于缺乏智谋而挫败，还算是轻的；
甚至于杀良冒功的，则已成了巨大的忧患。
称此为“军旅”，列为第八章。

中午设立集市，百姓进行交易，这是黎民百姓生存的依靠。
商贾挤满集市，一镒一铢地赚取利润。
巨富聚敛钱财，奴役贫民百姓，以至于封疆大吏们都要讨好他们；
富商巨贾为独占市场，而兼并农民土地，这些，对国家而言，并非好事。
称此为“市易”，列为第九章。

【编者注：

主要的参考资料：郭书春：“秦九韶《数书九章·序》注释”

《湖州师范学院学报》35—44页（第26卷，第1期，2004年2月）。

“古代四川大事记（1840年以前）”相关摘要：

- 1234年金朝被宋蒙联军灭亡，宋蒙战争开始，四川成为南宋抗蒙战争的主战场之一。
- 1236年蒙军大举攻蜀，破成都，陷蜀54州，然后退出四川。
- 1241年蒙军再次攻蜀，破成都，南宋被迫将四川首府迁重庆。
- 1242年南宋派兵部侍郎余玠任四川安抚制置使，兼重庆知府。余玠整肃军政，恢复经济，建立城寨防御体系，多次打败蒙军进攻，史称“余玠治蜀”。
- 1247年数学家秦九韶撰成《数学九章》。
- 1258年蒙哥汗率7万蒙军主力攻蜀。
- 1259年王坚领导合州军民在钓鱼城凭险抗蒙，蒙哥汗受伤，死于军中，蒙军撤离四川。
- 1263年张珪知合州，坚守钓鱼城。
- 1271年忽必烈建立元朝，随即在四川攻城略地。】

禁止制作为
商品销售！

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

大衍第一

大衍总数术

01 著卦发微，02 古历会积，03 推计土功，04 推库额钱，05 分粟推原
06 程行计地，07 程行相及，08 积尺寻源，09 余米推数

大衍总数术

大衍总数术曰：

置诸问数，求总等，类名有四：

一曰元数，谓诸问数之总等为一者；本门“揲蓍”、“酒息”、“斛粟”、“失米”之类是也；
二曰复数，谓诸问数之总等为二及以上者；本门“筑堤”，并“急足”，“砌砖”之类是也；其总等曰复总；以复数，尽约其总等，即为元数；

三曰通数，谓诸数各有分子母者；本门问“一会积年”，次门“演纪”是也；以通数，通分内子；分子，为元数（或复数）；分母，曰通数单位；

四曰收数，谓尾位见分厘者；“假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会，而求积日”之类；以收数，通为元数（或复数）；所通之数，曰收数单位；

元数者，先以两两连环求等，以求诸数之间两两之各分等，各自约之，以至其商余之数，两两之间，皆无等，乃止；

求定数：置诸分等，判其奇偶；与其它分等皆无等者，即为无偶者，使其择商余者之一而入其原[即以分等乘其对应商余者，以还原其本元数]；与其它分等相同者，即为见偶者，见偶之诸分等相乘，使其积择商余者之一而共入其原[即以分等共乘其对应商余者，以还原其本元数]；复总与某分等有等，则此等与此分等相乘，合并处理；复总与诸分等皆无等，则复总可任择商余者之一而入其原；诸分等分配完毕，复总与分等皆变换为一；商余者，两两之间皆无等，即为定数；定数可不止一组，但运算结果相同[尽可能使定数为整除元数（或复数）之最大者]；

以定相乘，为衍母；以各定约衍母，各得衍数。

或列各定为母，于右行，各立天元一为子，于左行，以非本行之母互乘子，亦得衍数；如此，定数亦曰定母。

诸衍数，各满定母去之，不满曰奇；以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率；或奇得一者，便为乘率[或径以衍数与定母，用大衍求一入之，以求乘率，亦可]。

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下；然后乃以右行上下，以少除多，递互除之；所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止；乃验左上所得，以为乘率；或奇数已见单一者，便为乘率。

置各乘率，对乘衍数，得用数；以用数对乘余数，为各分总；并各分总，为总，满衍母去之，不满之数，与对应单位之积[亦即：通数者，为与通数单位之积；收数者，为与收数单位之积]，即为所求率数。

【编者注：

原文之“问数”，“元数”，“复数”之间界断不明确，现重新定义“复数”，以明确指出“元数”的地位和价值，从而为后面的运算打下坚实的基础。

“约奇弗约偶”向来语焉不详，使人摸不着头脑；现特地明确定义，免得读者为此争论不休，打破脑袋，影响休息和团结。毕竟，和为贵嘛。

“正用数”，“无用数”，“借数”之流，实乃无用之数；[清]黄宗宪《求一术通解》直谓之“赘设，删之”，实乃真知灼见也。吾辈何不从善如流？】

【原文附录如下，以资参考：】

大衍总数术

大衍总数术曰：置诸问数，类名有四：

一曰元数，谓尾位见单零者，本门揲蓍、酒息、斛黍、砌砖、失米之类是也；

二曰收数，谓尾位见分厘者，假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会而求积日之类；

三曰通数，谓诸数各有分子母者，本门问一会积年是也；

四曰复数，谓尾位见十或百及千以上者，本门筑堤，并急足之类是也；【编者注：筑堤(推计土功)之“复数”，非“尾位见十或百及千以上者”。秦九韶的“复数”应该是“总等大于1”的意思。如此，则“元数”与“复数”的定义有问题，分类不合理，需要修正。】

元数者，先以两两连环求等，约奇弗约偶；或约得五，而彼有十，乃约偶弗约奇；或元数俱偶，约毕可存一位见偶；或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等，约之；或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。

收数者，乃命尾位分厘作单零，以进所问之数；定位讫，用元数格入之；或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之。

通数者，置问数通分，内子互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位约众位，得各元法数，用元数格入之；或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母仍求总等，存一位约众位，亦各得元法数，亦用元数格入之。

复数者，问数尾位见十以上者，以诸数求总等，存一位约众位，始得元数；两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，复乘奇；或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼，则必复乘此，乃得定数。所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。【编者注：秦九韶的“约奇弗约偶”显得语焉不详，而且意义不大，不必纠缠于此。收数，通数之流可作单位数看待，无需自寻烦恼。】

求定数：勿使两位见偶，勿使见一太多，见一多则借用繁，不欲借，则任得一；【编者注：“见一”者，应与元数之因子相结合而取舍之。其实，所谓“见一”“借用”，毫无价值，完全可以忽略。】

以定相乘为衍母；以各定约衍母，各得衍数。或列各定为母于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。

诸衍数，各满定母去之，不满曰奇；以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率；或奇得一者，便为乘率。【编者注：亦可直接由诸衍数求乘率，无需“各满定母去之”。秦九韶加入“求奇”这一步的目的，似乎是保证求乘率时“实与法互素”，以提供判定大衍求一术终止的标志。】

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下；然后乃以右行上下，以少除多，递互除之【编者注：至此，是所谓的“求一术”，为连分数过程，以“须使右上末后奇一而止”为判定标志】；所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止【编者注：至此，是所谓的“大衍术”，为矩阵运算过程。事实上，“大衍术”与“求一术”相伴而行，故称“大衍求一术”】；乃验左上所得，以为乘率；或奇数已见单一者，便为乘率。【编者注：此术妙绝！】

置各乘率，对乘衍数得泛用。

并泛用课衍母，多一者为正用。或泛多衍母倍数者，验元数，奇偶同类者，损其半倍，

各为正用数；或三处同类，以三约衍母，于三处损之。或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数。当验元数同类者，而正用至多处借之。以元数两位求等，以等约衍母为借数，以借数损有以益其无为正用；或数处无者，如意立数为母，约衍母所得，以如意子乘之，均借补之；或欲从省勿借，任之为空可也。【编者注：这一段意义不大，完全可以忽略。“借数”之流，[清]黄宗宪《求一术通解》直谓之“赘设，删之”，实乃真知灼见也。】

然后其余各乘正用，为各总；并总，满衍母去之，不满为所求率数。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 01 题：蓍卦发微

问：《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四，以象四时，三变而成爻，十有八变而成卦。欲知所衍之术，及其数各几何？

答曰：衍母一十二，衍法三；

一元衍数二十四，二元衍数一十二；三元衍数八，四元衍数六；

已上四位衍数，计五十。

一揲用数一十二，二揲用数二十四，三揲用数四，四揲用数九。

已上四位用数，计四十九。

阴阳象数图		
老阳	1	水 m_1
少阴	2	火 m_2
少阳	3	木 m_3
老阴	4	金 m_4
终此四为爻	始此四数以揲	

本题术曰：置诸元数，两两连环求等，约奇弗约偶；遍约毕，乃变元数，皆曰定母，列右行；各立天元一为子，列左行；以定诸母，互乘左行之子，各得衍数，次以各定母满去衍数，各余，名曰奇数；以奇数与定母，用大衍术求一得乘率。

大衍术一术云：以奇于右上，定母于右下，立天元一于左上。先以右行上下两位，以少除多，所得商数，乃递互乘，内左行，使右上得一而止，左上为乘率。

以乘率乘衍数，各得用数；验次所揲余几何，以其余数乘诸用数，并名之曰总数；满衍母去之，不满为所求数，以为实。易以三才为衍法，以法除实，所得为象数；如实有余，或一或二，皆命作一，因为象数。

其象数得一为老阳；得二为少阴；得三为少阳；得四为老阴；得老阳画重爻，得少阴画拆爻，得少阳画单爻，得老阴画交爻。凡六画乃成卦。

草曰：置一二三四列右行，立天元一列左行；

1	1
1	2
1	3
1	4
天元	元数
左行	右行
以右行互乘左行	

【编者注：秦九韶将《周易》中的两句话，直接转化为一次同余方程组的数学模型。】

以右行 1, 2, 3, 4 互乘左行异子一，弗乘对位本子，各得衍数。

$2 \times 3 \times 4 = 24$	上	1
$1 \times 3 \times 4 = 12$	副	2
$1 \times 2 \times 4 = 8$	次	3
$1 \times 2 \times 3 = 6$	下	4
左行		右行
以左行并之，得 50		

乃以左行衍数四位共计 50，故《易》曰：大衍之数五十。算理不可以此 50 为用，盖分之为二，则左右手之数奇偶不同，见阴阳之伏数，必须复求用数，先名此曰衍数，以为限率。乃复以 1, 2, 3, 4 之元数求等数，约定按前术，以两两连环求等约之。先以 1 与 2 求等，1 与 3 求等，1 与 4 求等，皆得 1，各约奇弗约偶，数不变；次以 2 与 3 求等，亦得 1，约奇弗约偶，数亦不变；及以 2 与 4 求等，乃得 2，此 2 只约副数 2 变为 1，而弗约 4；次以 3 与 4 求等，亦得 1，约奇，亦不变；所得 1, 2, 3, 4，各为定数母，列右行。仍各立天元一为子，列左行。

1	1
1	1
1	3
1	4
天元	定数母
左行	右行
以右行互乘左行	

以右行定母 1, 1, 3, 4 互乘左行各子 1，惟不对乘本子，毕，左上得 12，左副得 12，左次得 4，次下得 3，皆曰衍数。

12 上	上 1
12 副	副 1
4 次	次 3
3 下	下 4
衍数	定母
左行	右行
以右行定母，满去左行衍数，余各为奇数	

次以各母满去衍数，其上母去衍 12 奇 1；其副母 1 亦去副子 12，亦奇 1；其次母 3 去次衍 4，亦奇 1；其下母 4，欲去下子 3 则不满，便以 3 为左下奇数。

1	上 1
1	副 1
1	次 3
3	下 4
奇数	定母
左行	右行
其左上副次，更不大衍，只以左下与右下衍之	

凡奇数得 1 者便为乘率。

【编者注：亦即上、副、次的乘率已经确定；下的乘率，“用大衍求一术入之”。】
今左下衍是 3，乃与本母 4 用大衍求一术入之。

下	3	定母 4
	左行	右行

列衍奇 3 于右上，定母 4 于右下，立天元一于左上，空其左下。

上	天元 1	衍奇 3
下	0	定母 4
	左行	右行

先以右上少数 3 除右下多数 4，得 1 为商；

		商 1
--	--	-----

上	天元 1	衍奇 3
下	0	定母 $4=3 \times 1 + 1$
	左行	右行

以商 1 乘左上天元一，只得 1，归左下，其右下余 1。

		商 1
上	天元 1	衍奇 3
下	归数 $1=1(\text{商}) \times 1(\text{天元})$	定母余 1
	左行	右行

次以右下少数 1 除右上多数 3，须使右上必奇 1，算乃止。遂于右行最上商 2 以除右衍，必奇 1。乃以上商命右下定余 1，除之，右衍余 1。

		商 2
上	天元 1	衍奇 $3=2 \times 1 + 1$
下	归数 1	定余 1
	左行	右行

次以商 2 与左下归数相乘得 2，加入左上天元一内，共得 3。

		商 2
上	天元 1	衍余 1
下	乘率 $3=2(\text{商}) \times 1(\text{归数}) + 1(\text{天元})$	定余 1
	左行	右行
验至右上得一，只以左上所得为乘率		

今验右上行余，得 1 当止。乃以左上 3 为乘率。

【编者注：“大衍求一术入之”结束。“大衍术”的范例也同时结束，秦九韶在以后的题目中不再给出“大衍术”的“草”。因此，我在这里提供统一的求乘率的运算流程图（详细的论述在本书 64 页“大衍总术”现代文翻译中给出）：

求乘率图，亦即求使得“实 $x_i \equiv 1(\text{mod 法})$ ”成立的 x_i ：

更相减损	商	大衍求一术
实 3 法 4	0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4 3	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3 1	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
1 得 0 当止		$4-1=3$ 为乘率

矩阵右下为 -1，故使得 $3x_i \equiv 1(\text{mod } 4)$ 成立的乘率 $x_i = 4-1$ ；

若矩阵右下为正数，则可直接取为乘率 x_i ；后面诸题亦如此处理。

秦九韶判定程序停止的条件是“验右上行余，得 1 当止”，其前提条件是“实与法互素”；我提供的程序可以不理睬这个前提条件，但是，判定的条件需要修改为“法下得 0 当止”。

在今后的求乘率的运算流程图中，不再标注“实”与“法”字样，读者谨记即可。】
与前三者乘率各 1，与衍定图衍数对列之，通计三行。

1	12	1	水 m_1
1	12	1	火 m_2
1	4	3	木 m_3
3	3	4	金 m_4
乘率	衍数	定母	

以乘率对乘左行毕，左上得 12，左副得 12，左次得 4，左下得 9，皆曰泛用数。

12 上	1
12 副	1
4 次	3
9 下	4
泛用	12 定母

次以右行 1, 1, 3, 4 相乘得 12，名曰衍母。复推元用等数 2，约副母 2 为 1，今乃复归之为 2，遂用衍母 12，益于左副 12 内，共为 24。

12	1
24	2
4	3
9	4
定用	元数

今验用数图，右行之 1, 1, 3, 4，即是所揲之数。左行 12 并 24，及 4 与 9 并之得 49，名曰用数。用为蓍草数，故《易》曰：其用四十有九是也。

假令用蓍 49，信手分之，则左手奇右手必偶，左手偶右手必奇。欲使蓍数近大衍 50，非 49 或 51 不可，二数信意分之，必有一奇一偶，故所以用 49 取七七之数始者。左副 24，益 12，就其 37 泛为用数，但 37 无意义，兼蓍少太露，是以用四十有九。凡揲蓍求一爻之数，欲得 1, 2, 3, 4 出于无为，必令揲者不得知，故以 49 蓍分之，只用左手之数。

假令左手分得 33，自一一揲之必奇一，故不繁揲，乃径挂一。故《易》曰：分而为二以象两，挂一以象三。次后又令筮人以二二揲之，其 33 亦奇 1，故归奇于扚。又令之以三三揲之，其 33 必奇 3，故又归奇于扚。又令之以四四揲之，又奇 1 亦归奇于扚。与前挂 1 并三度揲通有四扚，乃得 1, 1, 3, 1。其挂一者，乘用数图左上用数 12；其二揲扚一者，乘左副用数 24；其三揲扚三者，乘左次用数 4 得 12，其四扚一者，乘左下用数 9。

挂	
1 一	12
1 扚	24
4 扚	4
1 扚	9
	用数
左行三扚谓之三变	

挂一得 12 扚 1，得 24 扚 3，得 12 又扚 1，得 9，并为总数。

12	水 m_1
24	火 m_2
12	木 m_3
9	金 m_4
总数	

并此四总得 57。问所握几何，乃满衍母 12 去之，得不满者 9，以为实；或使知其所握 37，亦满衍母去之，亦只得九数。用三才衍法约之得 3，乃画少阳画单爻；或不满得 7 得 8 为实，皆命作 3。他皆放此。

术意：谓揲二揲三揲四者，凡三度，复以 33 从头数揲之，故曰：三变而成爻。既卦有六爻，必一十八变，故曰：十有八变而成卦。

【附录：】关于“十有八变而成卦”的说明：

《周易》中定义的阳爻为：—；阴爻为：--；对应数字的名称为：

$36 \div 4 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$	老阳	—
$24 \div 4 = 6 \equiv 2 \pmod{4}$	少阴	--
$28 \div 4 = 7 \equiv 3 \pmod{4}$	少阳	-
$32 \div 4 = 8 \equiv 0 \pmod{4}$	老阴	--

三爻成一卦，分别是：

乾，☰；坤，☷；震，☳；巽，☴；坎，☵；离，☲；艮，☶；兑，☱；

任意两卦上下叠合成一别卦，亦即：六爻成一别卦，可组成 64 个别卦，如：乾乾卦，坤坤卦，等等。《周易》就是对这六十四卦含义的解释。

《易经·系辞》中给出了具体的做法：

天一地二，天三地四，天五地六，天七地八，天九地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数，五十有五，此所以成变化而行鬼神也。

大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇於扚（lè）以象闰，故再扚而后挂。

乾之策，二百一十有六。坤之策，百四十有四。凡三百有六十，当期之日。二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。

是故，四营而成易，十有八变而成卦，八卦而小成。引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣。

显道神德行，是故可与酬酢，可与佑神矣。子曰：「知变化之道者，其知神之所为乎！」

《易经·系辞上传·第九章》

蓍挂的具体操作过程如下：

从蓍草 50 根取出 49 根，随机地分为两份，分握两手中。从右手蓍草中任取一根，“挂一以象三”，置于左手小指与无名指之间，这一根蓍草不参与后面的操作。然后对左右手的蓍草“揲之以四”，正好数完的就保留四根。左手剩余的蓍草夹在左手无名指与中指之间，右手剩余的蓍草夹在左手中指与食指之间，它们的数目之和为 5 或者 9。去掉这些蓍草，连同上面“挂一”的蓍草，手中握有 $49 - 5 = 44$ 或者 $49 - 9 = 40$ 根蓍草。此时手中握有蓍草数称为“一变”数，至此完成“一变”。

用“一变”得到的蓍草再按上述操作过程进行一次，夹在左手指间的蓍草数目是 4 或者 8 根，去之可得蓍草数为 40，36 或者 32，此时手中握有蓍草数称为“二变”数。至此完成“二变”。

用“二变”得到的蓍草再按上述操作过程进行一次，夹在左手指间的蓍草数目仍然是 4 或者 8 根，去之可得“三变”数为 36，32，28 或者 24。至此完成“三变”。

三变完成后即可根据前面表格中的结果确定一爻。显然，三变成一爻，三爻成一卦，六爻成一别卦，故有“十有八变而成卦”之说。

值得注意的是：秦九韶在《数书九章》中的蓍挂方法与此不同，其目的是构造同余方程 $N \equiv 1 \pmod{1}$ ， $N \equiv 1 \pmod{2}$ ， $N \equiv 1 \pmod{3}$ ， $N \equiv 1 \pmod{4}$ ，以便强调大衍求一术的应用，颇有些牵强附会之意，阅读时应该区别对待。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 02 题：古历会积

问：古历：冬至以三百六十五日四分日之一，朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周。假令至淳祐丙午（1246 年）十一月初一日（丙辰）为朔日，初五日（庚申）为冬至，初九日（甲子），欲求古历气朔甲子一会积年、积月、积日，及历过年数，未至年数，各几何。

答曰：一会积一万八千二百四十年，二十二万五千六百日，六百六十六万二千一百六十日。

历过九千一百六十三年，未至九千七十七年。

术曰：同前置问数，有分者通之，互乘之得通数。求总等，不约一位约众位，得各元法数，连环求等，约奇弗约偶，各得定母[本题欲求一会，不复乘偶]，以定相乘为衍母，定除母得衍数；满定去衍得奇；以大衍入之得乘率；以乘衍数得泛用数；并诸泛以课衍母，如泛内多倍数者损之，乃验元数奇偶同类处，各损半倍，各得正用[或三位同类者，三约衍母，损泛]。然后推气朔不及或所过甲子日数，乘正用加减之，为总。满衍去之，余为所求历过率实；如纪元法而一，为历过。以气元法除衍母得一会积年；以气周日刻乘一会年，得一会积日；以朔元法除衍母，得一会积月数。

右本题，问气朔甲子相距日数，系开禧历推到；或甲子日在气朔之间，及非十一月前后者，其总数必满母，赘去之，所得历过年数，尾位虽论，首位必异。

今设问以明大衍之理，初不计其前多后少之历过。【编者注：这一句话看起来不象是秦九韶的原文，应该是读者增加的；否则，就是秦九韶对本题的计算结果信心不足了。】

草曰：置问数冬至 365 日 4 分日之 1，朔策 29 日 940 分之 499，甲子 60 日，各通分内子，互乘之，列三等位，具图如后：

甲子	朔策	冬至	
60	29	365	元
	499	1	分子
	940	4	分母
问数图			

冬至得 1461，朔实得 27759，甲子无母只是 60，列三行互乘之，具图如后：

甲子	朔策	冬至
60	27759	1461
纪策	朔通	气通
	940 朔母	4 气母
225600	111036	1373340
纪分	朔分	气分
12 总等 总等不约纪分 (错误！应考虑通母 940)		
以通母乘通数，各得元法		
纪元法	朔元法	气元法
225600	9253	114445
法元图		

【编者注：从这里开始，秦九韶在《数书九章》中的叙述出现错误。主要是朔策与冬至通分时公分母错误地选择为 940×4 ，正确的应该是 940。出现这样低级的错误实在难以理解，下面仍然保留原文错误的叙述，以资参考。】

以三行互乘，右得 1373340 为气分；中得 111036 为朔分；左得 225600 为纪分。先求总

等得 12，乃存纪分一位不约，只以等 12 约气分得 114445，又约朔分得 9253，皆曰元法。乃以求连环求等，次以纪元 225600，与朔元 9253 求等得 1，不约；又以纪元与气元 114445 求等得 235，只约气分得 487；次以气元 487 与朔元 9253 求等得 487，只约朔元 9253 得 19。遍约毕，得 487 为气定，得 19 为朔定，得 225600 为纪定。以三定相乘得 2087476800 为衍母，具图如后：

4286400 气衍	487 气定
109867200 朔衍	19 朔定
9253 纪衍	225600 纪定
	2087476800 衍母
寄左行	寄右行

各以定数约衍母各得衍数：气得 4286400，朔得 109867200，纪得 9253，寄左行，各满定数去之，各得奇数。

313	487
4	19
9253	225600
奇数	定数
左行	右行

气奇得 313，朔奇得 4，纪奇得 9253，各与定数用大衍求一，各得乘率，列右行，对寄左行衍数，具图如后：

4286400	473
109867200	5
9253	172717
衍数	乘率
寄左行	右行

各以大衍入之，气乘率得 473，朔乘率得 5，纪乘率得 172717，对寄左行衍数。以右行乘率对乘左行衍数，气泛得 2027467200，朔泛得 549336000，纪泛得 1598150401。具图如后：

4 气不及	983728800 气正用	2027467200 气泛
9 朔不及	549336000 朔正用	549336000 朔泛
0 纪不及	554412001 纪正用	1598150401 纪泛
		4174953601 泛用和
左行（原右）	右行（原左）	2087476800 衍母

右列用数并之，共得 4174953601 为泛用数，与衍母 2087476800 验之，在衍母以上就以衍母除泛，得 2，乃知泛内多一倍母数，皆于各用内损去所多一倍。按术，验法元图内诸元数奇偶同类者各损其半。今验法元图，气元尾数是 5，纪元尾数是 600，为俱五同类，乃以衍母 2087476800 折半得 1043738400，以损泛用图内气泛、纪泛毕，其朔泛不损，各得气、朔、纪正用数。其气正用得 983728800，朔正用 549336000，纪正用 554412001，列为正用，图在前。

既得正用数，次验问题。十一月朔日丙辰，冬至初五日庚申，初九日甲子，乃以初一减初九甲子，余 8 日为朔不及；次以初五亦减初九甲子，余 4 日为气不及；以二不及各乘正用，得数具图如后：

3934915200	气总
4394688000	朔总

先以气不及甲子 4 日，以乘气正用数 983728800 得 3934915200 为气总；次以朔不及甲子 8 日数，以乘其朔正用数 549336000，得 4394688000 为朔总，并之得 8329603200 为总数，满母 2087476800 去之，不满 2067172800 为所求率实，具图如后：

8329603200	总数
2087476800	衍母
不满 2067172800	所求率实
225600	纪定法

置所得率实 2067172800，如法元图纪元法 225600 而一，得 9163 年为历过年；次置衍母 2087476800 为实，如法元图气元 114445 为法而一，得 18240 年，为气朔甲子一会积年。内减历过 9163 年；余 9077 年为未至年数。次以冬至周日 365 日 25 刻，乘一会积年 18240，得 6662160 日，为一会积日。又以衍母为实，如法元图朔元法 9253 而一，得 225600 月，为一会积月；合问。

【编者注：本问题问不合，术草俱误。这个问题早就被人们发现了，如清代四库馆臣，李锐，沈钦裴，宋景昌等。沈钦裴氏于道光(1821—1850)年间就曾经改正过“古历会积”。不过，王守义认为沈钦裴的修改仍有美中不足的地方。以下是王守义修改的：见《数书九章新释》56~63 页[(宋)秦九韶原著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992 年 10 月]】：

为了说明“古历会积”这类问题的实质，并尽量保存原文字起见，特为更正兼立术草并为释义如次：

问：古历：冬至以三百六十五日四分日之一，朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周。假令天正（原为“至淳祐丙午十一月”）丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子。欲求：古历气朔甲子一会积年、积月、积日，及历过未至年数，各几何。

答曰：一会积 1520 年，18800 月，555180 日。历过 1268 年，未至 252 年。

但必须是亥正末刻冬至和辰初 33 刻 72 分 $34\frac{2}{47}$ 秒（即按 $8\frac{22}{235}$ 时）交朔。

【注：古历所用日、刻、分、秒为百进制制，1 日=100 刻，1 刻=100 分，分=100 秒】

术曰：置问数，求通母（分母之最小公倍数），以乘问数，得各元法。连环求等，约奇弗约偶，各得定母。以定相乘为衍母。以通母除之，得一会积日。以朔元法除衍母，得一会积月。以气元法除衍母，得一会积年。然后以定除母，得衍数。满定去衍，得奇。以大衍入之，得乘率。以乘衍数，得用数。次推气朔不及或所过甲子日数，乘通母，复乘正用，加减之为总，满衍去之，余为所求历过率。加减气不及或所过甲子为实，如气元法而一，得历过年数。以减会积年，得未至年数。

草曰：置问数，冬至 $365\frac{1}{4}$ 日，朔策 $29\frac{499}{940}$ 日，甲子 60 日。各通分内子，列三等位，

具图如后：

甲子	朔策	冬至	
60	29	365	元
	499	1	分子
	940	4	分母
问数图			

冬至得 1461，朔实得 27759，甲子无母只是 60，列三行，各以通母 940 乘之，得各元法，具图如后：

甲子	朔策	冬至
60	$27759=29\times 940+499$	$1461=365\times 4+1$
纪策	朔通	气通

	940 朔母	4 气母
--	--------	------

以通母乘通数，右得 343335，为气元。中得 27759，为朔元。左得 56400，为纪元。

940 通母		
以通母乘通数，各得元法		
纪元法	朔元法	气元法
$56400=60 \times 940$	27759	$343335=235 \times 1461$
法元图		

乃以连环求等，以纪元 56400 与朔元 27759 求等，得 3，只约朔元，得 9253。又以纪元与气元 343335 求等，得 705，只约气元，得 487。次以气元 487 与朔元 9253 求等，得 487，只约朔元 9253，得 19。遍约毕，得 487 为气定，得 19 为朔定，得 56400 为纪定。

气定	$343335=705 \times 487$	$487=343335 \div 705$
朔定	$27759=3 \times 487 \times 19$	$19=27759 \div 3 \div 487$
纪定	$56400=3 \times 235 \times 80$	56400
	法元	定
衍母	$521869200=487 \times 19 \times 56400$ ，以为实	

以三定相乘，得 521869200，为衍母，以为实。实如通母 940 而一，得 555180，为一会积日。实如朔元法 27759 而一，得 18800，为一会积月。实如气元法 343335 而一，得 1520，为一会积年数。具图如后：

衍母		521869200
通母	940	$521869200 \div 940=555180$ ，为一会积日
朔元法	27759	$521869200 \div 27759=18800$ ，为一会积月
气元法	343335	$521869200 \div 343335=1520$ ，为一会积年

各以定数约衍母，各得衍数，气得 1071600，朔得 27466800，纪得 9253，寄左行。

气衍	$1071600=521869200 \div 487$	487 气定
朔衍	$27466800=521869200 \div 19$	19 朔定
纪衍	$9253=521869200 \div 56400$	56400 纪定
	寄左行	寄右行

各满定数去之，各得奇数，气奇得 200，朔奇得 1，纪奇得 9253。

$1071600=487 \times 2200+200$	487
$27466800=19 \times 1445621+1$	19
$9253=56400 \times 0+9253$	56400
奇数	定数
左行	右行

各与定数，各以大衍入之，各得乘率：

求气定乘率图：

更相减损		商	大衍求一术
1071600	487	2200	$\begin{bmatrix} -2200 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
487	200	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2200 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4401 & -2 \\ -2200 & 1 \end{bmatrix}$

200	87	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4401 & -2 \\ -2200 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11002 & 5 \\ 4401 & -2 \end{bmatrix}$
87	26	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11002 & 5 \\ 4401 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37407 & -17 \\ -11002 & 5 \end{bmatrix}$
26	9	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37407 & -17 \\ -11002 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85816 & 39 \\ 37407 & -17 \end{bmatrix}$
9	8	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -85816 & 39 \\ 37407 & -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 123223 & -56 \\ -85816 & 39 \end{bmatrix}$
8	1	8	$\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 123223 & -56 \\ -85816 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1071600 & 487 \\ 123223 & -56 \end{bmatrix}$
1	0		487 - 56 = 431 为气定乘率

求朔定乘率图:

更相减损	商	大衍求一术
27466800	19	1445621 $\begin{bmatrix} -1445621 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
19	1	19 $\begin{bmatrix} -19 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1445621 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27466800 & -19 \\ -1445621 & 1 \end{bmatrix}$
1	0	1 为朔定乘率

求纪定乘率图:

更相减损	商	大衍求一术
9253	56400	0 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
56400	9253	6 $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
9253	882	10 $\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 61 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$
882	433	2 $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 61 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -128 \\ -10 & 61 \end{bmatrix}$
433	16	27 $\begin{bmatrix} -27 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & -128 \\ -10 & 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -577 & 3517 \\ 21 & -128 \end{bmatrix}$

16	1	16	$\begin{bmatrix} -16 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -577 & 3517 \\ 21 & -128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9253 & -56400 \\ -577 & 3517 \end{bmatrix}$
1	0		3517 为纪定乘率

气乘率得 431，朔乘率得 1，纪乘率得 3517，寄右行，对寄左行衍数。以右行乘率对乘左行衍数，气泛得 461859600，朔泛得 27466800，纪泛得 32542801。具图如后：

气泛	1071600	431	$1071600 \times 431 = 461859600$ 气泛
朔泛	27466800	1	$27466800 \times 1 = 27466800$ 朔泛
纪泛	9253	3517	$9253 \times 3517 = 32542801$ 纪泛
	衍数	乘率	
	寄左行	右行	

右行用数并之，共得 521869201。与衍母 521869200 课之，多 1，即为正用数，其气正用得 461859600，朔正用 27466800，纪正用 32542801。具图如后：

用数	$461859600 + 27466800 + 32542801 = 521869201$
衍母	521869200
气正用	461859600
朔正用	27466800
纪正用	32542801

既得正用数，次验问题，十一月朔日丙辰，冬至初五日庚申，初九日甲子，乃以初一减初九甲子，余 8 日，为朔不及，当知朔不及应大于或等于 7 日而小于或等于 8 日。次以初五亦减初九甲子，余 4 日，为气不及，当知气不及应大于或等于 3 日而小于或等于 4 日。复验，知当气不及 3 日，朔不及 7 日 940 分日之 623 时，合于本问。以通母 940 乘之，得 2820 分，为气不及，得 7203 分，为朔不及。以二不及，各乘正用，得数具图如后：

气不及	3 日	$940 \times 3 = 2820$ 分
朔不及	$7 + 623/940$ 日	$940 \times 7 + 623 = 7203$ 分
纪不及	0 日	$940 \times 0 = 0$ 分
左行		通分后的分子

先以气不及分子 2820 分，以乘气正用数 461859600，得 1302444072000，为气总，次以朔不及分子 7203 分，以乘其朔正用数 27466800，得 197843360400，为朔总。并之，得 1500287432400，为总数。

气总	$2820 \times 461859600 = 1302444072000$
朔总	$7203 \times 27466800 = 197843360400$
总数	$1302444072000 + 197843360400 = 1500287432400$

满母 521869200 去之，不满 435351600，为所求率。内减气不及 2820，余 435348780，为实。如气元法 343335 而一，得 1268，为历过年数。以减会积年 1520，余 252，为未至年数。具图如后：

总数	$1500287432400 = 2874 \times 521869200 + 435351600$
衍母	521869200
所求率	435351600 (不满)
气不及	2820
实	$435348780 = 435351600 - 2820$
气元法	343335
历过年数	$1268 = 435348780 \div 343335$

会积年数	1520
未至年数	252=1520-1268

但必须是亥正末刻冬至和辰初 33 刻 72 分 $34\frac{2}{47}$ 秒交朔。合问。

【附录】用天干地支计算时间的方法：

六十甲子顺序

01~10	11~20	21~30	31~40	41~50	51~60
01 甲子	11 甲戌	21 甲申	31 甲午	41 甲辰	51 甲寅
02 乙丑	12 乙亥	22 乙酉	32 乙未	42 乙巳	52 乙卯
03 丙寅	13 丙子	23 丙戌	33 丙申	43 丙午	53 丙辰
04 丁卯	14 丁丑	24 丁亥	34 丁酉	44 丁未	54 丁巳
05 戊辰	15 戊寅	25 戊子	35 戊戌	45 戊申	55 戊午
06 己巳	16 己卯	26 己丑	36 己亥	46 己酉	56 己未
07 庚午	17 庚辰	27 庚寅	37 庚子	47 庚戌	57 庚申
08 辛未	18 辛巳	28 辛卯	38 辛丑	48 辛亥	58 辛酉
09 壬申	19 壬午	29 壬辰	39 壬寅	49 壬子	59 壬戌
10 癸酉	20 癸未	30 癸巳	40 癸卯	50 癸丑	60 癸亥

用六十甲子依次纪年，六十年一个轮回。干支纪年法的新一年应以立春为界，前后分属不同的干支纪年，比如说：2015 年的立春是 2 月 4 日，所以 2015 年 2 月 4 日立春之后才是乙未年，在此之前应是甲午年。这一点不熟悉的人容易搞错，应特别注意。

淳祐丙午（1246 年）十一月日历表：

11 月	53 丙辰 朔日	54 丁巳	55 戊午	56 己未	57 庚申 冬至	58 辛酉	59 壬戌	60 癸亥	01 甲子 初九	02 乙丑
	03 丙寅	04 丁卯	05 戊辰	06 己巳	07 庚午	08 辛未	09 壬申	10 癸酉	11 甲戌	12 乙亥
	13 丙子	14 丁丑	15 戊寅	16 己卯	17 庚辰	18 辛巳	19 壬午	20 癸未	21 甲申	

第 03 题：推计土功

问：筑堤，起四县夫，分给里、步皆同齐，阔二丈，里法三百六十步，步法五尺八寸。人夫以物力差定：甲县物力十三万八千六百贯，乙县物力一十四万六千三百贯，丙县物力一十九万二千五百贯，丁县物力一十八万四千八百贯。每力七百七十贯科一名，春程人功平方六十尺，先到县先给。今甲、乙二县俱毕，丙县余五十一丈，丁县余一十八丈，不及一日，全功。欲知堤长，及四县夫所筑长，合步尺数、道里数，各几何。

答曰：堤长：一十九里二百三十五步五尺。

四县夫所筑长为：一千二十六丈。

合步尺数为：一千七百六十八步五尺六寸。

合道里数为：四里三百二十八步五尺六寸。

术曰：置各县力，以程功乘，为实，以力率乘堤齐阔，为法，除之，得各县日筑复数[有分者通之，互乘之，得通数]，求总等。不约一位约众位，曰元数，连环求等，约奇，得定母。陆续求衍数、奇数、乘率、用数。以丙、丁县不及数乘本用，并为总数。以定母相乘为衍母，满母去总数，得各县分给里、步积尺数。以县数因之，为堤长；各以里法，步法约之，为里数，步数。

草曰：置甲县力 138600 贯，乙县力 146300 贯，丙县力 192500 贯，丁县力 184800 贯，以程功 60 尺遍乘之，皆以贯默约之。甲得 8316000 尺，乙得 8778000 尺，丙得 11550000 尺，丁得 11088000 尺，各为实。次以力率 770 贯乘堤齐阔 20 尺，亦以贯默约之，得 15400 尺，为法。遍除诸各实，甲得 54 丈，乙得 57 丈，丙得 75 丈，丁得 72 丈，各为四县众夫每日筑长率。按大衍术命曰复数，列右行。

	县力	程功	每日筑长率
甲	138600	$138600 \times 60 = 8316000$ 尺	$8316000 \div (770 \times 20) = 540$ 尺 = 54 丈
乙	146300	$146300 \times 60 = 8778000$ 尺	$8778000 \div (770 \times 20) = 570$ 尺 = 57 丈
丙	192500	$192500 \times 60 = 11550000$ 尺	$11550000 \div (770 \times 20) = 750$ 尺 = 75 丈
丁	184800	$184800 \times 60 = 11088000$ 尺	$11088000 \div (770 \times 20) = 720$ 尺 = 72 丈
元数			右行

以复数求总等，得 3 寸，以约三位多者，不约其少者，甲得 54，乙得 19，丙得 25，丁得 24，仍为元数。次以两两连环求等，各约之。

甲	54
乙	$57 \div 3 = 19$
丙	$75 \div 3 = 25$
丁	$72 \div 3 = 24$
仍为元数	左行

先以丁、丙求等，又以丁、乙求等，皆得 1，不约；次以丁、甲求等，得 6，只约甲 54 得 9，不约丁；次以丙与乙求等，又以丙与甲 9 求等，皆得 1，不约；后以乙与甲 9 求等得 1，不约；复验甲 9 与丁 24，犹可再约，又求等得 3，以约丁 24 得 8，复甲为 27。

甲	$54 \div 6 = 27$
乙	19
丙	25
丁	$24 \div 3 = 8$
衍母	$27 \times 19 \times 25 \times 8 = 102600$

次以定母四位相乘，求得 102600 为衍母，各以定母约衍母，甲得 3800，乙得 5400，丙得 4104，丁得 12825，为衍数。

甲	$102600 \div 27 = 3800$	27
---	-------------------------	----

乙	$102600 \div 19 = 5400$	19
丙	$102600 \div 25 = 4104$	25
丁	$102600 \div 8 = 12825$	8
	左行衍数	右行定母

满定母各去衍数，甲不满 20，乙不满 4，丙不满 4，丁不满 1，各为奇数。

甲	$3800 = 27 \times 140 + 20$	27
乙	$5400 = 19 \times 284 + 4$	19
丙	$4104 = 25 \times 164 + 4$	25
丁	$12825 = 8 \times 1603 + 1$	8
	奇数	定母

以各定母与本奇数，用大衍求一术入之：

求甲县乘率图：

更相减损	商	大衍求一术
3800 27 140		$\begin{bmatrix} -140 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
27 20 1		$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -140 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & -1 \\ -140 & 1 \end{bmatrix}$
20 7 2		$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 141 & -1 \\ -140 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -422 & 3 \\ 141 & -1 \end{bmatrix}$
7 6 1		$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -422 & 3 \\ 141 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 563 & -4 \\ -422 & 3 \end{bmatrix}$
6 1 6		$\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 563 & -4 \\ -422 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3800 & 27 \\ 563 & -4 \end{bmatrix}$
1 0		27-4=23 为甲县乘率

求乙县乘率图：

更相减损	商	大衍求一术
5400 19 284		$\begin{bmatrix} -284 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
19 4 4		$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -284 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1137 & -4 \\ -284 & 1 \end{bmatrix}$
4 3 1		$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1137 & -4 \\ -284 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1421 & 5 \\ 1137 & -4 \end{bmatrix}$
3 1 3		$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1421 & 5 \\ 1137 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & -19 \\ -1421 & 5 \end{bmatrix}$

1	0	5 为乙县乘率
---	---	---------

求丙县乘率图：

更相减损	商	大衍求一术
4104	25	164 $\begin{bmatrix} -164 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
25	4	6 $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -164 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 985 & -6 \\ -164 & 1 \end{bmatrix}$
4	1	4 $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 985 & -6 \\ -164 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4104 & 25 \\ 985 & -6 \end{bmatrix}$
1	0	25-6=19 为丙县乘率

求丁县乘率图：

更相减损	商	大衍求一术
12825	8	1603 $\begin{bmatrix} -1603 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
8	1	8 $\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1603 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12825 & -8 \\ -1603 & 1 \end{bmatrix}$
1	0	1 为丁县乘率

各得乘率：甲得 23，乙得 5，丙得 19，丁得 1。

甲	3800	23
乙	5400	5
丙	4104	19
丁	12825	1
	左行衍数	右行乘率

以右行乘率，对乘寄左行衍数，甲得 87400，乙得 27000，丙得 77976，丁得 12825，各为用数。

甲	$3800 \times 23 = 87400$
乙	$5400 \times 5 = 27000$
丙	$4104 \times 19 = 77976$
丁	$12825 \times 1 = 12825$
	用数

次验四县所筑有无不及零丈尺寸。今甲、乙俱毕，为无；丙余 51 丈，丁余 18 丈，为有。以丙、丁二县余丈各乘丙、丁二用数，其丙 51 乘丙用 77976，得 3976776 丈，为丙总；以丁余 18 乘丁用 12825 得 230850 丈，为丁总；

	余数	用数	分总
甲	0	87400	0
乙	0	27000	0
丙	51	77976	3976776
丁	18	12825	230850

并二总得 4207626 丈为总数。亦以丈通衍母得 102600 丈，仍为衍母。满去总数，不满 1026 丈，为所求长率。

以四县因之，得 4104 丈，为实。以步法 5 尺 8 寸除之，得 7075 步 5 尺，为堤积步。以里法 360 步约之，得 19 里 235 步 5 尺，为堤通长。置长率 1026 丈以步法约之，得 1768 步 5 尺 6 寸，又以里法约之，得 4 里 328 步 5 尺 6 寸，为各县所给步尺数，道里数。

总数	$4207626 = 41 \times 102600 + 1026$
各县所筑长率	1026 丈
实	$4 \times 1026 = 4104$ 丈
步法	58 寸
堤积步	$4104 \times 100 \div 58 = 7075$ 步 50 寸
里法	360 步
堤通长	7075 步 50 寸 $\div 360 = 19$ 里 235 步 5 尺
步尺数	$1026 \times 100 \div 58 = 1768$ 步 5 尺 6 寸
道里数	1768 步 5 尺 6 寸 $\div 360 = 4$ 里 328 步 5 尺 6 寸

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 04 题：推库额钱

问：有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳。近缘见钱希少，听各库照当处市陌，准解旧会。其甲库有零钱一十文，丁、庚二库各零四文，戊库零六文，余库无零钱。甲库所在市陌一十二文，递减一文至庚库而止。官省七十七陌。欲求诸库日息元纳足钱、展省，及今纳旧会，并大小月分各几何。

答曰：诸库元纳日息足钱二十六贯九百五十文，展省三十五贯文。

	日息旧会	大月旧会	小月旧会
甲	二百二十四贯五百一十文	六千七百三十七贯五百文	六千五百一十二贯九百二文
乙	二百四十五贯文	七千三百五十贯文	七千一百五贯文
丙	二百六十九贯五百文	八千八十五贯文	七千八百一十五贯五百文
丁	二百九十九贯四百四文	八千九百八十三贯三百三文	八千六百八十三贯八百八文
戊	三百三十六贯八百六文	一万一百六贯二百四文	九千七百六十九贯三百六文
己	三百八十五贯文	一万一千五百五十贯文	一万一千一百六十五贯文
庚	四百四十九贯一百四文	一万三千四百七十五贯文	一万三千二十五贯八百二文

术曰：[同前]以大衍求之。

置甲库市陌以递减数减之，各得诸库元陌。连环求等，约奇弗约偶，各得定母，诸定相乘为衍母。以定约衍母得衍数。衍数同衍母者去之为无[无者，借之同类]。其各满定母去之，余为奇数。以奇定，用大衍求乘率，乘衍数为用数。无者，则以元数同类者求等，约衍母，得数为借数。次置有零文库零钱数，乘本用数，并为总数，满衍母去之，不满为诸库日息足钱。置日数，以余乘之，各满元陌去之，余为寄；次置库日息足钱，以日数乘之[一日数为一，大月日数三十，小月日数二十九]，又去寄，得数，以元陌除之，复加寄，得各旧会。

草曰：置甲库市陌 12，递减一得 11 为乙库陌，10 为丙库陌，9 为丁库陌，8 为戊库陌，7 为己库陌，6 为庚库陌，得诸库元陌。

甲	12
乙	11
丙	10
丁	9
戊	8
己	7
庚	6
	元陌

以连环求等约讫，甲得 1，乙得 11，丙得 5，丁得 9，戊得 8，己得 7，庚得 1，各为定母。立各一为子。

甲	1	$1=12\div 4\div 3$
乙	1	11
丙	1	$5=10\div 2$
丁	1	9
戊	1	8
己	1	7
庚	1	$1=6\div 2\div 3$
互乘	左行	右行

先以诸定相乘，得 27720 为衍母；次以诸定互乘诸子，甲得 27720，乙得 2520，丙得 5544，丁得 3080，戊得 3465，己得 3960，庚得 27720，各为衍数。

甲	$27720=27720\div 1$	1
乙	$2520=27720\div 11$	11
丙	$5544=27720\div 5$	5
丁	$3080=27720\div 9$	9
戊	$3465=27720\div 8$	8
己	$3690=27720\div 7$	7
庚	$27720=27720\div 1$	1
	左行衍数	右行定母
衍母	$1\times 11\times 5\times 9\times 8\times 7\times 1=27720$	

次验诸衍数，有同衍母者，皆去之，为无衍数。次各满定母去各本衍，各得奇数，甲无，乙得1，丙得4，丁得2，戊得1，己得5，庚无，各为奇数。

甲	$27720=1\times 27720+0$	0	1
乙	$2520=11\times 229+1$	1	11
丙	$5544=5\times 1108+4$	4	5
丁	$3080=9\times 342+2$	2	9
戊	$3465=8\times 433+1$	1	8
己	$3690=7\times 565+5$	5	7
庚	$27720=1\times 27720+0$	0	1
		奇数	定母

次验有奇数者，得1便以1为乘率，亦即：乙，戊以1为乘率；得2数，或以上者，只有丙，丁，己，各以奇数于右上，定母于右下，立天元一於左上，用大衍求一之术入之：

求丙乘率图：

更相减损	商	大衍求一术
5544	5	1108 $\begin{bmatrix} -1108 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
5	4	1 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1108 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1109 & -1 \\ -1108 & 1 \end{bmatrix}$
4	1	4 $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1109 & -1 \\ -1108 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5544 & 5 \\ 1109 & -1 \end{bmatrix}$
1	0	$5-1=4$ 为丙乘率

求丁乘率图：

更相减损	商	大衍求一术
3080	9	342 $\begin{bmatrix} -342 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
9	2	4 $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -342 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1369 & -4 \\ -342 & 1 \end{bmatrix}$

2	1	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1369 & -4 \\ -342 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3080 & 9 \\ 1369 & -4 \end{bmatrix}$
1	0		9-4=5 为丁乘率

求己乘率图：

更相减损	商	大衍求一术	
3960	7	565	$\begin{bmatrix} -565 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
7	5	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -565 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 566 & -1 \\ -565 & 1 \end{bmatrix}$
5	2	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 566 & -1 \\ -565 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1697 & 3 \\ 566 & -1 \end{bmatrix}$
2	1	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1697 & 3 \\ 566 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3960 & -7 \\ -1697 & 3 \end{bmatrix}$
1	0		3 为己乘率

验乘除至右上余一而止，皆以左上所得为乘率，甲无，乙得1，丙得4，丁得5，戊得1，己得3，庚无，各为乘率，列右行，以对寄左衍。

甲	0	0
乙	2520	1
丙	5544	4
丁	3080	5
戊	3465	1
己	3690	3
庚	0	0
	衍数	乘率
	左行	右行

以两行对乘之，为用数。甲无，乙得2520，丙得22176，丁得15400，戊得3465，己得11880，庚无。

甲	0
乙	2520×1=2520
丙	5544×4=22176
丁	3080×5=15400
戊	3465×1=3465
己	3690×3=11880
庚	0
	用数

次以推无用数者，惟甲庚合于同类处借之。其同类，谓元陌列而视之。

甲	12	0	0	10	0×10=0
乙	11	1	2520	0	2520×0=0

丙	10	4	8316	0	$8316 \times 0 = 0$
丁	9	5	15400	4	$15400 \times 4 = 61600$
戊	8	1	3465	6	$3465 \times 6 = 20790$
己	7	3	11880	0	$11880 \times 0 = 0$
庚	6	0	0	4	$0 \times 4 = 0$
	元陌	乘率	用数	元余数	各总

并此七总得 82390，满衍母 27720 去之，不满 26950 为所求率。以贯约为 26 贯 950 文，为诸库日息等数；以官省 77 陌展得 35 贯文。

并七总	26950 文	$82390 = 2 \times 27720 + 26950$
诸库日息等数	26 贯 950 文	
官省陌	77%	$26950 \div 77\% = 35000$ 文

各以其库元陌组计，各得旧会零钱。

	元陌	元余数	日息旧会
甲	12	10	$(26950 - 10) \div 12\% + 10 = 224510$
乙	11	0	$(26950 - 0) \div 11\% + 0 = 245000$
丙	10	0	$(26950 - 0) \div 10\% + 0 = 269500$
丁	9	4	$(26950 - 4) \div 9\% + 4 = 299404$
戊	8	6	$(26950 - 6) \div 8\% + 6 = 336806$
己	7	0	$(26950 - 0) \div 7\% + 0 = 385000$
庚	6	4	$(26950 - 4) \div 6\% + 4 = 449104$

各以 30 日乘，为大月息；

	元陌	元余数	$30 \times \text{元余} \div \text{元陌的余数}$	大月旧会
甲	12	10	$30 \times 10 \div 12 = 25 \cdots 0$	$(26950 \times 30 - 0) \div 12\% + 0 = 6737500$
乙	11	0	0	$(26950 \times 30 - 0) \div 11\% + 0 = 7350000$
丙	10	0	0	$(26950 \times 30 - 0) \div 10\% + 0 = 8085000$
丁	9	4	$30 \times 4 \div 9 = 13 \cdots 3$	$(26950 \times 30 - 3) \div 9\% + 3 = 8983303$
戊	8	6	$30 \times 6 \div 8 = 22 \cdots 4$	$(26950 \times 30 - 4) \div 8\% + 4 = 10106204$
己	7	0	0	$(26950 \times 30 - 0) \div 7\% + 0 = 11550000$
庚	6	4	$30 \times 4 \div 6 = 20 \cdots 0$	$(26950 \times 30 - 0) \div 6\% + 0 = 13475000$

各以 29 日乘，为小月息；合问。

	元陌	元余数	$29 \times \text{元余} \div \text{元陌的余数}$	小月旧会
甲	12	10	$29 \times 10 \div 12 = 24 \cdots 2$	$(26950 \times 29 - 2) \div 12\% + 2 = 6512902$
乙	11	0	0	$(26950 \times 29 - 0) \div 11\% + 0 = 7105000$
丙	10	0	0	$(26950 \times 29 - 0) \div 10\% + 0 = 7815500$
丁	9	4	$29 \times 4 \div 9 = 12 \cdots 8$	$(26950 \times 29 - 8) \div 9\% + 8 = 8683808$
戊	8	6	$29 \times 6 \div 8 = 21 \cdots 6$	$(26950 \times 29 - 6) \div 8\% + 6 = 9769306$
己	7	0	0	$(26950 \times 29 - 0) \div 7\% + 0 = 11165000$
庚	6	4	$29 \times 4 \div 6 = 19 \cdots 2$	$(26950 \times 29 - 2) \div 6\% + 2 = 13025802$

第 05 题：分粟推原

问：有上农三人，力田所收之米，系用足斗均分，各往他处出粟。甲粟与本郡官场，余三斗二升；乙粟与安吉乡民，余七斗；丙粟与平江揽户，余三斗。官私共知者：官斛八斗三升，安吉乡斛一石一斗，平江市斛一石三斗五升。欲知共米，三人所分米，及各粟斛数，各几何。

答曰：共米七百三十八石。三人分米，各二百四十六石。

甲粟官斛，二百九十六斛；乙粟安吉斛，二百二十三斛；丙粟平江斛，一百八十二斛。

术曰：以大衍求之。

置官场斛率，安吉乡斛率，平江市斛率为元数。求总等，不约一位约众位，连环求等，约奇不约偶，或犹有类数存者，又求等，约彼必复乘此，各得定母。相乘为衍母，互乘为衍数，满定去之，得奇，大衍求一，得乘率，乘衍数为用数，以各余米乘用，并之为总。满衍母去之，不满为所分。以元人数乘之，为共米。

草曰：置文思院官斛 83 升，安吉州乡斛 110 升，平江府市斛 135 升，各为群斛元率。

官斛	83
安吉斛	$110=5 \times 2 \times 11$
平江斛	$135=5 \times 27$
	元数

先以三率求总等，得 1，不约。次以连环求等，其安吉率 110，与平江率 135 求等得 5，以约平江率得 27。余皆求等，得 1，不约。各得定数。

官斛	83
安吉斛	110
平江斛	$27=135 \div 5$
	右行定母

以定数相乘，得 246510，为衍母。各以元率约之，得 2970，为官斛衍数；得 2241，为安吉斛衍数；得 9130，为平江斛衍数；

官斛	$110 \times 27 = 2970$
安吉斛	$83 \times 27 = 2241$
平江斛	$83 \times 110 = 9130$
	衍数（寄左）
衍母	$83 \times 110 \times 27 = 246510$

次以定母满去衍数，得不满 65，为官斛奇；不满 41，为安吉奇；不满 4，为平江奇数。

官斛	$2970 = 83 \times 35 + 65$	83
安吉斛	$2241 = 110 \times 20 + 41$	110
平江斛	$9130 = 27 \times 338 + 4$	27
	奇数（左行）	定母（右行）

定母、奇数，各以大衍入之，求得乘数：

求官斛乘率

更相减损	商	大衍求一术	
2970	83	35	$\begin{bmatrix} -35 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

83	65	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -35 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & -1 \\ -35 & 1 \end{bmatrix}$
65	18	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 & -1 \\ -35 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -143 & 4 \\ 36 & -1 \end{bmatrix}$
18	11	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -143 & 4 \\ 36 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 179 & -5 \\ -143 & 4 \end{bmatrix}$
11	7	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 179 & -5 \\ -143 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -322 & 9 \\ 179 & -5 \end{bmatrix}$
7	4	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -322 & 9 \\ 179 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 501 & -14 \\ -322 & 9 \end{bmatrix}$
4	3	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 501 & -14 \\ -322 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -823 & 23 \\ 501 & -14 \end{bmatrix}$
3	1	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -823 & 23 \\ 501 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2970 & -83 \\ -823 & 23 \end{bmatrix}$
1	0		23 为官斛乘率

求安吉乘率

更相减损	商	大衍求一术
2241 110	20	$\begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
110 41	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -2 \\ -20 & 1 \end{bmatrix}$
41 28	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 & -2 \\ -20 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61 & 3 \\ 41 & -2 \end{bmatrix}$
28 13	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -61 & 3 \\ 41 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 163 & -8 \\ -61 & 3 \end{bmatrix}$
13 2	6	$\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 163 & -8 \\ -61 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1039 & 51 \\ 163 & -8 \end{bmatrix}$
2 1	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1039 & 51 \\ 163 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2241 & -110 \\ -1039 & 51 \end{bmatrix}$
1 0		51 为安吉乘率

求平江乘率

更相减损		商	大衍求一术
9130	27	338	$\begin{bmatrix} -338 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
27	4	6	$\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -338 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2029 & -6 \\ -338 & 1 \end{bmatrix}$
4	3	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2029 & -6 \\ -338 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2367 & 7 \\ 2029 & -6 \end{bmatrix}$
3	1	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2367 & 7 \\ 2029 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9130 & -27 \\ -2367 & 7 \end{bmatrix}$
1	0		7 为平江乘率

得 23 为官斛乘率；得 51 为安吉乘率；得 7 为平江乘率。

官斛	23	83
安吉斛	51	110
平江斛	7	27
	乘数	定母

以乘率各乘寄左行衍数，得 68310 为官斛用数；得 114291 为安吉斛用数；得 63910 为平江用数。次以甲余 32 升，乘官斛用数 68310，得 2185920 升于上；次以乙余 70 升，乘安吉用数 114291，得 8000370 升于中；次以丙余 30 升，乘平江用数 63910，得 1917300 升于下。

甲	官斛	32	68310=2970×23	2185920=2970×23×32
乙	安吉斛	70	114291=2241×51	8000370=2241×51×70
丙	平江斛	30	63910=9130×7	1917300=9130×7×30
		余数	用数	余米

各为总，并之，得 12103590 升，为总数。满衍母 246510 升去之，不满 24600 升，为所求率。展为 246 石，为 3 人各分米。以兄弟 3 人因之，得 738 石，为共米。

总数		2185920+8000370+1917300=12103590 升
各分米	24600 升	12103590=49×246510+24600
共米		3×24600=73800 升

置分米 246 石，各以官斛 8 斗 3 升，安吉斛 1 石 1 斗，平江斛 1 石 3 斗 5 升，约之，甲得 296 斛，余 3 斗 2 升；乙得 223 斛，余 7 斗；丙得 182 斛，余 3 斗。各为糶过及余米。合问。

甲	官斛	83	24600÷83=296 斛 3 斗 2 升
乙	安吉斛	110	24600÷110=223 斛 7 斗
丙	平江斛	27	24600÷27=182 斛 3 斗

第 06 题：程行计地

问：军师获捷，当早，点差急足三名，往都下节节走报；其甲于前数日申末到，乙后数日未正到，丙于今日辰末到；据供：甲日行三百里，乙日行二百四十里，丙日行一百八十里，每日在卯初出发，申末歇息。问：自军前至都里数，及三人各行日数，各几何。

答曰：军前至都三千三百里；甲行一十一日，乙行一十三日四时半，丙行一十八日二时。

术曰：以大衍求之；

置各行里，先求总等，存一约众，得元里；次以连环求等，约奇复乘偶，得定母；以定相乘，为衍母，满定除衍得衍数；满定去衍数，得奇；奇定，大衍得乘率，以乘衍数，得用数；次置辰刻正末，乘各行里，为实；以书六时约之，得余里，各乘用数，并为总，满衍母去之，得所求至都里，以各日行约之，得日辰刻数。

草曰：置甲 300 里，乙 240 里，丙 180 里。先求总等得 60，只存甲 300 勿约，乃约乙 240 得 4；次约丙 180 得 3，各为元数，连环求等。

甲	300
乙	$4=240\div 60$
丙	$3=180\div 60$
	元数

先以丙、乙求等，得 1，不约；次以丙、甲求等，得 3，于术约奇弗约偶，盖以等 3 约 3，因得 1 为奇，虑无衍数，乃便径先约甲 300 为 100，复以等 3 乘丙 3 为 9，既丙 9 为奇，甲 100 为偶，此即是约奇弗约偶；次以乙 4 与甲 100 求等得 4，以 4 约 100 得 25 为甲，复以 4 乘乙 4 得 16 为乙，各得定母。

甲	$25=300\div 3\div 4$
乙	$16=4\times 4$
丙	$9=3\times 3$
衍母	$25\times 16\times 9=3600$

以定母相乘得 3600 为衍母，以各定约衍母为衍数，甲得 144，乙得 225，丙得 400。

甲	$144=16\times 9$	25
乙	$225=25\times 9$	16
丙	$400=16\times 25$	9
	衍数	定母
	左行	右行

衍数各满定母去之，不满为奇数，甲得 19，乙得 1，丙得 4。

甲	$144=5\times 25+19$	25
乙	$225=14\times 16+1$	16
丙	$400=44\times 9+4$	9
		定母

以各奇数与定母用大衍入之：

求甲乘率

更相减损	商	大衍求一术	
144	25	5	$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

25	19	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$
19	6	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$
6	1	6	$\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -23 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & -25 \\ -23 & 4 \end{bmatrix}$
1	0		4 为甲乘率

求乙乘率

更相减损	商	大衍求一术	
225	16	14	$\begin{bmatrix} -14 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
16	1	16	$\begin{bmatrix} -16 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 & -14 \\ -16 & 1 \end{bmatrix}$
1	0		1 为乙乘率

求丙乘率

更相减损	商	大衍求一术	
400	9	44	$\begin{bmatrix} -44 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
9	4	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -44 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 & -2 \\ -44 & 1 \end{bmatrix}$
4	1	4	$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 89 & -2 \\ -44 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & 9 \\ 89 & -2 \end{bmatrix}$
1	0		9-2=7 为因率

各得乘数，甲得 4，乙得 1，丙得 7，各为乘率，列右行。

甲	144	4
乙	225	1
丙	400	7
	衍数	乘率

以乘率对乘寄左行衍数，甲得 576，乙得 225，丙得 2800，各为用数。

甲	$144 \times 4 = 576$
乙	$225 \times 1 = 225$
丙	$400 \times 7 = 2800$
	用数

以乙余 180，乘乙用 225，得 40500，于中；以丙余 60，乘丙用 2800 得 168000，加中，共得 208500，为总；满衍母 3600 去之，不满 3300 里，为军前至都里。

甲	576	0	0
乙	225	180	40500
丙	2800	60	168000
	用数	余数	
总数	$208500 = 57 \times 3600 + 3300$		

以甲 300 除之，得 11 日；以乙 240 除之，得 13 日 4 时半；以丙 180 除之，得 18 日 2 时。

次置甲申末到者，其酉初为夜，此是甲以全日到，为无余里。

次置乙于未正到，乃于卯时数至未正得 4 个半辰，以 4 半乘乙行 240 里，得 1080 为实；以六时约之，得 180 里为乙行不及全日之余里；

次置丙于辰末到，自卯初数至辰末得 2 时，以因丙行 180 里，得 360 为实。以六时除之，得 60 里，为丙行不及全日之余里。合问。

	日行	抵达时刻	不及全日之余里	总用日时
甲	300	申末 17 点	0 里	$3300 \div 300 = 11$ 日
乙	240	未正 13 点	180 里	$3300 \div 240 = 13 + 3/4$ 日 = 13 日 4 + 1/2 时
丙	180	辰末 9 点	60 里	$3300 \div 180 = 18 + 1/3$ 日 = 18 日 2 时

【编者注：题目中涉及到的中国古代时辰（地支）对照表：

时辰	北京时间	出发时刻	抵达时刻
子时	23 点~1 点		
丑时	1 点~3 点		
寅时	3 点~5 点		
卯时	5 点~7 点	卯初 5 点	
辰时	7 点~9 点		辰末 9 点
巳时	9 点~11 点		
午时	11 点~13 点		
未时	13 点~15 点		未正 14 点
申时	15 点~17 点		申末 17 点
酉时	17 点~19 点		
戌时	19 点~21 点		
亥时	21 点~23 点		

已知条件需要加入明确的时刻说明。】

第 07 题：程行相及

问：有急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里。先差丙往他处下文字；既三日，又有文字，遣乙追付丙；已两日，复有文字，续令甲赶付乙。三人偶不相及，乃同时俱至彼所。欲知：彼处去此里数几何。

答曰：彼处去此三千里。

术曰：以大衍求之。

置三人日行，求总等，约得元数。以连环求等，约得定母，以定相乘，得衍母，各定约衍，得衍数。满定去衍，得奇；奇定，大衍入之，得乘率，以乘寄衍，得用数；视甲及乙里为乙率，见乙及丙里为丙率，以乙日行满去乙率，不满为乙余；以丙日行满去丙率，不满为丙余；以二余，各乘本用，并之为总，满衍去之，不满，为彼去此里。

草曰：置甲、乙、丙三名日行，求总等得 50；先约甲、丙，存乙，得甲 6，乙 250，丙 4。

甲	$6=300\div 50$
乙	250
丙	$4=200\div 50$
	元数

以甲 6，丙 4 求等，得 2，以 2 约甲为 3，复以 2 因丙 4 为 8；次将乙 250 与丙 8 求等，得 2，乃约乙得 125；若复以 2 因丙 8 为 16，则不可约原丙 200，故复丙为 8；定得甲 3，乙 125，丙 8 为定母。

甲	$3=6\div 2$
乙	$125=250\div 2$
丙	$8=2\times 4$
	定母
衍母	$3000=3\times 125\times 8$

以定相乘得 3000 为衍母。以各定约衍母得衍数，甲得 1000，乙得 24，丙得 375；求奇数。

甲	$1000=3000\div 3$	3
乙	$24=3000\div 125$	125
丙	$375=3000\div 8$	8
	衍数	定母
	寄左行	右行

求奇数：左上 1000，以甲 3 去之，奇 1；左中 24，即为乙奇；左下 375，以丙 8 去之，奇 7。

甲	$1000=333\times 3+1$	3
乙	$24=0\times 125+24$	125
丙	$375=46\times 8+7$	8
	奇数	定母

各以大衍入之：

求甲乘率

更相减损	商	大衍求一术	
1000	3	333	$\begin{bmatrix} -333 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3	1	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -333 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -3 \\ -333 & 1 \end{bmatrix}$
1	0		1 为甲乘率

求乙乘率

更相减损	商	大衍求一术	
24	125	0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
125	24	5	$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
24	5	4	$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 21 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$
5	4	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 21 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -26 \\ -4 & 21 \end{bmatrix}$
4	1	4	$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -26 \\ -4 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 125 \\ 5 & -26 \end{bmatrix}$
1	0		125-26=99 为乙乘率

求丙乘率

更相减损	商	大衍求一术	
375	8	46	$\begin{bmatrix} -46 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
8	7	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -46 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & -1 \\ -46 & 1 \end{bmatrix}$
7	1	7	$\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 47 & -1 \\ -46 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -375 & 8 \\ 47 & -1 \end{bmatrix}$
1	0		8-1=7 为因率

求得甲 2，乙 112，丙 7，各为乘率。

甲	1000	1
乙	24	99
丙	375	7
	衍数	乘率

以乘率对乘衍数，甲得 1000，乙得 2376，丙得 2625，为泛用数。

甲	1000=1000×1	0	0
乙	2376=24×99	0	0
丙	2625=375×7	0	0

	泛用数	余数	各总
--	-----	----	----

并三数，得 0，为总数，便以衍母 3000 里，为彼去此里数，合问。

总数	0+0+0=0
衍母	3000
不满	0

【编者注：为说明题意，我们列表如下：

	丙	乙	甲
第 1 日	200		
第 2 日	400		
第 3 日	600		
第 4 日	800	250	
第 5 日	1000	500	
第 6 日	1200	750	300
第 7 日	1400	1000	600
第 8 日	1600	1250	900
第 9 日	1800	1500	1200
第 10 日	2000	1750	1500
第 11 日	2200	2000	1800
第 12 日	2400	2250	2100
第 13 日	2600	2500	2400
第 14 日	2800	2750	2700
第 15 日	3000	3000	3000

事实上，此题题设有误，[清]黄宗宪，四库馆案均有指出；王守义也作修改。

此题为求 $N \equiv 0 \pmod{m_1}$, $N \equiv 0 \pmod{m_2}$, $N \equiv 0 \pmod{m_3}$ 题型，直接求最小公倍数即可，无需大动干戈。也许，秦九韶是想借此例展示大衍术的威力吧。

本题与《九章算术·均输》“(一二)今有善行者行一百步，不善行者行六十步。今不善行者先行一百步，善行者追之，问：几何步及之？答曰：三十三里、少半里。术曰：置不善行者先行一十里，以善行者先至二十里增之，以为法。以不善行者先行一十里，乘善行者一百里，为实。实如法得一里。”相同。故可用同样方法解答：

程行相及

问：有急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里。先差丙，往他处下文字，既三日；又有文字，遣乙追付丙，已两日；复有文字，续令甲赶付乙。三人偶不相及，乃同时俱至彼所。欲知：彼处去此里数几何。

答曰：彼处去此三千里。

术曰：以均输求之。

置丙既去日，乘丙行里为实；以丙、乙行里差为法，除之，得乙及丙日数；以乘乙行，得里；

或者：置乙已去日数，乘乙行里为实；以甲、乙行里差为法，除之，得甲及乙日数；以乘甲行，得里；

草曰：置丙既行 3 日，乘丙日行 200 里，得 600 里，为实。置乙日行 250 里，减丙日行 200 里，余 50 里，为差法。实如法而一，得 12 日；以 12 乘乙日行 250 里，得 3000 里，为彼处去此里数。

甲日行	300 里	
乙日行	250 里	
丙日行	200 里	
丙先乙	3 日	$12+3=15$ 日为丙共行日数
乙先甲	2 日	
丙先甲	5 日	
乙及丙日数		$3 \times 200 \div (250 - 200) = 12$ 日
甲及乙日数		$2 \times 250 \div (300 - 250) = 10$ 日
丙共行		$15 \times 200 = 3000$ 里
乙共行		$12 \times 250 = 3000$ 里
甲共行		$10 \times 300 = 3000$ 里

以上是按照均输方法的解答。显然，题中的条件太富裕了。】

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

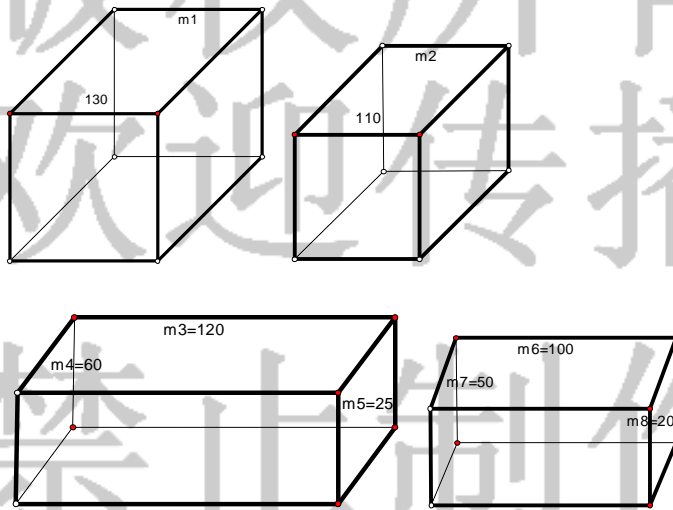
第 08 题：积尺寻源

问：欲砌基一段，见管大、小方砖，六门砖，城砖四色。令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称用大方料，广多六寸，深少六寸；用小方，广多二寸，深少三寸；用城砖，长广多三寸，深少一寸；以阔深少一寸，广多三寸；以厚广多五分，深多一寸；用六门砖，长广多三寸，深多一寸；以阔广多三寸，深多一寸；以厚广多一寸，深多一寸；皆不匱（kē）匱，未免修破砖料稗补。其四色砖：大方方一尺三寸，小方方一尺一寸，城砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分；六门砖长一尺，阔五寸，厚二寸。欲知基深广几何。

答曰：深三丈七尺一寸，广一丈二尺三寸。

术曰：以大衍求之。

置砖方、长、阔、厚为元数，以小者为单，起一，先求总等，存一位，约众位[列位多者，随意立号]，乃为元数。连环求等，约为定母。以定相乘为衍母，各定约衍母得衍数，满定去之得奇。奇定大衍得乘率，以乘衍数得用数。次置广深多少数，多者乘用，少者减元数，余以乘用，并为总。满衍母去之，不满得广深。



草曰：置四砖方、长、阔、厚系八数，城砖厚有分为小者，皆通之为单。大方得 130 分，小方得 110 分，城砖长得 120 分，阔得 60 分，厚得 25 分；六门砖长得 100 分，阔得 50 分，厚得 20 分。

金 m_1	130 分	大方
石 m_3	120 分	城砖长
丝 m_2	110 分	小方
竹 m_6	100 分	六门长
匏 m_4	60 分	城砖阔
土 m_7	50 分	六门阔

革 m_5	25 分	城砖厚
木 m_8	20 分	六门厚

锥行置之右列，位稍多，砖名相互。今假八音为号位。先以最少者，自木 20 与革 25 求等得 5，乃反约木 20 为 4；木 4 与土 50 求等得 2，以约 50 为 25；木 4 与匏 60 求等得 4，约 60 为 15；木 4 与竹 100 求等得 4，约 100 为 25；木 4 与丝 110 求等得 2，约 110 为 55；木 4 与石 120 求等得 4，反约木 4 为 1；以木 1 与金 130 求等得 1，不约；为木与诸数求等，约讫，为一变，得数具图如后：

金 m_1	130	大方
石 m_3	120 反约木	城砖长
丝 m_2	$55=110\div 2$	小方
竹 m_6	$25=100\div 4$	六门长
匏 m_4	$15=60\div 4$	城砖阔
土 m_7	$25=50\div 2$	六门阔
革 m_5	25 反约木	城砖厚
木 m_8	$1=20\div 5\div 4$	六门厚

次以革 25 与土 25 求等得 25，约 25 得 1；以革 25 与匏 15 求等得 5，约匏 15 为 3；以革 25 与竹 25 求等得 25，约竹 25 为 1；又以革 25 与丝 55 求等得 5，约丝 55 得 11；以革 25 约石 120 求等得 5，约 120 为 24；以革 25 与金 130 求等得 5，约金得 26；革与诸数遍约讫，为二变，具图如后：

金 m_1	$26=130\div 5$	大方
石 m_3	$24=120\div 5$	城砖长
丝 m_2	$11=55\div 5$	小方
竹 m_6	$1=25\div 25$	六门长
匏 m_4	$3=15\div 5$	城砖阔
土 m_7	$1=25\div 25$	六门阔
革 m_5	25	城砖厚

木 m_8	1	六门厚
---------	---	-----

乃以土 1 与匏 3, 竹 1, 丝 11 求等, 皆得 1, 不约; 土与诸数约讫, 为三变。乃以匏 3 约竹 1, 丝 11 求等, 皆得 1; 又以匏 3 约石 24 求等得 3, 约石 24 得 8; 又匏 3 与金 26 求等得 1, 匏与诸数约讫, 以为四变。次以竹 1 与丝 11, 与石 8, 与金 26 求等, 皆得 1, 竹与诸数约讫, 为五变。次以丝 11 与石 8, 与金 26 求等, 皆得 1, 为六变; 后以石 8 与金 26 求等, 得 2, 约金 26 得 13, 至此为七变。连环求等, 约俱毕, 得数为定母, 具图如后:

金 m_1	$13=26\div 2$	大方
石 m_3	$8=24\div 3$	城砖长
丝 m_2	11	小方
竹 m_6	1	六门长
匏 m_4	3	城砖阔
土 m_7	1	六门阔
革 m_5	25	城砖厚
木 m_8	1	六门厚
	定母	

右定母列右行, 以相乘得 85800 为衍母。以各定母约衍母各得衍数。其竹、木、土定得 1 者为无。

$85800\div 13=6600$	金 m_1	13	大方
$85800\div 8=10725$	石 m_3	8	城砖长
$85800\div 11=7800$	丝 m_2	11	小方
0	竹 m_6	1	六门长
$85800\div 3=28600$	匏 m_4	3	城砖阔
0	土 m_7	1	六门阔
$85800\div 25=3432$	革 m_5	25	城砖厚
0	木 m_8	1	六门厚
左行		右行	
衍母 85800		定母	

金定 13 得衍数 6600；石定 8 得衍数 10725；丝定 11 得衍数 7800；竹定 1 无衍数；匏定 3 得衍数 28600；土定 1 无衍数；革定 25 得衍数 3432；木定 1 无衍数；各满定母去之，得奇数。

$6600=507\times 13+9$	金 m_1	13	大方
$10725=1340\times 8+5$	石 m_3	8	城砖长
$7800=709\times 11+1$	丝 m_2	11	小方
0	竹 m_6	1	六门长
$28600=9533\times 3+1$	匏 m_4	3	城砖阔
0	土 m_7	1	六门阔
$3432=137\times 25+7$	革 m_5	25	城砖厚
0	木 m_8	1	六门厚
奇数		定母	

金得奇 9，石得奇 5，丝得奇 1，匏得奇 1，革得奇 7。其丝、匏得 1 者便以 1 为乘率。其金、石、革三处奇数皆与本定母，用大衍入之：

求金乘率图：

更相减损		商	大衍求一术
6600	13	507	$\begin{bmatrix} -507 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
13	9	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -507 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 508 & -1 \\ -507 & 1 \end{bmatrix}$
9	4	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 508 & -1 \\ -507 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1523 & 3 \\ 508 & -1 \end{bmatrix}$
4	1	4	$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1523 & 3 \\ 508 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6600 & -13 \\ -1523 & 3 \end{bmatrix}$
1	0		3 为金乘率

求石乘率图：

更相减损		商	大衍求一术
10725	8	1340	$\begin{bmatrix} -1340 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

8	5	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1340 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1341 & -1 \\ -1340 & 1 \end{bmatrix}$
5	3	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1341 & -1 \\ -1340 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2681 & 2 \\ 1341 & -1 \end{bmatrix}$
3	2	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2681 & 2 \\ 1341 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4022 & -3 \\ -2681 & 2 \end{bmatrix}$
2	1	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4022 & -3 \\ -2681 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10725 & 8 \\ 4022 & -3 \end{bmatrix}$
1	0	8-3=5 为石乘率	

求革乘率图：

更相减损		商	大衍求一术
3432	25	137	$\begin{bmatrix} -137 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
25	7	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -137 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 412 & -3 \\ -137 & 1 \end{bmatrix}$
7	4	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 412 & -3 \\ -137 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -549 & 4 \\ 412 & -3 \end{bmatrix}$
4	3	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -549 & 4 \\ 412 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 961 & -7 \\ -549 & 4 \end{bmatrix}$
3	1	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 961 & -7 \\ -549 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3432 & 25 \\ 961 & -7 \end{bmatrix}$
1	0	25-7=18 为革乘率	

金得 3，石得 5，丝得 1，匏得 1，革得 18，各为乘率列右行：

6600	金 m_1	3	大方
10725	石 m_3	5	城砖长
7800	丝 m_2	1	小方
0	竹 m_6	0	六门长
28600	匏 m_4	1	城砖阔
0	土 m_7	0	六门阔

3432	革 m_5	18	城砖厚
0	木 m_8	0	六门厚
衍数寄左		右行	

对乘寄左行衍数，各得为用数。

6600	金 m_1	3	大方	$6600 \times 3 = 19800$
10725	石 m_3	5	城砖长	$10725 \times 5 = 53625$
7800	丝 m_2	1	小方	$7800 \times 1 = 7800$
0	竹 m_6	0	六门长	0
28600	匏 m_4	1	城砖阔	$28600 \times 1 = 28600$
0	土 m_7	0	六门阔	0
3432	革 m_5	18	城砖厚	$3432 \times 18 = 61776$
0	木 m_8	0	六门厚	0
衍数寄左		乘率		用数
				和为 171601

【求基广】广余，衍数，乘率，三行对乘毕，得各分总：金得 1188000，石得 1608750，丝得 156000，竹得 0，匏得 858000，土亦得 0，革得 308880，木得 0。

金 m_1	大方	6600	3	60	$1188000 = 6600 \times 3 \times 60$
石 m_3	城砖长	10725	5	30	$1608750 = 10725 \times 5 \times 30$
丝 m_2	小方	7800	1	20	$156000 = 7800 \times 1 \times 20$
竹 m_6	六门长	0	0	30	0
匏 m_4	城砖阔	28600	1	30	$858000 = 28600 \times 1 \times 30$
土 m_7	六门阔	0	0	30	0
革 m_5	城砖厚	3432	18	5	$308880 = 3432 \times 18 \times 5$
木 m_8	六门厚	0	0	10	0
		衍数	乘率	广余	广分总

乃并八位广分总，共得 4119630 分，为广总。满衍母 85800 去之，不满 1230 分，约之为 1 丈 2 尺 3 寸，为基元广数。

【求基深】乃求其深，验问题：大方砌少 6 寸；小方砌少 3 寸；城砖长砌少 1 寸，阔砌少 1 寸，厚砌多 1 寸；六门长砌多 1 寸，六门阔砌多 1 寸，厚砌多 1 寸；列为中行。

次置诸砖元数，列为左行，课减之，具图如后：

金 m_1	130	少	60	大方
石 m_3	120	少	10	城砖长
丝 m_2	110	少	30	小方
竹 m_6	100	多	10	六门长
匏 m_4	60	少	10	城砖阔
土 m_7	50	多	10	六门阔
革 m_5	25	多	10	城砖厚
木 m_8	20	多	10	六门厚
	左行		中行	

今以中行多者存之，少者用减左行，存者左行元数去之，所减者左行余数存之。金得 70，丝得 80，石得 110，匏得 50，革得 10，竹 10，土 10，木 10，具图如后：

金 m_1	$70=130-60$	少		大方
石 m_3	$110=120-10$	少		城砖长
丝 m_2	$80=110-30$	少		小方
竹 m_6		多	10	六门长
匏 m_4	$50=60-10$	少		城砖阔
土 m_7		多	10	六门阔
革 m_5		多	10	城砖厚
木 m_8		多	10	六门厚
	左行		中行	

深余，衍数，乘率，三行对乘毕，得各分总：金得 1386000，石得 5898750，丝得 624000，竹得 0，匏得 1430000，土得 0，革得 617760，木得 0，具图如后：

金 m_1	大方	6600	3	70	$1386000=6600 \times 3 \times 70$
石 m_3	城砖长	10725	5	110	$5898750=10725 \times 5 \times 110$
丝 m_2	小方	7800	1	80	$624000=7800 \times 1 \times 80$
竹 m_6	六门长	0	0	10	0
匏 m_4	城砖阔	28600	1	50	$1430000=28600 \times 1 \times 50$
土 m_7	六门阔	0	0	10	0
革 m_5	城砖厚	3432	18	10	$617760=3432 \times 18 \times 10$
木 m_8	六门厚	0	0	10	0
		衍数	乘率	深余	深分总

乃并八位深分总，共得 9956510 分，为深总。满衍母 85800 去之，不满 3710 分，展为 3 丈 7 尺 1 寸，为基地深。合问。

第 09 题：余米推数

问：有米铺，诉被盗去米，一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中壁箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼，系甲乙丙三名。甲称当夜摸得马杓，在左壁箩满舀入布袋；乙称踢着木履，在中壁箩舀入袋；丙称摸得漆碗，在右壁箩舀入袋。将归食用，日久不知其数。索到三器，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合。欲知所失米数，计脏结断，三盗各几何。

答曰：共失米九石五斗六升三合。

甲米三石一斗九升二合。

乙米三石一斗七升九合。

丙米三石一斗九升二合。

术曰：以大衍求之。

列三器所容为元数，连环求等，约为定母。以相乘为衍母。以定各约衍母，得衍数。各满定母去之，得奇。以奇定，用大衍求得乘率。以乘衍数，得用数。次以各剩米乘用，并之为总。满衍母去之，不满为每箩米。各以剩米减之，余为甲乙丙盗米，并之为共失米。

草曰：列三器所容，19 合，17 合，12 合为元数，连环求等，皆得一，不约。便以元数相乘，得 3876，为衍母。以各元数定母，以定约衍母，得衍数。甲得 204，乙得 228，丙得 323，各为衍数，列左行；以三定母，甲 19，乙 17，丙 12，列右行。具图如后：

甲	19 合	$17 \times 12 = 204$
乙	17 合	$19 \times 12 = 228$
丙	12 合	$19 \times 17 = 323$
	定母	衍数
衍母		$19 \times 17 \times 12 = 3876$

各满定母，去衍数得奇数。甲得 14，乙得 7，丙得 11。

甲	19	$204 = 19 \times 10 + 14$
乙	17	$228 = 17 \times 13 + 7$
丙	12	$323 = 12 \times 26 + 11$
	定母	奇数

各以奇、定，大衍求一，各得乘率：

求甲乘率图：

更相减损	商	大衍求一术
204 19	10	$\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
19 14	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$
14 5	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & 3 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}$
5 4	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -32 & 3 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -32 & 3 \end{bmatrix}$

4	1	4	$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -32 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -204 & 19 \\ 43 & -4 \end{bmatrix}$
1	0		19-4=15 为甲乘率

求乙乘率图:

更相减损	商	大衍求一术	
228	17	13	$\begin{bmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
17	7	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -2 \\ -13 & 1 \end{bmatrix}$
7	3	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 & -2 \\ -13 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -67 & 5 \\ 27 & -2 \end{bmatrix}$
3	1	3	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -67 & 5 \\ 27 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228 & -17 \\ -67 & 5 \end{bmatrix}$
1	0		5 为乙乘率

求丙乘率图:

更相减损	商	大衍求一术	
323	12	26	$\begin{bmatrix} -26 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
12	11	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -26 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -1 \\ -26 & 1 \end{bmatrix}$
11	1	11	$\begin{bmatrix} -11 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 & -1 \\ -26 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -323 & 12 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$
1	0		12-1=11 为丙乘率

甲得 15, 乙得 5, 丙得 11, 各为乘率, 列右行。对寄左行衍数, 具图如后:

甲	15	204
乙	5	228
丙	11	323
	乘率	衍数

以两行对乘之, 得用数: 甲得 3060, 乙得 1140, 丙得 3553, 列右行, 具图如后:

甲 (左筭)	3060=204×15
乙 (中筭)	1140=228×5
丙 (右筭)	3553=323×11
	用数

既得用数, 始验问题三筭剩米, 列左行。对三人所用, 以两行对乘之, 甲得 3060, 乙得 15960, 丙得 3553。

甲总	1	$3060 \times 1 = 3060$
乙总	14	$1140 \times 14 = 15960$
丙总	1	$3553 \times 1 = 3553$
	余米	各总

并三数，得 22573，为总数，满衍母 3876 去之；不满 3193 合，展为三石一斗九升三合，为三箩适满细数。以左箩剩一合减之，余三石一斗九升二合，为甲盗米，又为丙盗米。以中箩剩米一升四合减之，余三石一斗七升九合，为乙盗米。并三人米，共得九石五斗六升三合，为所失米。合问。

总数		$3060 + 15960 + 3553 = 22573$ 合
衍母		3876
不满		$22573 = 3876 \times 5 + 3193$
甲盗米	1	$3193 - 1 = 3192$ 合
乙盗米	14	$3193 - 14 = 3179$ 合
丙盗米	1	$3193 - 1 = 3192$ 合
所失米		$3192 + 3179 + 3192 = 9563$ 合

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

“大衍第一”现代文翻译

大衍总数术

大衍总数术流程：

首先定义：等，是两个数之间的公因数；

商余，是这两个数约去这个分等后得到的商；

总等，是所有数之间的公因数；

分等，是其中若干个之间的公因数；

原命题为：

$$\text{已知 } \begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1''} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2''} \\ \mathbf{M} \\ N \equiv a_k \pmod{m_k''} \end{cases}, \text{ 求 } N;$$

题目中提供的数据 m_i'' 称为“问数”，先求出诸问数 m_i'' 的总等，把问数分为四类：

元数	总等为 1 的整数		$m_i'' = m_i'$
复数	总等不为 1 的整数	此总等为复总 $D_{\text{复}}$	$m_i'' = m_i' D_{\text{复}}$
通数	至少有一数为分数的	其公分母，为通数单位 $D_{\text{通}}$	$m_i'' = m_i' D_{\text{通}}$
收数	至少有一数含 10^{-n} 的	其 10^{-n} 之最小者，为收数单位 $D_{\text{收}}$	$m_i'' = m_i' D_{\text{收}}$

命题转化为：

$$\text{已知 } \begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1'} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2'} \\ \mathbf{M} \\ N \equiv a_k \pmod{m_k'} \end{cases}, \text{ 求 } N;$$

范例：

元数	01 蓍卦发微（揲蓍），04 推库额钱（酒息，宋时酒肆称库），05 分臬推原（斛余），09 余米推数（失米）。
复数	02 古历会积（问一会积年），12 治历演纪（演纪）。
通数	03 推计土功（筑堤），06 程行计地（急足），07 程行相及（急足），08 积尺寻源（砌砖）。
收数	“假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会，而求积日”之类

对于元数 m_i' ，先按照两两连环求等的方法，求出诸元数 m_i' 两两之间的各个分等，各自

约去这个分等，以使得约分之后的数 $d'_{j,1}, d'_{j,2}, \mathbf{L}, d'_{j,k}$ ，两两之间，皆无等，才能停止；

复总 $D_{\text{复}}$	$m'_1, m'_2, \mathbf{L}, m'_k$ 元数
除数 c_1	$d'_{1,1}, d'_{1,2}, \mathbf{L}, d'_{1,k}$ 商余
除数 c_2	$d'_{j-1,1}, d'_{j-1,2}, \mathbf{L}, d'_{j-1,k}$ 商余
.....
除数 c_j	$d'_{j,1}, d'_{j,2}, \mathbf{L}, d'_{j,k}$ 商余

求定数：对上述的各个分等（即表中的“除数 c_j ”），按照下面方法判其奇偶：与其它分等都没有等的，即为无偶者，使其择商余者之一 $d'_{j,i}$ 而逐步还原[即以分等乘其对应商余者，以逐步还原其本元数]；与其它分等有相同的或者还有等的，即为见偶者，将见偶的几个分等相乘，得到的乘积择商余者之一 $d'_{j,i}$ 而逐步还原[即以分等共乘其对应商余者，以逐步还原其本元数]；若复总与某个分等还有等，则此等与此分等相乘，合并处理；若复总与其它分等皆无等，则复总可任择商余者之一而还原其本元数；诸分等分配完毕，复总与分等皆变换为 1；此时的部分商余是 $c_j d'_{j,i}$ 的形式，并且保证两两之间皆无等，即可取此时的商余为定数；由于 $c_j d'_{j,i}$ 的搭配方式可以不同，故定数可能不止一组，但运算结果是相同的[通常是尽可能使定数为整除元数（或复数）之最大者]；具体过程我们列表如下：

<p>将分等 c_i 全部分配给余数 $d'_{j,k}$，将它们的乘积作成个数 m'_i， 并且保证 m'_i 仍然保持两两无等，这个数 m'_i 就是定数。要求如下：</p>
<p>(1) 单位数 $D_{\text{通}}$，$D_{\text{收}}$ 不参构造；复总 $D_{\text{复}}$ 仍然按照下面要求处理。</p>
<p>(2) 从最后一个分等 c_j 开始向上检查，直到 c_1，这个分等来源于谁 m'_i 就回归于谁 m'_i；</p>
<p>(3) 与 c_j 相同的分等，也只能“从一而终”，回归于这一个元数 m'_i 中；</p>
<p>(4) 若某个分等 c_i 在最后一次出现时，是同时来源于若干个元数的， 则该分等 c_i 可随意“择一而嫁”，但不得“脚踏两只船”。</p>

命题转化为：

$$\text{已知} \begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \mathbf{M} \\ N \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}, \text{求 } N;$$

以定数 m_i 相乘，作为衍母 $M = \prod_{i=1}^k m_i$ ；以各定数 m_i 约衍母 M ，分别得到衍数 M_i 。

定数	衍数
m_1	$M_1 = M / m_1$
m_2	$M_2 = M / m_2$
.....
m_k	$M_k = M / m_k$

或者，以各定数为母，列于右行，各立天元 1 为子，列于左行，以非本行之母互乘子，也可以得到衍数；因此，定数也叫做定母。

衍数	左行子	右行母
$m_2 m_3 \cdots m_k$	1	m_1
$m_1 m_3 \cdots m_k$	1	m_2
.....
$m_1 m_2 \cdots m_{k-1}$	1	m_k

用衍数 M_i ，分别去除定母 m_i ，得到的余数，叫做奇数；

衍数	定母	奇数
$M_1 = M / m_1 \equiv t_1 \pmod{m_1}$	m_1	t_1
$M_2 = M / m_2 \equiv t_2 \pmod{m_2}$	m_2	t_2
.....
$M_k = M / m_k \equiv t_k \pmod{m_k}$	m_k	t_k

以奇数 t_i 与定母 m_i ，用大衍求一术计算，可以求出乘率 x_i ；如果奇数已经为 1，则 $x_i =$

1 就是乘率 [或者直接以衍数 M_i 与定母 m_i ，用大衍求一术计算，也可以求出乘率 x_i]。

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下；然后乃以右行上下，以少除多，递互除之【编者注：至此，是所谓的“求一术”，为连分数过程，以“须使右上末后奇一而止”为判定标志】；所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止【编者注：至此，是所谓的“大衍术”，为矩阵运算过程。事实上，“大衍术”与“求一术”相伴而行，故称“大衍求一术”】；乃验左上所得，以为乘率；或奇数已见单一者，便为乘率。【编者注：这一过程我用下面的“求乘率图”来展示，部分内容略有改动。】

求乘率图，亦即求使得“ $M_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ ”成立的 x_i ：

实 M_i	法 m_i	商 q_i	大衍求一术的矩阵运算
$r_{-1} = M_i$	$r_0 = m_i$	q_0	$\begin{bmatrix} -q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
r_0	r_1	q_1	$\begin{bmatrix} -q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{bmatrix}$
r_1	r_2	q_2	$\begin{bmatrix} -q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{bmatrix}$
r_2	r_3	q_3	$\begin{bmatrix} -q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 & P_2 \\ Q_3 & Q_2 \end{bmatrix}$
.....
r_{n-2}	r_{n-1}	q_{r-1}	$\begin{bmatrix} -q_{r-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-3} \\ Q_{k-2} & Q_{k-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{bmatrix}$
r_{n-1}	r_n	q_r	$\begin{bmatrix} -q_r & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{bmatrix}$
r_n	得0当止		$x_i = Q_{k-1}$ 或 $m_i + Q_{k-1}$ 为乘数 (乘率), 它使 $r_{-1} x_i \equiv 1 \pmod{r_0}$ 成立;

【编者注：秦九韶判定程序停止的条件是“验右上行余，得 $r_n = 1$ 当止”，其前提条件是“实 M_i 与法 m_i 互素”；我提供的程序可以不理睬这个条件，但是，判定的条件需要修改为“法下得0当止”，请参考“12 治历演纪”。

《秦九韶与数书九章》141 页的表达方式太复杂，虽然正确，却难以理解，主要是运算关系无法简单表达。(吴文俊主编，北京师范大学出版社，1986 年。)

用各个乘率 x_i ，乘对应的衍数 M_i ，得用数 $M_i x_i$ ；再乘以对应的余数，得到各个分总；

定母	余数	衍数	奇数	乘率	用数	分总
m_1	a_1	$M_1 = M / m_1$	t_1	x_1	$M_1 x_1$	$M_1 x_1 a_1$
m_2	a_2	$M_2 = M / m_2$	t_2	x_2	$M_2 x_2$	$M_2 x_2 a_2$
.....
m_k	a_k	$M_k = M / m_k$	t_k	x_k	$M_k x_k$	$M_k x_k a_k$

合并各个分总，得到总数 $N' \equiv \sum_{i=1}^n M_i x_i a_i$ ；用衍母 $M = \prod_{i=1}^k m_i$ 除总数 N' ，得到的

余数，与对应单位作积[亦即：通数者，为与通数单位 $D_{通}$ 之积；收数者，为与收数单位 $D_{收}$ 之积]，即为所求率数。

	单位	所求率数
元数	1	$N = N' \pmod{M}$
复数	1	$N = N' \pmod{M}$
通数	$D_{通}$	$N = D_{通} N' \pmod{M}$
收数	$D_{收}$	$N = D_{收} N' \pmod{M}$

【编者注：本译文选自我在论文集《威哉，大衍！》中对“大衍求一术”的解读，并非单纯的原文翻译。在《威哉，大衍！》中还有对“正负开方术”与“调日法”等等的解读，后面将直接应用，不再注明出处。】

第 01 题：阐发用著卜卦的微妙之处

问题：《周易》说：大衍之数五十，其用四十有九。又说：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四，以象四时，三变而成爻，十有八变而成卦。请问：所谓“大衍”是如何去“衍”的，涉及的数各是多少。

【编者注：

对“著卦发微”的分析，作得比较好的是：李继闵的“著卦发微”初探，《秦九韶与数书九章》124—137 页。

秦九韶阐释了“圣有大衍，微寓于易。”及其算法“奇余取策，群数皆捐”。具体的工作是：

- (1) 将《周易》中的两句话，转化为一次同余方程组的数学模型；
- (2) 提供了解决一次同余方程组的算法流程，亦即“大衍术”；】

【原文】著卦发微

问《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四，以象四时，三变而成爻，十有八变而成卦。欲知所衍之术，及其数各几何？

第 02 题：古四分历的一会积年

问题：古四分历：冬至为 365 日 $1/4$ 日，朔策为 29 日 $499/940$ ，甲子 60 日，各为一个周期。假令至 1246 年 11 月初一日（丙辰）为朔日，初五日（庚申）为冬至，初九日（甲子）；请问：古四分历气朔甲子一会积年、积月、积日，及历过年数，未至年数，各是多少。

【编者注：“淳祐丙午”是 1246 年；淳祐丙午（1246 年）十一月日历表：

11 月	53 丙辰 朔日	54 丁巳	55 戊午	56 己未	57 庚申 冬至	58 辛酉	59 壬戌	60 癸亥	01 甲子 初九	02 乙丑
	03 丙寅	04 丁卯	05 戊辰	06 己巳	07 庚午	08 辛未	09 壬申	10 癸酉	11 甲戌	12 乙亥
	13 丙子	14 丁丑	15 戊寅	16 己卯	17 庚辰	18 辛巳	19 壬午	20 癸未	21 甲申	

《算法的源流：东方古典数学的特征》446~455 页的分析非常全面。

- 本问题问不合，术草俱误。究其原委有二：(1) 是古四分历本身就不准确，误差很大；(2) 秦九韶是在开禧历的基础上研究四分历，二者甲子、不同，自然是难以匹配的。

以下是王守义修改的：见《数书九章新释》56~63 页[(宋)秦九韶原著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992 年 10 月]：

为了说明“古历会积”这类问题的实质，并尽量保存原文字起见，特为更正兼立术草并为释义如次：

问：古历：冬至以三百六十五日四分日之一，朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周。假令天正（原为“至淳祐丙午十一月”）丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子。欲求：古历气朔甲子一会积年、积月、积日，及历过未至年数，各几何。】

【原文】古历会积

问古历冬至以三百六十五日四分日之一，朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周。假令至淳祐丙午十一月丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子，欲求古历气朔甲子一会积年、积月、积日，及历过未至年数，各几何？

第 03 题：推算筑堤的土方长度

问题：修筑河堤，需要发起四个县的人力，分配给四个县的河堤长度的里数，或者步数都是相同的，宽度是 2 丈；每里按 360 步计算，每步按 5 尺 8 寸计算。人数按照物力来确定：甲县物力 138600 贯，乙县物力 146300 贯，丙县物力 192500 贯，丁县物力 184800 贯。每物力 770 贯分配人力一名，春程人功每平方按 60 尺计算，先到的县先开工。如今，甲、乙二县的工程全部完毕，丙县剩余 51 丈，丁县剩余 18 丈，再用不到一天的时间，即可全部完成。请问：河堤长度，以及分配给四个县的河堤长度，折合成里数，步尺数，各是多少。

【编者注：春程人功：春季每人每日的工作量。

原文的“欲知”不明确，导致答案难以理解，我修改为“欲知堤长，及四县夫所筑长，合步尺数、道里数，各几何。”

物力：

1.可供使用的物资。《汉书·食货志上》：“生之有时，而用之亡度，则物力必屈。”

2.辽、金、元时代的一种杂税。《金史·食货志一》：“租税之外，算其田园、屋舍、车马、牛羊、树艺之数及其藏镪多寡徵钱，曰物力。”

3.指负担这种杂税的户。《续资治通鉴·元世祖至元三十年》：“物力等户尽充军站，中间抛下，上户其能有几？”】

【原文】推计土功

问筑堤起四县夫，分给里步皆同齐，阔二丈，里法三百六十步，步法五尺八寸。人夫以物力差定：甲县物力十三万八千六百贯，乙县物力一十四万六千三百贯，丙县物力一十九万二千五百贯，丁县物力一十八万四千八百贯。每力七百七十贯科一名，春程人功平方六十尺，先到县先给。今甲、乙二县俱毕，丙县余五十一丈，丁县余一十八丈，不及一日，全功。欲知堤长及四县夫所筑各几何？

第 04 题：酒肆缴纳利息的问题

问题：总号在周围七座城市有七家酒肆，各酒肆向总号每日缴纳的利息相等，以贯为单位，用铜钱支付，年年如此。近来，由于铜钱稀少，同意各酒肆用十七界会子缴纳，按照当地市场实际的汇率折算。其中，酒肆甲有零钱 10 文，酒肆丁、庚各有零钱 4 文，酒肆戊有零钱 6 文，其余酒肆无零钱。酒肆甲所在城市的市场汇率为 12%，其余城市的市场汇率依次递减 1%，至酒肆庚为止。请问：各酒肆原来每日缴纳的利息是多少；按照官方“每贯准铜钱七百七十文足（77%）”折算为十七界会子是多少；如今以十七界会子实际的汇率计算，各酒肆每日缴纳的利息，以及大月三十日，小月二十九日缴纳的利息，各是多少；

【编者注：本题是“大衍总数术”中提到的“酒息”问题。宋时酒肆称库，因此，推库额钱是关于各酒肆向总号缴纳利息的计算问题。

题目中应该加入“官省七十七陌。”的说明，否则，不知所云。

陌(mò) <量>用同“佰”。相当于%。用于钱，指一百文 [hundred]。

又官库出纳缙钱，皆以八十为陌。——《旧五代史·王章传》

三分天下犹嫌小，一陌黄钱值几文？——《螭斋诗话》

故“官省七十七陌”就是“官方汇率为 77%”，这是会子与铜钱的官方汇率。但是，实际上的市场汇率却非如此。关于会子的贬值问题，简单介绍如下：

会子在立界之初，币值坚挺，会子与铜钱的比价基本上保持在每缙值 770 文左右。乾道以后，会子发行额大增，而会子的发行准备金却分文未有增加，故会子的价值低落，二、三界会子每缙值铜钱 600 文。淳熙十六年（1189 年），临安府会子一缙尚值 700 余文铜钱，至宁宗庆元元年（1195 年），会子每缙跌至 620 文，嘉定三年（1210 年），会子一缙只值 400 余文，端平三年（1236 年），刚发行不久的十七界会子，每缙仅值 300 文；嘉熙四年（1240 年），十八界会子行用，每缙能兑铜钱 250 文（相当于十七界会子每缙只能兑铜钱 50 文），到宝年间（1253—1258 年），十八界会子每缙只能兑铜钱 192 文（相当于十七界会子每缙只能兑铜钱 38.4 文），至德元年（1275 年）“以更易关子以来，十八界二百不足以贸一草履，而以供战士一日之需……，饥寒窘用，难责死斗。”（《桐江集》卷 6）。

关于日息旧会，大月旧会，小月旧会的计算公式，《数书九章新释》73 页给出的计算公式（ γ ），（ δ ），（ ϵ ）与 80—82 页的计算完全不相干，并且与“草曰”叙述不符。正确的计算公式可参考《秦九韶与数书九章》172 页的说明。

原文中“草曰：……，或以日息减大息，余为小月息。合问。”无法得到“答曰”的结果，计算公式应该是错误的。】

【原文】推库额钱

问有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳。近缘见钱希少，听各库照当处市陌，准解旧会。其甲库有零钱一十文，丁、庚二库各零四文，戊库零六文，余库无零钱。甲库所在市陌一十二文，递减一文至庚库而止。欲求诸库日息元纳足钱、展省，及今纳旧会，并大小月分各几何？

第 05 题：从售米的余数推出原来米的数量

问题：兄弟三人耕种的土地不错，把今年收成的米平均分成三份，各自出外销售。甲出售给本郡的官场，剩余 3 斗 2 升；乙出售给安吉乡民，剩余 7 斗；丙出售给平江揽户，剩余 3 斗。已知：官斛 8 斗 3 升，安吉乡斛 1 石 1 斗，平江市斛 1 石 3 斗 5 升。请问：收成的米总共有多少，三人所分的米是多少，各自出售米的斛数是多少。

【编者注：粦（糶 tiào）<动>糶（tiào）谷。本义：卖出谷物。

求“各粟石数”完全没有必要，应该是求“各粟斛数”才合理。】

【原文】分粟推原

问有上农三人，力田所收之米，系用足斗均分，各往他处出粦。甲粦与本郡官场，余三斗二升；乙粦与安吉乡民，余七斗；丙粦与平江揽户，余三斗。欲知共米，及三人所分各粟石数几何？

第 06 题：计算距离和行程时间

问题：前线军队打了胜仗，一清早，同时派遣三名通讯员分别前往京城报捷，顺便传递其它信息。甲数日前的申末到达京城，乙也于前几日到京城，丙今日辰末才到达京城；根据他们的叙述知道：甲每日行 300 里，乙每日行 240 里，丙每日行 180 里，每日在卯初出发，申末歇息。请问：前线到京城里数是多少，三人各行时日是多少。

【编者注：急足：亦作“急脚”、“急脚子”。送紧急文书的仆役，每天最快要跑四百里，相当于现代部队里的通讯员；（对照参考：急递铺：元代在军事紧急时，设置急递铺作传递文书的驿站）。

都(dū):建有宗庙的城邑。周时各国把国都叫国;把有宗庙或先君神主的城叫都,没有的叫邑。都下:京都之下,即京城。

王守义《数书九章新释》89页最后一段应该与90页第一段调换。91页的注:“其行不及全日者,按每日行6时计”,故已知条件应该加入明确的时刻说明。】

【原文】程行计地

问军师获捷,当早点差急足三名,往都下节节走报,其甲于前数日申末到,乙后数日未正到,丙于今日辰末到。据供:甲日行三百里,乙日行二百四十里,丙日行一百八十里。问:自军前至都里数,及三人各行日数几何?

第07题:三人同时抵达

问题:有三名通讯员,甲每天可行300里,乙每天可行250里,丙每天可行200里。先差派丙前往某处传递文书;丙已经走了3日,又有文书需要派遣乙追赶丙同时交付;乙已经走了2日,还有文书需要派遣甲追赶乙同时交付。一路上,直到同时抵达目的地之前,三人没有碰面。请问:目的地离此地的里数是多少。

【编者注:原文的“先差丙往他处下文字,既两日;又有文字遣乙追付丙,已半日,复有文字续令甲赶付乙。”与事实不符,应取[清]黄宗宪《求一术通解》的修改数据。《数书九章新释》100页的修改意见不正确。

原文的“先欲知乙果及丙甲果及乙得日并里”语焉不详,弃之。

原文“术曰:以均输求之,以大衍入之。”应该是搞错了。其实应该是“以均输求之”为一种解法,“以大衍求之”为另一种解法,二者互不相干。事实上,这类型问题“以均输求之”才是标准的解答方法;秦九韶用大衍术求解,只是想说明大衍术的用途而已。】

【原文】程行相及

问有急足三名,甲日行三百里,乙日行二百五十里,丙日行二百里。先差丙往他处下文字,既两日;又有文字遣乙追付丙,已半日,复有文字续令甲赶付乙。三人偶不相及,乃同时俱至彼所。先欲知乙果及丙甲果及乙得日并里,次欲知:彼处去此里数,各几何。

第08题:积尺寻源

问题:打算砌一段地基,现在存有大方砖,小方砖,六门砖,城砖这四种砖。要求工匠只用其中一种砖来砌,平砌、侧砌都可以,只要恰好够用即可。工匠测量计算之后,声称:

	基宽	基深	砖尺寸
大方砖	多6寸	少6寸	13寸
小方砖	多2寸	少3寸	11寸
城砖长	多3寸	少1寸	12寸
城砖阔	多3寸	少1寸	6寸
城砖厚	多5分	多1寸	2.5寸
六门长	多3寸	多1寸	10寸
六门阔	多3寸	多1寸	5寸
六门厚	多1寸	多1寸	2寸

都不合适,免不了要敲破砖料填补。四种砖的尺寸分别是:

	长	宽	厚
大方砖	1尺3寸		
小方砖	1尺1寸		
城砖	1尺2寸	6寸	2寸5分
六门砖	1尺	5寸	2寸

请问:地基深,地基宽,各是多少。

【编者注:此问实为两题,当注意区分。】

【原文】积尺寻源

问欲砌基一段，见管大小方砖六门城砖四色，令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称用大方料，广多六寸，深少六寸；用小方，广多二寸，深少三寸；用城砖，长广多三寸，深少一寸；以阔深少一寸，广多三寸；以厚广多五分，深多一寸；用六门砖，长广多三寸，深多一寸；以阔广多三寸，深多一寸；以厚广多一寸，深多一寸；皆不匱（kē）匱，未免修破砖料稗补。其四色砖，大方方一尺三寸，小方方一尺一寸，城砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分；六门砖长一尺，阔五寸，厚二寸。欲知基深广几何？

第 09 题：根据剩余米数推出原来米数

问题：有间米铺投诉：夜里被盗去三箩米，都是刚好装满的，不记得具体数量。如今，左边箩还剩 1 合，中间箩还剩 1 升 4 合，右边箩还剩 1 合。后来，捕获了盗贼，是甲、乙、丙三人。甲声称：当天夜里摸到的是马杓，在左边箩里舀入布袋，每次都是装满的；乙声称：当天夜里踢到一只木履，在中间箩舀入布袋，每次也是装满的；丙声称：当天夜里摸到的是漆碗，在右边箩里舀入布袋，每次同样是装满的；三人盗回家食用，日子久了，也不知道具体数量是多少。现在，找到这三种容器：马杓装满容下 1 升 9 合，木履装满容下 1 升 7 合，漆碗装满容下 1 升 2 合。请问：丢失米的数量是多少，三人盗去的米各是多少。

【编者注：把高深的数学问题趣味化，颇有新意。**】**

【原文】余米推数

问有米铺，诉被盗去米，一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中壁箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼，系甲乙丙三名。甲称当夜摸得马杓，在左壁箩满舀入布袋；乙称踢着木履，在中壁箩舀入袋；丙称摸得漆碗，在右壁箩舀入袋。将归食用，日久不知其数。索到三器，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合。欲知所失米数，计脏结断，三盗各几何？

禁止制作为
商品销售！

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

天时第二

10 推气治历，11 治历推闰，12 治历演纪，13 缀术推星，14 揆日究微
15 天池测雨，16 圆罍测雨，17 峻积验雪，18 竹器验雪

第10题：推气治历

问：太史测验天道。庆元四年（1198年，戊午岁）冬至三十九日[日辰：癸卯]九十二刻四十五分，绍定三年（1230年，庚寅岁）冬至三十二日[日辰：丙申]九十四刻一十二分，欲求中间嘉泰（1204年，甲子岁）气骨，岁余，斗分各得几何。

馆按：绍定三年庚寅（1230年）之冬至，实绍定四年辛卯（1231年）之始，辛卯距戊午三十四年，积年为三十三。

答曰：气骨：十一日三十八刻二十分八十一秒八十小分；

岁余：五日二十四刻二十九分三十秒三十小分；

斗分：空日二十四刻二十九分三十秒三十小分。

术曰：先距前、后年数为法，置前测日、刻、分减后测日、刻、分，余为率[不足减则加纪策]，以纪策累加之。今及天道，合用五日以上数为实，以法除实，得岁余；去全日，余为斗分；以所求中间年，上距前测年数，乘岁余，益入前测日、刻、分，满纪策去之，余为所求气骨。

草曰：置前测戊午岁，距前岁庚寅岁，得33为法；置前测戊午岁，冬至39日[日辰：癸卯]92刻45分，减后测绍定三年庚寅岁，冬至32日[日辰：丙申]94刻12分；

干支年	公元年	年差	纪法：60日	刻、分、秒、小分：百进制
庆元四年戊午岁	1198年	-6	冬至39日	92刻45分=9245分
绍定三年庚寅岁	1230年	26	冬至32日	94刻12分=9412分
嘉泰甲子岁	1204年			
差		33	32+60-39=53	167分=1刻67分

[岁余，斗分]今后测者少，不及前测者以减，乃加纪法60日于后测日内，得92日94刻12分，然后用前测者减之，余53日1刻67分，为率；按术，当以法33除率，须使商数必得5日以上乃可；今率未得五日，乃两度累加纪法120入率，内共得173日1刻67分为刻实，如法除之，得5日24刻29分30秒30小分[不尽弃之]为岁余；乃去全5日，得24刻29分30秒30小分，为斗分；

庆元四年戊午岁	39.9245日
绍定三年庚寅岁	32.9412+60+2×60日
差	173.0167日
÷岁差33	5.242930303日
岁余	5.24293030日
斗分	0.24293030日

[气骨]次推嘉泰甲子，上距庆元戊午岁，得6，以乘岁余5日24刻29分30秒30小分，得31日45刻75分81秒80小分，益入前测戊午岁39日92刻45分，得71日38刻20分81秒80小分，满纪法60去之，余11日38刻20分81秒80小分，为所求甲子气骨之数。合问。

庆元四年戊午岁	1198年39日92刻45分
嘉泰甲子岁	1204年
岁余	5.24293030日
岁差乘岁余	$6 \times 5.24293030 = 31.45758182$
益入庆元四年戊午岁	$39.9245 + 31.45758182 = 71.38208182$
所求甲子气骨数	11.38208182

馆按：气骨者，年冬至时，距甲子日，子正初刻后之日分也；岁余者，岁实去六甲子之余日分也；斗分者，岁实去三百六十五日之余分也；此未知岁实之法，故先以前后两气骨相减，余数为实，以积年为法，除之，岁余约五日余，纪日六十，故实数内，累加六十日，至商得五日上而止，则实数为积岁，余之数以积年除之，得岁余日分；既得岁余，以甲子积年六乘之，得甲子积岁，余与前测气骨相加，满纪法去之，余即甲子气骨也。

毛氏岳生曰：授时历议云：统天历庆元五年己未，杨忠辅造行，八年至开禧丁卯，先天六刻。道古此问，戊午岁冬至日分，较开禧历所推，适先六刻，盖由当时实测天道如此，非有误也。

【编者注：计算公式：岁余 = (后测 + 60 × 某个整数 - 前测) ÷ 前后测年差；

斗分 = 岁余 - 5；气骨 = (前测 + 岁余 × 中间年与前测年差) ÷ 60 的余数；】

版权为所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 11 题：治历推闰

问：开禧历，以嘉泰四年甲子岁天正冬至为一十一日[日辰乙亥]四十四刻六十一分五十四秒，十一月朔一日[日辰乙丑]七十五刻五十五分六十二秒，问闰骨，闰骨率各几何。

答曰：闰骨，九日六十九刻五分九十一秒[不尽一百六十九分秒之一百二十一]；
闰骨率，十六万三千七百七十一；

术曰：以日法各通气朔日刻分秒，各为气骨，朔骨分，其气骨分，如约率而一，约尽者为可用[或收弃余分在一刻以下者亦可用]，然后与朔骨分相减，余为闰骨率；以日法约之，为闰骨策。

草曰：置本历日法 16900，先通冬至 11 日 44 刻 61 分 54 秒，得 193440 分 26 小分为实，其历，约率系 3120，以约之，得 62，可用，其余小分 26，乃弃之，只用 193440 为气骨分；

日法	16900
气朔	11.446154 日
气骨	$16900 \times 11.446154 = 193440.0026$ 日
	$193440.0026 \div 3120 = 62.00000083$ 日
朔骨分	

次置朔 1 日 75 刻 55 分 62 秒，以本历日法 16900 乘之，得 29668 分 99 秒 78 小分，将近 1 分，故于气骨内所弃 26 小分，借 22 小分，以补朔内，收上，得 29669，为朔骨，然后以朔骨分减气骨分，余有 163771，为闰骨率；复以日法除之，得闰骨策 9 日 69 刻 5 分 91 秒，不尽 121 算，直命之为 169 分秒之 121，合问。

气朔	11.446154 日
朔	1.755562 秒
闰骨率	$16900(11.446154 - 1.755562) = 163771$
闰骨策	$163771 \div 16900 = 9.690591716$

馆接：此题若置冬至日分，内减经朔日分，余九日六十九刻五分九十二秒，得闰骨策。比原草仅多一百六十九分秒之四十八分；草中气骨内弃小分二十六，朔骨分内进二十二，并之为一百六十九分秒之四十八，其不径相减，而必用通分，约分，累乘，累除者，为向后推算用耳。

【编者注：公式：闰骨率=日法(气骨-朔骨)；闰骨策=闰骨率÷日法；】

第 12 题：治历演纪

问：开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知：推演之原，调日法，求朔余，朔率，斗分，岁率，岁闰，入元岁，入闰，朔定骨，闰泛骨，闰缩，纪率，气元率，元闰，元数，及气等率，因率，葩率，朔等数，因数，葩数，朔积年，二十三事，各几何？

答曰：日法，一万六千九百；

朔余，八千九百六十七；

朔率，四十九万九千六十七；

斗分，四千一百八；

岁率，六百一十七万二千六百八；

岁闰，一十八万三千八百四；

入元岁，九千一百八十；

入闰，四十七万四千二百六十；

朔定骨，二万九千六百六十九；

闰泛骨，一十六万三千七百七十一；

闰缩，一十八万八千五百七十八；

纪率，一百一万四千；

气元率，一万九千五百；

元闰，三十七万七千八百七十三；

元数，四百二；

气等率，五十二；

因率，一百四十四；

葩率，三百二十五；

朔等数，一。

因数，四十五万七千九百九十九；

葩数，四十九万九千六十七；

朔积年，七百八十三万九千；

积年，七百八十四万八千一百八十三；

术曰：以历法求之，大衍入之。

调日法，如何承天术，用强弱母子互乘，得数，并之，为朔余。

以二十九日通日法，增入朔余，为朔率。

又以日法乘前历所测冬至气刻分，收弃末位为偶数，得斗分。

与日法，用大衍术入之，求等数，因率，葩率。

以纪乘等数为约率。

置所求气定骨，如约率而一，得数，以乘因率，满葩率去之，不满以纪法乘之，为入元岁。

次置岁日，以日法通之，并以斗定分，为岁率。

以十二月乘朔率，减岁率，余为岁闰。

以岁闰乘入元岁，满朔率击之，不满为入闰。

与闰骨相减之，得差，[或适足，便以入元岁为积年，后术开不用，或差在刻分法半数以下者，亦以入元岁为积年]。必在刻分法半数以上，卻以闰泛骨，并朔率，得数，内减入闰，余与朔率，求闰缩。[在朔率以下，便为闰缩；以上，用朔率减之，亦得。]以纪法乘日法，为纪率。

以等数约之，为气元率。

以气元乘岁闰，满朔率去之，不满为元闰。

虚置一亿，减入元岁，余为实，元率除之，得乘限。

乃以元闰与朔率，用大衍术入之，求得等数，因数，蓍数。

以等数约闰缩，得数，以因数乘之，满蓍数去之，不满，在乘限以下，以乘元率，为朔积年。

并入元岁，为演纪积年。又加成历年。

今人相乘演积年，其术如调日法，求朔余、朔率，立斗分、岁余，求气骨、朔骨、闰骨，及衍等数、约率、因率、蓍率，求入元岁、岁闰、入闰元率、元闰，已上皆同此术。但其所以求朔积年之术，乃以闰骨减入闰，余谓之闰赢，卻与闰缩、朔率，列号甲乙丙丁四位，除乘消减，谓之方程，乃求得元数；

以乘元率，所得谓之朔积年。

加入元岁，共为演纪岁积年。

所谓方程，正是大衍术。[今人少知。]非特置算系名，初无定法可传，甚是惑误后学，易失古人之术意。故今术不言闰赢，而曰入闰差者，盖本将来可用，入元岁便为积年之意。故今止将元闰、朔率二项，以大衍，先求等数、因数、蓍数者，乃做前求入元岁之术理，假闰骨如气骨，以等数为约数，及术乘数、蓍数，以等约闰缩，得因乘数，精蓍去之，不满，在限下，以乘元率，便得朔积年。

亦加入元岁，共为演纪积年。此术非惟止用乘除省便，又且于自然中，取见积年，不惑不差矣。

新术敢不用闰赢而求者，实知闰赢已存于入闰之中。但求朔积年之奇分，与闰缩等，则自与入闰相合，必满朔率，所去故也。

数理精微，不易窥识，穷年致志，感于梦寐，幸而得之，议不敢隐。

草曰：本历以何承天术，调得 16900 为日法。

强率子	17	
强率母	49	$100=49+3\times 17$
弱率子	9	
弱率母	26	
分母变形		$16900=169\times 100=169\times (1\times 49+3\times 17)=169\times 49+507\times 17$
调整 507		$507=10\times 49+17$
调整分母		$16900=(169+10\times 17)\times 49+17\times 17$
分子		$(169+10\times 17)\times 26+17\times 9=8967$ ，直观的选取方法见下表

设： $m=169+17i$ ； $n=507-49i$ ；

i	强数 m	弱数 n	$49m+17n$	朔余 $26m+9n$	
0	169	507	16900	8957	0.5300000000
1	186	458	16900	8958	0.5300591716
2	203	409	16900	8959	0.5301183432
3	220	360	16900	8960	0.5301775148
4	237	311	16900	8961	0.5302366864
5	254	262	16900	8962	0.5302958580
6	271	213	16900	8963	0.5303550296
7	288	164	16900	8964	0.5304142012
8	305	115	16900	8965	0.5304733728
9	322	66	16900	8966	0.5305325444
10	339	17	16900	8967	0.5305917160
11	356	-32	16900	8968	0.5306508876

系 339 强，17 弱；先以强数 339，乘弱母 26，得 8814 于上；次以弱数 17，乘弱子 9，得 153，并上，共得 8967，为朔余。

次以日法 16900，通朔策 29 日，得 490100，增入朔余，得 499067，为朔率。

又以日法 16900，乘统天历所测，每岁冬至周日下 24 刻 31 分，得 4108 分 39 秒，为斗泛分。斗泛分见偶则弃，见奇则收为偶。验 8 分既偶，遗弃 39 秒，只以 4108 分为斗定分。

斗定分 4108 分，与日法 16900，以大衍术入之，求得 52 为等数，144 为因率，325 为藪率。

以甲子 60 为纪法，乘等数，得 3120，为约率。

日法	16900	$16900=52 \times 325$
朔策	29 日	
朔余	8967	
朔率		$16900 \times 29 + 8967 = 499067$
回归年	365.2431 日	
岁余	0.2431	
斗泛分		$16900 \times 0.2431 = 4108.39$ 分
斗定分	4108 分	$4108 = 52 \times 79$
等数	52	
因率	144	解法见下表
藪率		$16900 \div 52 = 325$
纪法	60	
约率		$60 \times 52 = 3120$

求因率图：

更相减损		商	大衍求一术
4108	16900	0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
16900	4108	4	$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4108	468	8	$\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 33 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$
468	364	1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 33 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -37 \\ -8 & 33 \end{bmatrix}$
364	104	3	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -37 \\ -8 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 144 \\ 9 & -37 \end{bmatrix}$
104	52	2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -35 & 144 \\ 9 & -37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 & -325 \\ -35 & 144 \end{bmatrix}$
52	0		144 为因率

次置本历所用嘉泰甲子岁气骨 11 日 44 刻 61 分 54 秒，以乘日法 16900，得 193440 分 26 秒，为气泛骨。

满约率 3120 而一，故就近乃弃微秒，只以 193440 为气定骨。

然后以约率 3120 除之，得 62，以因率 144 乘之，得 8928，满蓍率 325 去之，不满 153 以纪法 60 乘之，得 9180 年，为入元岁。

次置岁日 365，以日法 16900 通之，得 6168500，并斗定分 4108，得 6172608，为岁率。

次以 12 月乘朔率 499067，得 5988804，减岁率，余 183804，为岁闰。

以岁闰乘入元岁 9180，得 1687320720，满朔率去之，不满 474260，为入闰。

次置本历所用嘉泰甲子岁天正月朔 1 日 75 刻 55 分 62 秒，以日法 16900 乘之，得 29668 分 9978 秒，为朔泛骨。就近收秒为 1 分，共为 29669，为朔定骨数。

然后乃以朔定骨减气定骨 193440，余 163771，为闰泛骨。

日法	16900	
甲子岁气骨	11.446154	
气泛骨		$16900 \times 11.446154 = 193440.0026$ 分
气定骨	193440	
约率	3120	
因率	144	
蓍率	325	$(193440 \div 3120) \times 144 = 8928 = 325 \times 27 + 153$
纪法	60	
入元岁		$60 \times 153 = 9180$ 年
岁日	365	
斗定分	4108	
岁率		$365 \times 16900 + 4108 = 6172608$
朔率	499067	
岁闰		$6172608 - 12 \times 499067 = 183804$
入闰	474260	$183804 \times 9180 = 1687320720 = 499067 \times 3380 + 474260$
月朔	1.755562	
朔定骨	29669	$1.755562 \times 16900 = 29668.9978$ ，朔泛骨
闰泛骨		$193440 - 29669 = 163771$

置日法 16900，以 200 约之，得 84 半，为半刻法。

次以闰泛骨，与入闰相课，减之，余 310489 [此是闰赢]；以朔率 499067 减之，余 188578，便为闰缩。

次以纪策 60 乘日法 16900，得 1014000 为纪率。以等数 52 约纪率，得 19500，为气元率。以气元率，乘岁闰 183804，得 3584178000，满朔率去之，不满 377873 为元闰。

次置 1 亿，以入元岁 9180 减之，余 99990820 为实。以气元率 19500 为法，除之，得 5127，为乘元限数。

日法	16900	$16900 = 52 \times 325$
半刻法		$16900 \div 200 = 84$
闰泛骨	163771	
入闰	474260	$474260 - 163771 = 310489$ ，闰赢
朔率	499067	
闰缩		$499067 - 310489 = 188578$
纪策	60	
纪率		$60 \times 16900 = 1014000 = 52 \times 19500$
气元率	19500	

岁闰	183804	
元闰	377873	$19500 \times 183804 = 3584178000 = 499067 \times 7181 + 377873$
入元岁	9180	
乘元限数	5127	$(100000000 - 9180) \div 19500 = 5127.734359$

乃以元闰 377873，与朔率 499067 求等，得等数 1；用大衍术求因数：

更相减损	商	大衍求一术
377873	499067	0 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
499067	377873	1 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
377873	121194	3 $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
121194	14291	8 $\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -33 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
14291	6866	2 $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & -33 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53 & 70 \\ 25 & -33 \end{bmatrix}$
6866	559	12 $\begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -53 & 70 \\ 25 & -33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 661 & -873 \\ -53 & 70 \end{bmatrix}$
559	158	3 $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 661 & -873 \\ -53 & 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2036 & 2689 \\ 661 & -873 \end{bmatrix}$
158	85	1 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2036 & 2689 \\ 661 & -873 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2697 & -3562 \\ -2036 & 2689 \end{bmatrix}$
85	73	1 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2697 & -3562 \\ -2036 & 2689 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4733 & 6251 \\ 2697 & -3562 \end{bmatrix}$
73	12	6 $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4733 & 6251 \\ 2697 & -3562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31095 & -41068 \\ -4733 & 6251 \end{bmatrix}$
12	1	12 $\begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31095 & -41068 \\ -4733 & 6251 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -377873 & 499067 \\ 31095 & -41068 \end{bmatrix}$
1	0	$499067 - 41068 = 457999$ 为因率（因数）

得因数 457999，以等数 1，约因数，得蔀数 499067；后以等数 1，约闰缩，只得 188578；以因数 457999 乘之，得 86368535422，满蔀数 499067 去之，不满 402，在乘元限数以下，为可用，乃以乘气元率 19500，得 7839000 年，为朔积年。

并入元岁 9180，共得 7848180，为嘉泰 4 年甲子岁积算。

本历系于丁卯岁进里，又加丁卯 3 年，共为 7848183 算，为本历积年。合问。

朔等数	1	
因数	457999	
部数		$457999 \div 1 = 457999$
朔率	499067	
闰缩	188578	
		$188578 \times 457999 = 86368535422 = 173060 \times 499067 + 402$
乘元限数	5127	
乘气元率	19500	
朔积年		$19500 \times 402 = 7839000$
入元岁	9180	
积算		$9180 + 7839000 = 7848180$
丁卯	3 年	
本历积年		$7848180 + 3 = 7848183$

【编者注：秦九韶《数书九章》之“大衍类”题实为 10 题，惟“治历演纪”一题没有用“大衍求一术”解决，甚为遗憾。究其原因，应该是 N 的系数不为 1 所致；又或者是本题只涉及两个同余方程，完全可以直接按照二元一次方程的办法处理，这与前面的 9 题不相同，因此，对“治历演纪”一题秦九韶才没有用“大衍求一术”解决。相关解法，可参考我的论文集《威哉，大衍！》“演纪类问题”。】

版权所有！
禁止制作为
商品销售！

第13题：缀术推星

问：岁星合伏。经一十六日九十分，行三度九十分，去日一十三度，乃见。后顺行一百一十三日，一十七度八十三分，乃留。欲知：合伏段，晨疾初段，常度，初行率，末行率，平行率，各几何。

馆按：此以两积日之，递差，积度，求各行率也。盖合伏初日，其行最疾；以次渐迟，迟极则留。总其积度，略如递减差分，故古法皆以其术步之。

答曰：合伏：一十六日九十分；

常度：三度九十度；

初行率：二十三分九十七秒；

平行率：二十三分二秒；

末行率：二十二分七秒；

晨疾初：三十日；

常度：六度一十三分；

初行率：二十二分六秒；

平行率：二十分三十七秒；

末行率：一十八分八十秒；

术曰：以方程法求之。

置见日，减一，余，半之，为见率；

以伏日，并见日，为初行法；

以法半之，如见率，共为伏率；以伏日乘伏率，为伏差；以见日乘见率，为见差；

以见日乘伏差，于上；以伏日乘见差，减上，余为法；

以见日乘伏度，为泛；以伏日乘见度，减泛，余为实；实满法而一，为度；不满，退除为分、秒，即得日差。

馆按：此求逐日之递差为日差也。术曰方程，非也。其所谓见数者，乃徒设一数，宛转附会，使合于方程之行列也。如：“见日减一，折半，为见率，并伏”。见日折半为半总日，既以半总日加见率，先以伏日乘之，后以见日乘之；复置见率，先以见日乘之，后以复日乘之，相减，然后为法，岂非半总日不用加见率，但以伏日，见日连乘之即可为法乎？特多立名目，故为曲折颠倒，使人不易办耳。今去其见率，另为步算于后，以明其立法之本意焉。

【编者注：勿以今术评古人，否则，徒增笑耳。】

法：以合伏日除伏行度，得二十三分[〇七六九二三]，为合伏日折中第八日四十五分一日之行度[即第七日九十五分至第八日九十五分之行度]；以顺行日除顺行度，得十五分[七七八七六一]，为顺行日折中第五十六日五十分一日之行度；两一日之行度相减，行七分[一九八一六二]，为合伏第八日四十五分与顺行第五十六日五十分两一日之行度较，为实；并合伏顺行两日数而半之，得六十四日[九五]，为合伏第八日四十五分至顺行五十六日五十分之积日，为法，除之，得十一秒[二三六五八五]，为一日递差之数，即日差。

若不先用除，则以两日数，与两行度互乘，相减，为实；两日数相乘，又并两日数而半之，再乘，为法，得数亦同。

求初行率：置初行法，减一，余乘日差，为寄；以半初行法，乘寄，得数，又加伏度，见度，共为初行实；以法退除之，得合伏日初行率。

馆按：此求合伏第一日最疾之行也。其法即递减差分，有总数，有次数，有每次差数，求初次最大之数也。初行法减一，乘日差，为寄者，合伏初日与顺行末日两行率之差也；半法，乘寄，与积差等，故加共度为实，以共日为法，除之，为合伏初日行率二十三分九十七秒也。

求末行率：以段日乘日差，减初行率，余为末行率；或置段日，减一，余乘日差，减初

行率，余为末行率。

馆按：此求合伏末日之行率也。以段日乘日差，求合伏初末日两行率之较也。既得初末日两行率之较，以减初行率，即末行率也。

求平行率：以初行率并未行率而半之，为平行率；

馆按：此即均分合伏度为每日之平行率也。与递加，递减，有首尾数，求中数者同，应与伏日除伏度数同，不同者，本非递差之数也。

求交段差：以各段常日下分数，减全日一百分，余乘末日行率，为交段差，[馆按：此即各段日下分数不及一日所差之行分也。求之，以备后数加减。]累减前段积度，以益后段积度，各为常度；[馆按：常度，即各段积度也。求晨疾初段常度，见常中专解于后。]

草曰[兼俱算图]：以伏日，随伏度，为右行；以见日，随见度，为左行；以度对度，日对日，其度于上，日于中，空其下，列之。

初图	左行		右行	
上	见度	17.83 度	伏度	3.9 度
中	见日	113 日	伏日	16.90 日
下				

置见日 113 日，减 1，余 112，以半之，得 56 日，为见率；

以伏日 16 日 90 分，并见日 113，得 129 日 90 分，为初行法。

以初行法半之，得 64 日 95 分，并见率 56 日，得 120 日 95 分，为伏率；

法图	
见率	$(113-1) \div 2 = 56$ 日
初行法	$16.90 + 113 = 129.90$ 日
半法	$129.90 \div 2 = 64$ 日 95 分
伏率	$129.90 \div 2 + 56 = 120.95$ 日

以初行法寄之，以伏率归右下，以对见率，仍分左右两行，为首图。

首图	左行		右行	
上	见度	17.83 度	伏度	3.9 度
中	见日	113 日	伏日	16.90 日
下	见率	56 日		

以首图伏日 16 日 90 分，乘伏率 120 日 95 分，得 2044 日 5 分 50 秒，为伏差，于右下；

以首图见日 113，乘见率 56，得 6328 日，为见差，于左下，乃成次图；

次图	左行		右行	
上	见度	17.83 度	伏度	3.9 度
中	见日	113 日	伏日	16.90 日
下	见差	$113 \times 56 = 6328$ 日	伏差	$16.90 \times 120.95 = 2044.0550$ 日

凡方程之术，先欲得者，存之，以未欲得者，互遍乘两行诸数；

今验此图，先欲得日差，故存其左、右之上、下，以左、右之中，伏日数，见日数，互遍乘两行；

乃以次图右中伏日 16 日 90 分，先遍乘左行，毕：左上得 301 度 32 分 70 秒，左中得 1009 日 70 分，左下得 106943 日 20 分；

又以次图左中见日 113 日，遍乘右行，毕：右上得 440 日 70 分，右中亦得 1009 日 70 分，右下得 230978 日 21 分 50 秒。

故以两行所得，变名泛积法，而成才图；

才图	左行	右行

上	见泛度	$16.9 \times 17.83 = 301.327$	伏泛度	$113 \times 3.9 = 440.7$
中	见积日	$16.9 \times 113 = 1909.7$	伏积日	$113 \times 16.90 = 1909.7$
下	见法	$16.9 \times 6328 = 106943.2$	伏法	$113 \times 2044.055 = 230978.215$

乃验才图：左上、下皆少，用减右行，毕；行上余 139 度 37 分 30 秒，为日差实；右中空，右下得 124035 日 1 分 50 秒，为日差法；

维图	左行		右行	
上	见泛度	301.327	伏泛度	$440.7 - 301.327 = 139.373$ ，日差实
中	见积日	1909.7	伏积日	$1909.7 - 1909.7 = 0$
下	见法	106943.2	伏法	$230978.215 - 106943.2 = 124035.015$ ，日差法
日差	$139.373 \div 124035.015 = 0.0011236585088492954993394405603934$			

今维图，法多，实少，除得 0 度 0 分 11 秒 23 小分 65 小秒 85 微分；不尽 85 微分 8 微秒，收为 1 小秒，得日定差 11 秒 23 小分 66 小秒。既得日差，乃求初行率。

求初行率：置法图内初行法 129 日 90 分，内减去 1 日，余 128 日 90 分，乘日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得 0 度 14 分 48 秒 39 小分 58 小秒 17 微分，为寄；

次置寄，以半法 64 日 95 分乘之，得 9 度 40 分 73 秒 30 小分 83 小秒 73 微秒，为得数；

以得数，加伏度 3 度 90 分，见度 17 度 83 分，共得 31 度 13 分 73 秒 30 小分 83 小秒 73 微分，为初行实；如初行法 129 日 90 分而一，乃得 0 度 23 分 97 秒，为伏合初日行率；余 2 秒 31 小分 59 小秒 14 微分，弃之。

初行法	129.90 日	
日差	0.00112366 度	
寄	0.1448395817	$(129.9 - 1) \times 0.00112366 = 0.144839581790674$
半法	64.95 日	
得数	9.4073308373	$64.95 \times 0.144839581790674 = 9.407330837304290$
伏度	3.9 度	
见度	17.83 度	
初行实		$9.407330837304290 + 3.9 + 17.83 = 31.137330837304290$
初行率	0.2397 度	$31.137330837304290 \div 129.9 = 0.239702315914583$

求末行率：置合伏段日数 16 日 90 分，乘日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得 1 分 89 秒 89 小分 82 小秒 87 微分，为得数；

乃以得数，减初行率 23 分 97 秒，余 22 分 7 秒 10 小分 17 小秒 12 微分，为合伏末日行泛率。注：历实为收弃小分以下数，余为末行定率。

伏日	16.90 日	
日差	0.00112366 度	
得数	0.0189898287	$16.90 \times 0.00112366 = 0.018989828799553$
初行率	0.2397 度	
末行泛率	0.2207101712	$0.2397 - 0.0189898287 = 0.220710171200447$
末行定率	0.2207	

求平行率：置初行率 23 分 97 秒，并未行率 22 分 7 秒，得 46 分 4 秒，以半之，得 23 分 2 秒，为平行率。

初行率	0.2397 度	
末行率	0.2207	
平行率		$(0.2397 + 0.2207) \div 2 = 0.2302$

求交段差：置合伏段日下分数 90 分，减全日 100 分，余 10 分，乘末行率 22 分 7 秒，

得 2 分 20 秒 70 小分，为交段差。

伏日	16.90 日	
合伏段日下	0.90 日	
全日	1 日	100 分
末行率	0.2207	
交段差		$(1-0.90)\times 0.2207=0.02207$

求晨疾初段常度：置合伏日 16 日 90 分，乃收 90 分作 1 日，通为 17 日，并旧历所注晨疾初段常日 30，得 47，为共日；乘合伏初行率 23 分 97 秒，得 11 度 26 分 59 秒，为寄。

乃副置共日 47，减 1，余 46，以半之，得 23，乘副 47，得 1081，以乘日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得 1 度 21 分 46 秒 76 小分 46 小秒，以减上寄 11 度 26 分 59 秒，余 10 度 5 分 12 秒 23 小分 54 小秒，为合伏晨疾初两段之共积度。

置共积 10 度 5 分 12 秒 23 小分 54 小秒，内减合伏 3 度 90 分，余 6 度 15 分 12 秒 23 小分 54 小秒，为泛；

一次以交段差 2 分 20 秒 70 小分，减泛，余 6 度 12 分 91 秒 53 小分 54 小秒，为晨疾初段常度泛。注：历实为收 91 秒 53 小分 54 小秒为 1 分，取 6 度 13 分为常定度。

伏日	16.90 日	通为 17 日
常日	30 日	
共日		$17+30=47$ 日，副置
初行率	0.2397 度	
寄		$47\times 0.2397=11.2659$
日差	0.00112366 度	
共积度		$11.2659-(47-1)\div 2\times 47\times 0.00112366=10.05122354$ 度
泛		$10.05122354-3.9=6.15122354$
交段差	0.02207 度	
初段常度		$6.15122354-0.02207=6.12915354$ 度
常定度	6.13 度	

求晨疾初段初行率：以日差 11 秒 23 小分 66 小秒，乘交段差分 10，得 1 秒 12 小分 36 小秒 60 微分，减合伏末行率 22 分 7 秒，余 22 分 5 秒 87 小分 63 小秒，为晨疾初段初行率泛，87 小分 63 小秒，收之为 1 秒，得 22 分 6 秒，为定者也。

伏日	16.90 日	
合伏段日下	0.90 日	
全日	1 日	100 分
交段差分		$1-0.90=0.1$ 日
日差	0.00112366 度	0.0011236585
末行率	0.2207 度	
晨疾初段初行率泛		$0.2207-0.1\times 0.00112366=0.220587634$ 度
晨疾初段初行率定	0.2206	

求晨疾初末行率：置晨疾初常日 30，减 1，余 29 日，乘日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得 3 分 25 秒 86 小分 14 小秒，以减晨疾初段初行率泛 22 分 5 秒 87 小分 63 小秒，余 18 分 80 秒 1 小分 49 小秒，为晨疾初末行率。

常日	30 日
日差	0.00112366 度
晨疾初段初行率泛	0.220587634 度

晨疾初末行率泛	$0.22058763 - (30 - 1) \times 0.00112366 = 0.188001494$
---------	---

求平行率：以晨疾初初行率泛 22 分 5 秒 87 小分 63 小秒，并晨疾初末行率泛 18 分 80 秒 1 小分 49 小秒，减日差 11 秒 23 小分 66 小秒，得 40 分 74 秒 65 小分 46 小秒，以半之，得 20 分 37 秒 32 小分 73 小秒，为晨疾初平行泛；乃以三泛收弃，为之定。

晨疾初段初行率泛	0.220587634 度
晨疾初末行率泛	0.188001494 度
日差	0.00112366 度
晨疾初平行率泛	$(0.220587634 + 0.188001494 - 0.00112366) \div 2 = 0.203732734$
晨疾初平行率定	0.2037 度

【编者注：关于五星运动的说明：

五星为五德之主，其行或入黄道里，或出黄道表，犹月行出有阴阳也。终出入五常，不可以算数求也。其东行曰顺，西行曰逆，顺则疾，逆则迟，通而率之，终为东行矣。不东不西曰留。与日相近而不见，曰伏。伏与日同度曰合。其留行逆顺掩合犯法陵变色芒角，凡其所主，皆以时政五常、五官、五事之得失，而见其变。

木、火、土三星行迟。夜半经天，其初皆与日合度，而后顺行渐迟，追日不及，晨见东方。行去日稍远，朝时近中则留。留经旦，过中则逆行。逆行至夕时近中，则又留。留而又顺，先迟渐速，以至于夕伏西方，乃更与日合。

金、水二星，行速而不经天。自始与日合之后，行速而先日，夕见西方。去日前稍远，夕时欲近南方则渐迟，迟极则留。留而近日，则逆行而合日，在于日后。晨见东方。逆极则留，留而后迟。迟极去日稍远，旦时欲近南方，则速行以追日，晨伏于东方，复与日合。

此五星合见、迟速、逆顺、留行之大经也。昏旦者，阴阳之大分也。南方者，太阳之位，而天地之经也。七曜行至阳位，当天之经，则亏昃留逆而不居焉。此天之常道也。三星经天，二星不经天，三天两地之道也。

《隋书·卷二十·志第十五·天文》（唐·令狐德棻、长孙无忌、魏征等撰）。其中，“天文志”实为李淳风的手笔。】

第 14 题：揆日究微

问：历代测景，惟唐大衍历最密。本朝崇天历，阳城冬至景一丈二尺七寸一分五十秒；夏至景一尺四寸七分七十九秒，系与大衍历同。今开禧历，临安府冬至景一丈八寸二分二十五秒；夏至景九寸一分；欲求临安府夏至后差几日，而景与阳城夏至日等，较以大衍历晷景所差尺寸，各几何。

答曰：大暑后五日午中；景长一尺四寸八分八十五秒半；景差：六寸一分二十九秒少；

术曰：以乘率求之，节率入之。

节气	夏至	小暑	大暑	立秋	处暑	白露	秋分
		芒种	小满	立夏	谷雨	清明	春分
节率	0	25	109	289	675	1230	2099
节气	寒露	霜降	立冬	小雪	大雪	冬至	
	惊蛰	雨水	立春	大寒	小寒		
节率	3317	5098	7216	9799	11670	12452	

草曰：置临安府所测冬至景一丈八寸二分二十五秒，以夏至景九寸一分减之，余九尺九寸一分二十五秒，为景差，以为实；

置象度 91 度 31 分 44 秒，加 11 度 25 分 27 秒 50 小分，命度为寸，得 102 寸 5671 分 50 秒，为法，以除前差实，得空寸 9664 分 40 秒，不尽弃之；以自乘之，不尽弃之，得空寸 9340 分，为节率；先以小暑节乘率 25，乘之，得 23 寸 3500 分，于上；次以临安夏至景 9 寸 1 分，自乘，得 82 寸 8100 分，为夏至景晷；乃以夏至晷，加上，得 106 寸 1600 分，为小暑晷，以为实；

临安府冬至景	108.225 寸	
临安府夏至景	9.1 寸	
景差为实		$108.225 - 9.1 = 99.125$ 寸
象度为法		$91.3144 + 11.2527 = 102.56715$ 寸
实如法而一		$99.125 \div 102.5671 = 0.966440035$
节率（节泛数）		$0.966440035^2 = 0.934006341$ 寸 = 9340 分
小暑节乘率	25	$25 \times 0.934006341 = 23.35015851$ 寸
夏至景晷		$9.1^2 = 82.81$ 寸
小暑晷		$23.35015851 + 82.81 = 106.1601585$ 寸

开平方：以 1 寸为隅，开之，得 1 尺 3 分（10.30340519），为临安小暑节景，不尽七百分，即寸下七毫，弃之；

一变	首商 $x = 10$	二变	首商 $x = 10$
实	$(x + 0)x - 106.1601585 = -6.1601585$	实	-6.1601585
从方	$x + 0 = 10$	从方	$x + 10 = 20$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 0.3$

一变	次商 $x = 0.3$	二变	次商 $x = 0.3$
实	$(x + 20)x - 6.1601585 = -0.0701585$	实	-0.0701585
从方	$x + 20 = 20.3$	从方	$x + 20.3 = 20.6$
从隅	1	从隅	1

又以大暑乘率 109，乘节率 9340 分，得 101 寸 8060 分，于头位，仍加夏至晷 82 寸 8100 分，加头位 101 寸 8060 分，得 184 寸 6160 分，为大暑晷，以为实；

节率（节泛数）		0.934006341 寸 = 9340 分
---------	--	------------------------

大暑乘率	109	$109 \times 0.934006341 = 101.8066911$ 寸 = 101.8067 分
夏至景晷为实	82.81 寸	$82.81 + 101.8066911 = 184.6166911$ 寸

以1寸为隅，开平方，得1尺3寸5分87秒（13.58737249），为大暑景，不尽弃之；

一变	首商 $x = 10$	二变	首商 $x = 10$
实	$(x+0)x - 184.6166911 = -84.6166911$	实	-84.6166911
从方	$x+0=10$	从方	$x+10=20$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 3$

一变	次商 $x = 3$	二变	次商 $x = 3$
实	$(x+20)x - 84.6166911 = -15.6166911$	实	-15.6166911
从方	$x+20=23$	从方	$x+23=26$
从隅	1	从隅	1

三位商 $x = 0.5$

一变	三商 $x = 0.5$	二变	三商 $x = 0.5$
实	$(x+26)x - 15.6166911 = -2.3666911$	实	-2.3666911
从方	$x+26=26.5$	从方	$x+26.5=27$
从隅	1	从隅	1

四位商 $x = 0.08$

一变	四商 $x = 0.08$	二变	四商 $x = 0.08$
实	$(x+27)x - 2.3666911 = -0.2002911$	实	-0.2002911
从方	$x+27=27.08$	从方	$x+27.08=27.16$
从隅	1	从隅	1

五位商 $x = 0.007$

一变	五商 $x = 0.007$	二变	五商 $x = 0.007$
实	$(x+27.16)x - 0.2002911 = -0.0101221$	实	-0.0101221
从方	$x+27.16=27.167$	从方	$x+27.167=27.174$
从隅	1	从隅	1

又置立秋乘率 289，乘节率 9340 分，得 269 寸 9260 分，于上；仍置夏至晷 82 寸 8100 分，加于上 269 寸 9260 分，共得 352 寸 7360，为立秋晷，以为实；

立秋乘率	289	
节率（节泛数）		0.934006341 寸 = 9340 分
上		$289 \times 0.934006341 = 269.9278324$ 寸
夏至景晷	82.81 寸	
立秋晷为实		$82.81 + 269.9278324 = 352.7378324$ 寸

以1寸为隅，开平方，得1尺8寸7分81秒（18.78131605），为立秋景，不尽弃之；

一变	首商 $x = 10$	二变	首商 $x = 10$
实	$(x+0)x - 352.736 = -252.7378324$	实	-252.7378324
从方	$x+0=10$	从方	$x+10=20$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 8$

一变	次商 $x = 8$	二变	次商 $x = 8$
实	$(x+20)x - 252.7378324 = -28.7378324$	实	-28.7378324
从方	$x+20=28$	从方	$x+28=36$

从隅	1	从隅	1
----	---	----	---

三位商 $x=0.7$

一变	三商 $x=0.7$	二变	三商 $x=0.7$
实	$(x+36)x-28.7378324=-3.0478324$	实	-3.0478324
从方	$x+36=36.7$	从方	$x+36.7=37.4$
从隅	1	从隅	1

四位商 $x=0.08$

一变	四商 $x=0.08$	二变	四商 $x=0.08$
实	$(x+37.4)x-3.0478324=-0.0494324$	实	-0.0494324
从方	$x+37.4=37.48$	从方	$x+37.48=37.56$
从隅	1	从隅	1

五位商 $x=0.001$

一变	五商 $x=0.001$	二变	五商 $x=0.001$
实	$(x+37.56)x-0.0494324=-0.0118714$	实	-0.0118714
从方	$x+37.56=37.561$	从方	$x+37.561=37.562$
从隅	1	从隅	1

乃验阳城夏至景 1 尺 4 寸 7 分 79 秒，在大暑后，立秋前；

乃置大暑 1 尺 3 寸 5 分 87 秒，并立秋景 1 尺 8 寸 7 分 81 秒，得 3 尺 2 寸 3 分 68 秒，以半之，得 1 尺 6 寸 1 分 84 秒，为大暑后九日景；

又以九日景，并大暑景，得 2 尺 9 寸 7 分 71 秒，以半之，得 1 尺 4 寸 8 分 85 秒半，为大暑后五日午中景；

乃以大暑景，并五日景，得 2 尺 8 寸 4 分 72 秒半，以半之，得 1 尺 4 寸 2 分 36 秒少，为大暑后三日景；

又以五日景，并三日景，得 2 尺 9 寸 1 分 21 秒太，以半之，得 1 尺 4 寸 5 分 60 秒 87 小分 50 小秒，为大暑后四日景；

今验阳城夏至景 1 尺 4 寸 7 分 79 秒，为入临安府大暑后四日景 1 尺 4 寸 5 分 60 秒太强，乃以四日景减五日景，余 3 分 24 秒太弱，为景差；以 12 时除之，得 27 秒 5 小分 20 小秒，为法；

乃置阳城夏至景 1 尺 4 寸 7 分 79 秒，减临安大暑后四日景 1 尺 4 寸 5 分 60 秒 87 小分 50 小秒，余 2 分 18 秒 12 小分 50 小秒，为实，后以法 27 秒 5 小分 20 小秒，除之，实如法而一，得商数 8，有余；命大暑四日午后数 8 辰，得大暑五日寅时景，与阳城夏至之日午景等；

阳城夏至景	14.779 寸
大暑景	13.58737249 寸
立秋景	18.78131605 寸
大暑后九日景	$(13.58737249+18.78131605)\div 2=16.18434427$
大暑后五日午中景	$(13.58737249+16.18434427)\div 2=14.88585838$
大暑后三日景	$(13.58737249+14.88585838)\div 2=14.23661543$
大暑后四日景	$(14.88585838+14.23661543)\div 2=14.56123691$
差	$14.88585838-14.56123691=0.32462147$
法	$0.32462147\div 12=0.027051789$
初五日寅时景	$(14.779-14.56123691)\div 0.027051789=8.04985924$

求较：以大衍历晷景所差，乃置阳城大暑景长 1 尺 9 寸 5 分 76 秒，并阳城立秋景 2 尺 5

寸3分31秒，得4尺4寸9分7秒，以半之，得2尺2寸4分53秒半，为阳城大暑后九日午中景；

置九日景，复并阳城大暑景1尺9寸5分76秒，得4尺2寸29秒半，以半之，得2尺1寸14秒太，为阳城大暑后五日景；

今以较，验开禧历所推临安府大暑后五日午中景1尺4寸8分85秒半，与阳城大暑后五日午中景差2尺1寸14秒太，课（kè，试也。）之；

乃以临安府五日景，减阳城五日景，差少6寸1分29秒少；合问。

阳城大暑景	19.576	
阳城立秋景	25.331	
阳城大暑后九日午中景	$(19.576+25.331)\div 2=22.4535$	
阳城大暑后五日景	$(22.4535+19.576)\div 2=21.01475$	
判课	$22.4535-21.01475=1.43875$	
两城大暑后五日景差	$21.01475-14.88585838=6.12889162$	

【编者注：阳城：位于河南省登封市东南7.5公里的告城镇，北依嵩山，南望箕山，处颍河之滨，地望十分优越，是古代观星台所在地。】

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 15 题：天池测雨

问：今州、郡多有天池盆，以测雨水。但知以盆中之水，为得雨之数；器形不同，则受雨多少亦异，未可以所测，便为平地得雨之数。假令盆口径二尺八寸，底径一尺二寸，深一尺八寸，接雨水深九寸，欲求平地雨降几何。

答曰：平地雨降三寸。

术曰：盆深乘底径，为底率；二径差乘水深，并底率，为面率；以盆深为法，除面率，得面径；以二率相乘，又各自乘，三位并之，乘水深，为实；盆深乘口径，以自之；又三因为法，除之，得平地水深。

草曰：以盆深及径，皆通为寸：盆深得 18 寸，底径得 12 寸；相乘得 216 寸，为底率；置口径 28 寸，减底径 12 寸，余 16 寸，为差，以乘水深 9 寸，得 144 寸，并底率 216 寸，得 360 寸，为面率；以盆深 18 寸为法，除面率得 20 寸，展为 2 尺，为水面径；

盆深	18
底径	12
口径	28
水深	9
底率	$18 \times 12 = 216$
面率	$(28 - 12) \times 9 + 216 = 360$
水面径	$360 \div 18 = 20$

以底率 216 寸，乘面率 360 寸，得 77760 寸，于上；以底率 216 寸自乘，得 46656 寸，加上；又以面率 360 寸自乘，得 129600，并上，共得 254016；以乘水深 9 寸得 2286144 寸，为实；

底率×面率	77760
底率自乘	$216 \times 216 = 46656$
面率自乘	$360 \times 360 = 129600$
和	254016
和×水深	$254016 \times 9 = 2286144$

以盆深 18 寸乘口径 28 寸，得 504 寸，自乘得 254016 寸，又 3 因得 762048 寸，为法，除实，得 3 寸，为平地雨深。合问。

盆深	18
口径	28
盆深×口径	$18 \times 28 = 504$
自乘	$504 \times 504 = 254016$
法	$254016 \times 3 = 762048$
平地雨深	$2286144 \div 762048 = 3$

第 16 题：圆罍测雨

问：以圆罍接雨，口径一尺五寸，腹径二尺四寸，底径八寸，深一尺六寸，圆法用密率；今巷里，明接得雨水，深一尺二寸，问：平地雨水深几何。

馆按：此题问平地雨深，无关圆法，密率句赘。若求罍中雨积数，则当加此语。

答曰：平地雨深三尺五寸一千三百二十三分寸之九百二十。

术曰：底径与腹径相乘，又各自乘，并之，乘半罍深，以密率分子之半一十一乘之，为下率；以四十二为下法，除得下积；以半罍深，并雨深，减元罍深，余为上深；以口径减腹径，余乘上深，为次；以半罍深乘口径，加次，为面率；以半罍深除面率，得水面径；以半罍深乘腹径，为腹率；置面率，与腹率相乘，又各自乘，并之，以一十一乘之，又乘上深，为上率；以半罍深自乘，为幂，以乘下法，为上法；上法除上率，得上积；半罍深幂乘下率，并上率，为总实；口径幂乘半罍深幂，又以三十三乘之，为总法；除实，得平地雨高。

草曰：置底径 8 寸，与腹径 24 寸相乘，得 192 寸于上；又底径 8 寸自乘，得 64 寸，加上；又腹径 24 寸自乘，得 576 寸，并上，共得 832 寸；以乘半罍深 8 寸，得 6656 寸，又以 11 乘之，得 73216 寸，为下率；

置密率法 14，以 3 因之，得 42，为下法；

底径	8	$8 \times 8 = 64$
腹径	24	$24 \times 24 = 576$
半罍深	8	
密率分子之半	11	
下率	$(576 + 8 \times 24) \times 8 \times 11 = 73216$	
密率法	14	
下法	$3 \times 14 = 42$	

以半罍深 8 寸，并雨深 12 寸，得 20 寸，以减元深 16 寸，余 4 寸，为上深；

以口径 10 寸 5 分，减腹径 24 寸，余 13 寸 5 分，以乘上深 4 寸，得 54 寸，为次；

以半罍深 8 寸，乘口径 10 寸 5 分，得 84 寸，加次，共得 138 寸，为面率；

以半罍深 8 寸，乘腹径 24 寸，得 192 寸，为腹率；

置面率 138 寸，与腹率 192 寸相乘，得 26496 寸，于上；

又以面率 138 寸自乘，得 19044，加上；又以腹率 192 寸自乘，得 36864，并上，共得 82404 寸，以 11 乘之，得 906444 寸；又以上深 4 寸乘之，得 3625776，为上率；

以半罍深 8 寸自乘，得 64 寸，为半罍深幂；以乘下法 42，得 2688，为上法；

以半罍深幂 64 寸，乘下率 73216 寸，得 4685824 寸，并上率 3625776，共得 8311600 寸，为总实；

腹径	24	
半罍深	8	半罍深幂： $8 \times 8 = 64$
雨深	12	
元深	16	
上深	$(8 + 12) - 16 = 4$	
口径	10.5	
次	$(24 - 10.5) \times 4 = 54$	
面率	$8 \times 10.5 + 54 = 138$	$138 \times 138 = 19044$
腹率	$8 \times 24 = 192$	$192 \times 192 = 36864$
上	$138 \times 192 = 26496$	$19044 + 36864 + 26496 = 82404$
上率	$11 \times 82404 \times 4 = 3625776$	

上法	$64 \times 42 = 2688$	
总实	$64 \times 73216 + 3625776 = 8311600$	

以口径 10 寸 5 分自乘，得 110 寸 2 分 5 厘，以乘半罍深幂 64；又以 33 乘之，得 232848 寸，为总法；除实，得 3 尺 5 寸；不尽 161920，与法求等，得 176，俱约之，为 3 尺 5 寸 1323 分寸之 920，为平地雨深，合问。

半罍深幂	64	
口径	10.5	$10.5 \times 10.5 = 110.25$
总法	$110.25 \times 64 \times 33 = 232848$	
总实	8311600 寸	
平地雨深	$8311600 \div 232848 = 35.69538927$ 寸	
不尽	$161920 = 176 \times 920$, $232848 = 176 \times 1323$	

【编者注：本问原文术，草，答案，俱误，兹按照《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992。）更正如上。

若按照 1 寸=2.35 厘米计算，本次降水量为 2.35×35.69538927 寸=83.88416 厘米。

若按照 1 尺 \approx 30.72 厘米计算，本次降水量为 3.072×35.69538927 寸=109.6562 厘米；】

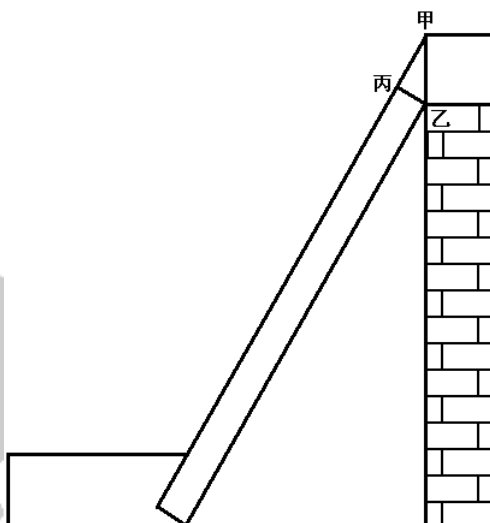
版权所有！
欢迎传播！

禁止制作为
商品销售！

第 17 题：峻积验雪

问：验雪占年。墙高一丈二尺，倚木去址五尺，梢与墙齐；木身积雪厚四寸，峻积薄，平积厚。欲知平地雪厚几何。

答曰：平地雪厚一尺四分。



术曰：以少广求之，连枝入之。

以去址自乘为隅，以墙高自乘，并隅于上；以雪厚自之，乘上，为实[可约者约而开之]，开连枝平方，得地雪厚。

草曰：以问数皆通为寸，置去址 50 寸自乘，得 2500，为隅；以墙高 120 寸自乘，得 14400 寸，并隅，得 16900 寸，于上；以雪厚 4 寸自之，得 16，乘上，得 270400 寸，为实；

实：雪厚	4	$4 \times 4 \times 16900 = 270400$
上：墙高	120	$120 \times 120 + 2500 = 16900$
隅：去址	50	$50 \times 50 = 2500$

开连枝平方：今隅、实可求等，得 100，俱约之，得 2704 为实；得 25 为隅，开平方：

一变	首商 $x = 10$	二变	首商 $x = 10$
实	$(25x + 0)x - 2704 = -204$	实	-204
方	$25x + 0 = 250$	方	$25x + 250 = 500$
隅	25	隅	25

次位商 $x = 0.4$

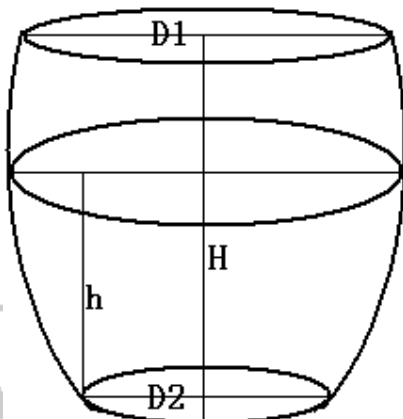
一变	次商 $x = 0.4$
实	$(25x + 500)x - 204 = 0$
方	$25x + 500 = 510$
隅	25

得 10 寸 4 分，展为 1 尺 4 分，为平地雪厚。合问。

第 18 题：竹器验雪

问：以圆竹筩验雪，筩口径一尺六寸，深一尺七寸，底径一尺二寸，雪降其中，高一尺。筩体通风，受雪多，则平地少。欲知平地雪高几何？

答曰：平地雪厚九寸，三千四百十九分寸之七百六十四。



术曰：口径减底径，余乘雪深，半之自乘为隅。以筩深幂乘雪深幂，并隅，又乘雪深幂，为实。隅实可约，约之。开连枝三乘方，得平地雪厚。

草曰：列问数，各通为寸：口径得 16 寸，深 17 寸，底径 12 寸，筩中雪高 10 寸。

乃以底径减口径，余 4 寸，乘雪深 10 寸，得 40 寸。

以半之，得数 20 寸，自乘，得 400 寸，为隅。

以筩深 17 寸，自乘，得 289 寸，为筩深幂。

次置雪深 10 寸自乘，得 100 寸，为雪深幂。

以雪深幂 100 寸，乘筩深幂 289 寸，得 28900 寸，并隅 400 寸，得 29300 寸，为上位数。

置上位数字 29300 寸，又乘雪深幂 100 寸，得 293 万寸，为实。

隅、实求等，得 400，俱约之，得 7325 为实。

口径	16	
底径	12	
筩深	17	筩深幂 $17 \times 17 = 289$
雪深	10	雪深幂 $10 \times 10 = 100$
隅	$(16 - 12)10 \div 2 = 20$, $20 \times 20 = 400$	
实	$(100 \times 289 + 400) \times 100 = 2930000 = 400 \times 7325$	

以 1 为隅，开三乘方：步法不可超，乃约实。

置商 9 寸，与隅 1 相生，得 9，为下廉。

下廉 9，又与商 9 相生，得 81，为上廉。

上廉 81，又与商 9 相生，得 729，为从方。

乃以从方 729，与商 9 相生，得 6561，除实 7325 讫，余 764；

以 $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{1, 0, 0, 0, -7325\}$ 进行一变：

一变	首商 $x = 9$
实	$((x + 0)x + 0)x + 0 - 7325 = -764$
方	$((x + 0)x + 0)x + 0 = 729$
从上廉	$(x + 0)x + 0 = 81$
虚下廉	$x + 0 = 9$
益隅	1

既而复以商 9 生隅，得 9，入下廉，下廉得 18。

又与商 9 相生，入上廉。

上廉得 243，又以商相生，入方，得 2916。

以 $\{a_4, a_3, a_2, a_1\} = \{1, 9, 81, 729\}$ 进行二变：

二变	首商 $x = 9$
实	-764
方	$((x+9)x+81)x+729=2916$
从上廉	$(x+9)x+81=243$
虚下廉	$x+9=18$
益隅	1

又以商 9 生隅 1，入下廉 18 内，得 27。

又以商 9 生下廉 27，入上廉 243 内，得 486。

以 $\{a_4, a_3, a_2\} = \{1, 18, 243\}$ 进行三变：

三变	首商 $x = 9$
实	-764
方	2916
从上廉	$(x+18)x+243=486$
虚下廉	$x+18=27$
益隅	1

又以商生隅，入下廉 27 内得 36，为末图。

以 $\{a_4, a_3\} = \{1, 27\}$ 进行四变：

四变	首商 $x = 9$
实	-764
方	2916
从上廉	486
虚下廉	$x+27=36$
益隅	1

乃以末图方、上廉、下廉、隅四者并之，得 3439，为母。以实余 764 为子。命为平地雪厚 9 寸 3439 分寸之 764。合问。

【编者注：

实为 764，故 $x = 9 \frac{764}{1+36+486+2916} = 9 \frac{764}{3439}$ 寸为所求。

王守义《数书九章新释》197—206 页的叙述有重复，本文全部修正。】

“天时第二”现代文翻译

第 10 题：根据节气推出治历参数

问题：太史测量、验证天道。庆元四年（1198 年，戊午岁）冬至在甲子日后 39.9245 日[日辰：癸卯]；绍定三年（1230 年，庚寅岁）冬至在甲子日后 32.9412 日[日辰：丙申]；请问：之间的嘉泰四年（1204 年，甲子岁）的气骨，岁余，斗分，各是多少。

【编者注：太史（tāishǐ）[an official who holds astronom and calendar]：官名。三代时，为史官与历官之宅，朝廷大臣。后职位渐低，秦称太史令；汉属太常，掌天文历法。魏晋以后，太史仅掌管推算历法。至明、清两朝，修史之事由翰林院负责，又称翰林为太史。

《秦九韶与数书九章》316 页解释：可先计算出嘉泰四年（1204 年，甲子岁）冬至在甲子日后 71.38208182 日，即可解决问题。秦九韶所拟算法事实上就是在推算回归年日数周期与甲子年日数周期的互换关系。

气骨，指冬至时刻在最接近甲子日（凌晨子正起算）之后时间；

岁余，指回归年与 360 日之间的差数值，介于 5~6 之间；

斗分，指岁余的小数部分；

《数书九章新释》122 页：

【注 1】沈钦裴氏发现本问与次二问所求甲子岁气骨之数不合，疑其有误，曾作改推工作。

【注 2】毛氏岳生曰：授时历议云：统天历庆元五年己未，杨忠辅造行，八年至开禧丁卯，先天六刻。道古此问，戊午岁冬至日分，较开禧历所推，适先六刻，盖由当时实测天道如此，非有误也。】

【原文】推气治历

问太史测验天道。庆元四年戊午岁冬至三十九日九十二刻四十五分，绍定三年庚寅岁冬至三十二日九十四刻一十二分，欲求中间嘉泰甲子岁气骨岁余斗分各得几何。

第 11 题：推出开禧历的闰骨和闰骨率

问题：开禧历，以嘉泰四年（1204 年，甲子岁）天正冬至在甲子日后 11.446154 日[日辰：乙亥]，十一月经朔 1.755562 日[日辰：乙丑]；请问：闰骨，闰骨率各几何。

【编者注：嘉泰四年（1204 年，甲子岁）十一月的朔日和冬至：

11 月	01 甲子 朔日	02 乙丑	03 丙寅	04 丁卯	05 戊辰	06 己巳	07 庚午	08 辛未	09 壬申	10 癸酉
	11 甲戌 冬至	12 乙亥	13 丙子	14 丁丑	15 戊寅	16 己卯	17 庚辰	18 辛巳	19 壬午	20 癸未
	21 甲申	22 乙酉	23 丙戌	24 丁亥	25 戊子	26 己丑	27 庚寅	28 辛卯	29 壬辰	

【原文】治历推闰

问开禧历，以嘉泰四年甲子岁天正冬至为一十一日[日辰乙亥]四十四刻六十一分五十四秒，十一月经朔一日[日辰乙丑]七十五刻五十五分六十二秒，问闰骨，闰骨率各几何。

第 12 题：研究开禧历的演纪原理

问题：开禧历，积年 7848183，请问：开禧历的推演原理，以及：调日法，求朔余，朔率，斗分，岁率，岁闰，入元岁，入闰，朔定骨，闰泛骨，闰缩，纪率，气元率，元闰，元数，及气等率，因率，部率，朔等数，因数，部数，朔积年，这 22 个数值，各是多少。

【编者注：《算法的源流：东方古典数学的特征》456~462 页和 470~474 页的分析非常好，可参考。】

【原文】治历演纪

问开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知推演之原，调日法，求朔余，朔率，

斗分，岁率，岁闰，入元岁，入闰，朔定骨，闰泛骨，闰缩，纪率，气元率，元闰，元数，及气等率，因率，部率，朔等数，因数，部数，朔积年，二十三事，各几何？

第 13 题：用缀术推算木星运动规律

问题：木星合伏。经过 16 日 90 分，行程 3 度 90 分，去日 13 度，才再出现。然后顺行 113 日，17 度 83 分，乃留。请问：合伏段，晨疾初段，常度，初行率，末行率，平行率，各是多少。

【编者注：木星古称“岁星”。日星会合，则星隐不见，称为“伏”。晨合称为“晨伏”，夕合称为“夕伏”。】

【原文】缀术推星

问岁星合伏。经一十六日九十分，行三度九十分，去日一十三度乃见。后顺行一百一十三日，一十七度八十三分乃留。欲知：合伏段，晨疾初段，常度，初行率，末行率，平行率，各几何。

第 14 题：测量、计算太阳在晷表上的投影

问题：历朝历代，测量晷表的投影，只有唐朝的“大衍历”最精密。我们宋朝的“崇天历”，在阳城测量晷表的投影为：冬至，1 丈 2 尺 7 寸 1 分 50 秒；夏至，1 尺 4 寸 7 分 79 秒，跟“大衍历”相同。如今的“开禧历”，在临安府测量晷表的投影为：冬至，1 丈 8 寸 2 分 25 秒；夏至，9 寸 1 分；请问：夏至后差几日，在临安府测量晷表的投影，跟在阳城夏至日测量的投影相等，跟“大衍历”的投影相差多少尺寸。

【编者注：《数书九章新释》在 172 页的“答曰”中漏了“景差：六寸一分二十九秒少”；也没有“术曰”及其内容；在 188 页倒数第十行的“得 8 命外，为在初五日寅时景等”，显得前言不搭后语；

事实上，《数书九章新释》173—185 页的内容为“草曰”；187—188 页的内容与前面 173—185 页的内容基本相同；

这个问题在《丛书集成：数书九章》（96—105 页，105—106 页）；《文渊阁四库全书·数学九章》（797-394—797-398，797-398—797-400 页）都同样存在。

不知道为什么几个版本都照抄不误。估计是在辗转传抄的过程中，有的人把原文的“术曰”弄丢了，只好把“草曰”当作是“术曰”看待。

难怪会有：“馆按：集中，皆术在前，草次之，图在后。此条之例不同。”】

【原文】揆日究微

问历代测景，惟唐大衍历最密。本朝崇天历，阳城冬至景一丈二尺七寸一分五十秒；夏至景一尺四寸七分七十九秒，系与大衍历同。今开禧历，临安府冬至景一丈八寸二分二十五秒；夏至景九寸一分；欲求临安府夏至后差几日，而景与阳城夏至日等，较以大衍历晷景所差尺寸，各几何。

第 15 题：用天池盆测量降雨量

问题：如今，州、郡大多备有天池盆，用来测定降雨量。现在知道盆中之水，是直接接得的雨水；如果容器的形状不同，则接得的雨水数量就有差异，无法从接得的雨水数量计算出平地里雨水的深度。假如知道的是圆盆，它的口径 2 尺 8 寸，底径 1 尺 2 寸，深 1 尺 8 寸，接得的雨水深 9 寸；请问：平地里雨水的深度是多少。

【编者注：“不知器形不同”中，删除“不知”。】

【原文】天池测雨

问今州、郡多有天池盆，以测雨水。但知以盆中之水，为得雨之数。不知器形不同，则受雨多少亦异，未可以所测，便为平地得雨之数。假令盆口径二尺八寸，底径一尺二寸，深一尺八寸，接雨水深九寸，欲求平地雨降几何。

第 16 题：用圆罍测量降雨量

问题：圆罍（yīng），是一种腹大口小的圆形瓦器。圆罍口部直径1尺5寸，腹部直径2尺4寸，底部直径8寸，深1尺6寸，圆法用密率22/7；今天下雨，在巷里，用圆罍接雨水，直接接得的雨水，深1尺2寸，请问：平地里雨水的深度是多少。

【编者注：原文“并里明接得雨水”无法理解。根据题意，“并里”应该是“巷里”之误；为强调时效性，就修改为“今巷里”。

原文的答曰，术曰，草曰，惧误，兹按照《数书九章新释》192—196页更正。】

【原文】圆罍测雨

问以圆罍接雨，口径一尺五寸，腹径二尺四寸，底径八寸，深一尺六寸，圆法用密率；并里明接得雨水，深一尺二寸，问：平地雨水深几何。

第17题：测木端雪高知道平地雪厚

问题：检验雪的厚度，预测来年收成。墙高1丈2尺，离墙跟5尺倚靠一根直木料，木料梢端与墙的上平面平齐；现在知道：木料上端平面积雪厚4寸，在峻峭面，积雪薄，地平面的积雪厚。请问：地面上的雪厚是多少。

【原文】峻积验雪

问验雪占年。墙高一丈二尺，倚木去址五尺，梢与墙齐；木身积雪厚四寸，峻积薄，平积厚。欲知平地雪厚几何。

第18题：圆竹筲测平地雪厚

问题：以圆竹筲验雪，竹筲口径1尺6寸，深1尺7寸，底径1尺2寸，雪降入竹筲中，高1尺。筲体通风，受雪多，则地面上的雪就少。请问：地面上的雪厚是多少。

【编者注：本题的圆竹筲不是规则的几何体，只能依赖“术曰：口径减底径，余乘雪深，半之自乘为隅。以筲深幂乘雪深幂，并隅，又乘雪深幂，为实。”提供的公式来计算。】

【原文】竹器验雪

问以圆竹筲验雪，筲口径一尺六寸，深一尺七寸，底径一尺二寸，雪降其中，高一尺。筲体通风，受雪多，则平地少。欲知平地雪高几何？

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

田域第三

19 尖田求积，20 三斜求积，21 斜荡求积，22 计地容民，23 蕉田求积，
24 均分梯田，25 漂田推积，26 环田三积，27 围田租亩

第 19 题：尖田求积

问：有两尖田一段，其尖长不等，两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步。欲知其积几何？

答曰：田积八百四十步。

术曰：以少广求之，翻法入之。

置半广自乘，为半幂；与小斜幂相减相乘，为小率；

以半幂与大斜幂相减相乘，为大率；

以二率相减，余自乘为实；

并二率，倍之为从上廉；

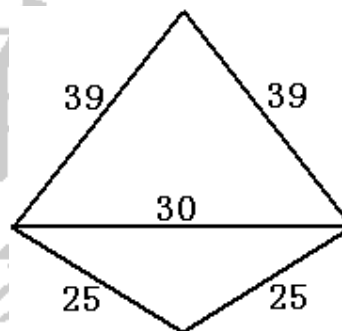
以一为益隅，开翻法三乘方，得积。

一位开尽者，不用翻法。

草曰：置广 30 步，以半之得 15，以自乘，得 225，为半幂；以小斜 25 步，自乘，得 625，为小斜幂；与半幂相减，余 400，与半幂 225 相乘，得 9 万步，为小率；

置大斜 39 步，自乘，得 1521，为大斜幂；与半幂 225 相减，余 1296，与半幂 225 相乘，得 291600，为大率；

以小率 9 万，减大率，余 201600，自乘，得 4064256 万，为实；以小率 9 万，并大率 291600，得 381600，倍之，得 763200，为从上廉；



广	30 步	
半幂		$(30 \div 2)^2 = 225$ 步
小斜	25 步	
小斜幂		$25^2 = 625$ 步
小率		$(625 - 225) \times 225 = 90000$ 步
大斜	39 步	步
大斜幂		$39^2 = 1521$ 步
大率		$(1521 - 225) \times 225 = 291600$ 步
实		$(291600 - 90000)^2 = 40642560000$ 步
从上廉		$(90000 + 291600) \times 2 = 763200$ 步
益隅	1	

术曰：商常为正，实常为负；从常为正，益常为负；

今列求率开方图于后：

以 1 为益隅，开玲珑翻法三乘方。

步法：乃以从靡超一位，益隅超三位，约商得十，今再超进，乃商置百。

其从上廉为 763200 万，其益隅为 1 亿，约实，置商 800 为定商。

以商生益隅，得 8 亿，为益下廉；

又以商生下廉，得 64 亿，为益上廉；

与从上廉 763200 万相消，从上廉余 123200 万；

又与商相生，得 985600 万，为从方；

又与商相生，得 7884800 万，为正积；与元实 4064256 万相消，正积余 3820544 万，为正实；

一变	首商 $x = 800$
实	$(((-x + 0)x + 763200)x + 0)x - 40642560000 = 38205440000$ (换骨)
方	$((-x + 0)x + 763200)x + 0 = 98560000$
从上廉	$(-x + 0)x + 763200 = 123200$
虚下廉	$-x + 0 = -800$
益隅	-1

又以益隅 1 亿，与商相生得 8 亿，增入益下廉，为 16 亿；

又以益下廉与商相生，得 128 亿，为益上廉。乃以益上廉与从上廉 123200 万相消，余 1156800 万，为益上廉；

又与商相生，得 9254400 万，为益方；与从方 985600 万相消，益方余 8268800 万，为益方。

二变	首商 $x = 800$
实	38205440000
方	$((-x - 800)x + 123200)x + 98560000 = -826880000$
从上廉	$(-x - 800)x + 123200 = 1156800$
虚下廉	$-x - 800 = -1600$
益隅	-1

又以商生益隅 1 亿，得 8 亿，增入益下廉得 24 亿；

又以商相生，得 192 亿，入益上廉，得 3076800 万，为益上廉；

三变	首商 $x = 800$
实	38205440000
方	-826880000
从上廉	$(-x - 1600)x + 1156800 = -3076800$
虚下廉	$-x - 1600 = -2400$
益隅	-1

又以商生益隅 1 亿，得 8 亿，入益下廉，得 32 亿毕。

四变	首商 $x = 800$
实	38205440000
方	-826880000
从上廉	-3076800
虚下廉	$-x - 2400 = -3200$
益隅	-1

其益方一退，为 826880 万，益上廉再退，得 3076800，益下廉三退，得 32000，益隅四退，为 1，毕。

乃约正实，续置商 40 步，与益隅 1 万相生，得 4 万，入益下廉，为 324 万；

又与商相生，得 1296 万，入益上廉内，为 32064 万；

又与商相生，得 128256 万，入益方内，为 955136 万，乃命上续商 40，除实适尽。

一变	续商 $x = 40$
实	$(((-x - 3200)x - 3076800)x - 826880000)x - 40642560000 = 0$

方	$((-x - 3200)x - 3076800)x - 826880000 = 955136000$
从上廉	$(-x - 3200)x - 3076800 = 3206400$
虚下廉	$-x - 3200 = -3240$
益隅	-1

所得 840 步，为田积。

以上系开三乘方翻法图，后篇效此。

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

第 20 题：三斜求积

问：沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步。欲知为田几何。

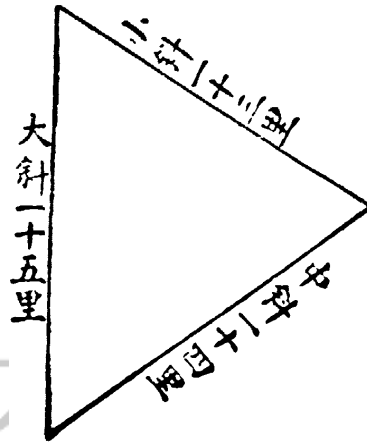
答曰：田积三百一十五顷。

术曰：以少广求之。

以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘，于上；

以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方，得积。

草曰：以小斜 13 里自乘，得 169 里，为小斜幂；以大斜 15 里自乘，得 225 里，为大斜幂，并小斜幂得 394 里，于上；以中斜 14 里自乘，得 196 里，为中斜幂，减上，余 198 里，以半之，得 99 里，自乘，得 9801 里，于上；以小斜幂 169 乘大斜幂 225 得 38025，减上，余 28224，以 4 约之，得 7056 里，为实；



小斜	13	$13 \times 13 = 169$, 小斜幂
中斜	14	$14 \times 14 = 196$, 中斜幂
大斜	15	$15 \times 15 = 225$, 大斜幂
		$(169 + 225 - 196) \div 2 = 99$
实		$(169 \times 225 - 99 \times 99) \div 4 = 7056$

以 1 为隅，开平方：

以隅超步为 100，乃于实上商置 80，以商生隅得 800，为从方，乃命上商除实，余 656；

一变	首商 $x = 80$	二变	首商 $x = 80$
实	$(x + 0)x - 7056 = -656$	实	-656
上	$x + 0 = 80$	上	$x + 80 = 160$
隅	1	隅	1

又以商生隅入方，得数退一位，为 160，隅退二位，为 1，乃于实上；续商 4 里，生隅入从方内，得 164；乃命续商，除实适尽，所得 84 里，为田积，其形长 84 里，广 1 里；

一变	次商 $x = 4$
实	$(x + 160)x - 656 = 0$
上	$x + 160 = 164$
隅	1

以里法 300 步自乘，得 90000 步，乘 84 里，得 756 万步；以亩法 240 除之，得 31500 亩；又以顷法 100 亩约之，得 315 顷。

里法	300 步	$300^2 = 90000$ 步
长	84 里	$84 \times 90000 = 7560000$ 步
亩法	240 步	$7560000 \div 240 = 31500$ 亩
顷法	100 亩	$31500 \div 100 = 315$ 顷

第 21 题：斜荡求积

问：有荡一所，正北阔一十七里，自南尖穿径，中长二十四里，东南斜二十里，东北斜一十五里，西斜二十六里，欲知亩积几何。

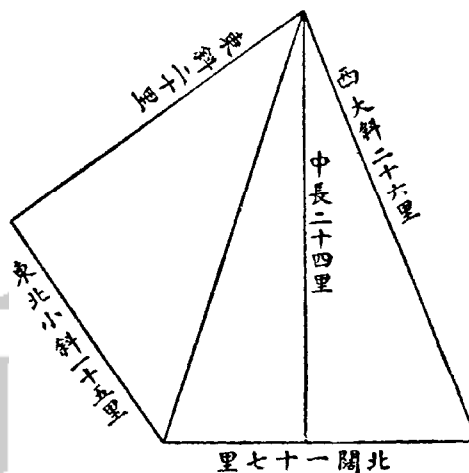
答曰：荡积：一千九百一十一顷六十亩。

术曰：以少广求之。

置中长乘北阔，半之，为寄；以中长幂减西斜幂，余为实；以一为隅，开平方，得数减北阔，余自乘，并中长幂，共为内率；以小斜幂并率，减中斜幂，余半之，自乘，于上；以小斜幂乘率，减上，余四，约之为实，以一为隅，开平方，得数加寄，共为荡积。

草曰：以中长 24 里乘北阔 17 里，得 408，乃半之，得 204 里，为寄；

以中长自乘，得 576，为长幂；以西斜 26 里自乘，得 676 为大斜幂，以减长幂，余 100 里为实；开平方，得 10 里；



北
圖 蕩 斜

一变	首商 $x = 10$
实	$(x + 0)x - 100 = 0$
上	$x + 0 = 10$
隅	1

以减北阔数 17 里，余 7 里，自乘，得 49 里；并长幂 576 得 625，为内率；

北阔	17	
中长	24	$24 \times 24 = 576$ ，长幂
寄	204 里	右块荡积
东南斜	20	$20 \times 20 = 400$ ，中幂
东北斜	15	$15 \times 15 = 225$ ，小斜幂
西斜	26	$26 \times 26 = 676$ ，大斜幂
实		$676 - 576 = 100$
内率		$(17 - 10) \times (17 - 10) + 576 = 625$

次置东小斜 15 里自乘，得 225，为小斜幂；又置东南中斜 20 里自乘，得 400，为中幂；却以小斜幂并内率，得 850，以减中幂 400，余 450，乃半之，得 225，自乘，得 50625 里，于上；又以小斜幂 225 乘内率 625 得 14625，减上余 9 万里，以 4 约得 22500，为实；

北阔	17	
中长	24	576，长幂
东南斜	20	400，中幂
东北斜	15	225，小斜幂
西斜	26	676，大斜幂
内率		625

开平方，得 150 为左块荡积；

一变	首商 $x = 100$	二变	首商 $x = 100$
实	$(x + 0)x - 22500 = -12500$	实	-12500
方	$x + 0 = 100$	方	$x + 100 = 200$
隅	1	隅	1

次位商 $x = 50$

一变	次商 $x = 50$
实	$(x + 200)x - 12500 = 0$
方	$x + 200 = 250$
隅	1

并寄 204 里，得 354 方里，为泛；以里法 360 自乘，得 129600 步，乘泛，得 45878400 步；以亩法 240 步约之，得 1911 顷 60 亩为荡积。

寄	204 里	
泛		$150 + 204 = 354$ 方里
荡积	354 里	
里法	360 步	$354 \times 360 \times 360 = 45878400$ 步
亩法	240 步	$45878400 \text{ 步} \div 240 = 191160$ 亩

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

第 22 题：计地容民

问：沙洲一段，形如棹刀，广一千九百二十步，从三千六百步，大斜二千五百步，小斜一千八百二十步，以安集民，每户给一十五亩，欲知地积，容民几何。

答曰：地积：二百三顷五十亩；容民：一千三百五十六户；余地：一十亩。

术曰：以少广求之。

置广乘长，半之为寄，以广幂，并纵幂，为中幂，以小斜幂并中幂，减大斜幂，余半之，自乘于上，以小斜幂乘中幂，减上，余以四约之，为实；

以一为隅，开平方，得数，加寄，共为积；以每户给数，除积，得容民户数。

草曰：置广 1920 步，乘纵 3600 步，得 6912000 步，乃半之，得 3456000 步，为寄；

以广自乘，得 3686400 步，为广幂；又以纵自乘，得 1296 万步，为纵幂；并广幂，得 16646400 步，为中幂；

次以小斜 1820 步自乘，得 3312400 步，为小斜幂；又以大斜 2500 步自乘，得 625 万步，为大斜幂；

却以小斜幂并中幂，得 19958800 步，以大斜幂减之，余 13708800 步，乃半之，得 6854400 步，自乘，得 4698279936 万步于上；次以小斜幂乘中幂，得 5513953536 万步，减上，余 815673600 万，以 4 约之，得 203918400 万，为实；

广	1920	$1920^2=3686400$ ，广幂
纵	3600	$3600^2=12960000$ ，纵幂
寄	3456000 步	右块地积
中幂		$3686400+12960000=16646400$ 步
小斜	1820	$1820^2=3312400$ ，小斜幂
大斜	2500	$2500^2=6250000$ ，大斜幂
		$(3312400+16646400-6250000)\div 2=6854400$
上		$6854400^2=46982799360000$
实		$(3312400\times 16646400-4698279936\text{ 万})\div 4=203918400\text{ 万}$

以 1 为隅，开平方，得 1428000 步； $2039184000000=2039184\times 1000000$

一变	首商 $x=1000$	二变	首商 $x=1000$
实	$(x+0)x-2039184=-1030184$	实	-1030184
方	$x+0=1000$	方	$x+1000=2000$
隅	1	隅	1

次位商 $x=400$

一变	次商 $x=400$	二变	次商 $x=400$
实	$(x+2000)x-1030184=-79184$	实	-79184
方	$x+2000=2400$	方	$x+2400=2800$
隅	1	隅	1

三位商 $x=20$

一变	三商 $x=20$	二变	三商 $x=20$
实	$(x+2800)x-79184=-22784$	实	-22784
方	$x+2800=2820$	方	$x+2820=2840$
隅	1	隅	1

四位商 $x=8$

一变	四商 $x=8$
实	$(x+2840)x-22784=0$

方	$x + 2840 = 2848$
隅	1

故商 $x = 1428000$ 为左块地积；

并寄 3456000 步，共得 4884000 步；以亩法 240 步除之，得 20350 亩；

次以顷法 100 亩约之，为 203 顷 50 亩，为地积，又为实；

以每户所给 15 亩为法，除实，得 1356 户，不尽 10 亩，不及一户所给数，以为余地 10 亩。

右块寄	3456000 步	
左块积	1428000 步	
地积		$1428000 + 3456000 = 4884000$ 步
亩法	240 步	$4884000 \div 240 = 20350$ 亩
顷法	100 亩	203.50 顷
户		$20350 \div 15 = 1356 + 10/15$

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

第 23 题：蕉田求积

问：蕉叶田一段，中长五百七十六步，中广三十四步，不知其周，求积亩合几何。

答曰：田积：四十五亩一角一十二万六千一百四十分步之五千二百一十三。

术曰：以长并广，再自乘；又十乘之，为实；半广，半长，各自乘，所得相减，余为从方，一为从隅，开平方，半之，得积。

【编者注：设田积的两倍为 x ，则根据术曰有：

$$x^2 + [(长/2)^2 - (广/2)^2]x - 10(长+广)^3 = 0;$$

这是秦九韶给出的近似值公式，出处未知。】

草曰：以长 576 步，并广 34 步，得 610，以两度自乘，得 226981000 步，进一位，即是以 10 乘之，得 226981 万步，定得此数，以为实；

置实 576 以半之，得 288，自乘得 82944 于上；

又置广 34 步，以半之，得 17，自乘，得 289，减上，余 82655，为从方；

长	576	$576 \div 2 = 288$
广	34	$34 \div 2 = 17, 17^2 = 289$
和	610	$610^3 = 226981000$ 步
实		$226981000 \times 10 = 2269810000$ 步
上		$288^2 = 82944$
从方		$82944 - 289 = 82655$

以 1 为从隅，开平方，得 21742 步；

一变	首商 $x = 20000$	二变	首商 $x = 20000$
实	$(x + 82655)x - 2269810000 = -216710000$	实	-216710000
从方	$x + 82655 = 102655$	从方	$x + 102655 = 122655$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 1000$

一变	次商 $x = 1000$	二变	次商 $x = 1000$
实	$(x + 122655)x - 216710000 = -93055000$	实	-93055000
从方	$x + 122655 = 123655$	从方	$x + 123655 = 124655$
从隅	1	从隅	1

三位商 $x = 700$

一变	三商 $x = 700$	二变	三商 $x = 700$
实	$(x + 124655)x - 93055000 = -5306500$	实	-5306500
从方	$x + 124655 = 125355$	从方	$x + 125355 = 126055$
从隅	1	从隅	1

四位商 $x = 40$

一变	四商 $x = 40$	二变	四商 $x = 40$
实	$(x + 126055)x - 5306500 = -262700$	实	-262700
从方	$x + 126055 = 126095$	从方	$x + 126095 = 126135$
从隅	1	从隅	1

五位商 $x = 2$

一变	五商 $x = 2$	二变	五商 $x = 40$
实	$(x + 126135)x - 262700 = -10426$	实	-10426
从方	$x + 126135 = 126137$	从方	$x + 126137 = 126139$
从隅	1	从隅	1

不尽 10426 步，以商生隅，入方，又并隅算，共得 126140 为母；与开方田积数 21742，及不尽 10426，皆半之，田积定得 10871 步 126140 分步之 5213；以亩法 240 约之，得 45 亩 1 角 11 步 126140 分步之 5213。

两倍田积数	21742 步	$21742 \div 2 = 10871$ 步
两倍田积不尽	10426 步	$10426 \div 2 = 5213$ 步
田积母数		$126139 + 1 = 126140$
田积数		$10871 + 5213/126140$ 步
亩法	240 步	$10871 \div 240 = 45$ 亩 + 71 步
角法	60 步	45 亩 + 71 步 = 45 亩 + 1 角 11 步
结果		45 亩 1 角 11 步 + $5213/126140$ 步

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 24 题：均分梯田

问：户业田一段，若梯之状，南广小三十四步，北广大五十二步，正长一百五十步，合系兄弟三人均分其田，边道各欲出入，其地形难分，经官，乞分：南甲、中乙，北丙，欲知其田共积，各人合得田数，及各段正长，大、小广几何。

答曰：田共积：二十六亩二百一十步。

甲得：八亩三角五十步；

小广：三十四步，系元南广；

大广：四十步五万八千七百九分步之五万二千二百八十四；大约百分步之八十九；

正长：五十七步二千四十五分步之八百五十三；大约百分步之四十一分；

乙得：八亩三角五十步；

小广：同甲大广；

大广：四十六步七万九千一百七十一亿七千七百一十二万六千二百五十七分步之六万一千四百八十二亿九千一百三十三万六千六十八；计大率约百分步之七十七分半强；

正长：四十九步四亿一千二百四十万六千三百一十九分步之三千二十七万六千三百一十九；大约百分步之四分九厘；

丙得：八亩三角五十步；

小广：同乙大广；

大广：五十二步，系元北广；

正长：四十三步八千四百三十三亿七千九十二万二千三百五十五分步之四千五百一亿二千三百二十五万九千八百九十三；大约百分步之五十三分强。

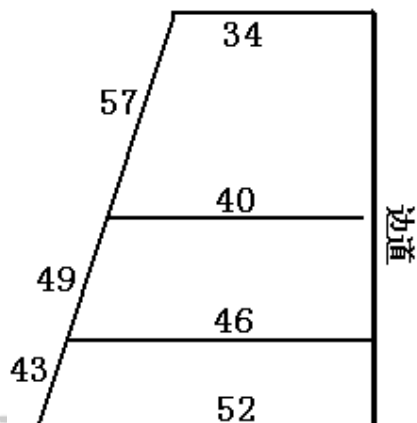
术曰：以少广，及从法求之。

并两广，乘长，得数，以分田人数约之，为通率；半之，为各积；以长乘各积，为共实；以长乘南广，为甲从方，二广差，半之，为共隅；开连枝平方，得甲截长；以甲长除通率，得数，减小广，余为甲广，即为乙小广；以元长乘乙小广，为乙从方；

置共隅，共实，开连枝平方，得乙截长；以乙长除通率，得数，减乙小广，余为乙大广，即为丙小广；并甲乙长，减元长，余为丙长，以元大广为丙大广；各有分者，通之。

草曰：置小广 34，并大广 52，得 86，乘长 150 得 12900，为实；以兄弟 3 人约之，得 4300，为通率；半之，得 2150，为各积。以亩法 240 步约之，得 8 亩；不尽 230 步，以角法 60 步约之，得 3 角 50 步；是三人各得 8 亩 3 角 50 步；

以元长 150 步，乘各积 2150，得 322500，为共实；以长 150，乘小广 34，得 5100，为甲从方；以小广减大广，余 18，乃半之，得 9，为共隅；



小广	34	
大广	52	
元长	150	
通率		$(34+52) \times 150 \div 3 = 4300$
各积		$4300 \div 2 = 2150$
亩法 240 步		$2150 \div 240 = 8 + 230/240$
共实		$150 \times 2150 = 322500$
共从方		$150 \times 34 = 5100$
共隅		$(52 - 34) \div 2 = 9$

开连枝平方[开方草，更不繁具]，

一变	首商 $x = 50$	二变	首商 $x = 50$
实	$(9x + 5100)x - 322500 = -45000$	实	-45000
从方	$9x + 5100 = 5550$	从方	$9x + 5550 = 6000$
从隅	9	从隅	9

次位商 $x = 7$

一变	次商 $x = 7$	二变	次商 $x = 7$
实	$(9x + 6000)x - 45000 = -2559$	实	-2559
从方	$9x + 6000 = 6063$	从方	$9x + 6063 = 6126$
从隅	9	从隅	9

得 57 步 ($\approx 57.417471671014525$)；不尽 $2559/(9+6126)$ ，约为 2045 分步之 853，为甲截长；

乃以分母 2045 通全步，内子，共得 117418，为法；又以分母乘通率 41300，得 8793500，为实，以法除之，得 74 步，不尽 104568，与法求等，得 2，俱约之，为 58709 分步之 52284；

乃以小广 34 步，于所得全步 74 步内减之，余 40 步 58709 分步之 52284，为甲大广，即为乙小广；

分子	853	
分母	2045	
实		$41300 \times 2045 = 8793500$
法		$57 \times 2045 + 853 = 117418$
实如法而一		$8793500 \div 117418 = 74.89056192$
甲小广	34 步	
甲大广		$74.89056192 - 34 = 40.89056192$ 步，乙小广

今欲求乙长，乃以分母 58709，通乙小广 40 步，得 2348360，内子 52284，得 2400644；又元长 150 步乘之，得 360096600，为乙从方；

又以分母 58709，通共实 322500，得 18933652500，为乙实；又以分母通共隅 9，得 528381，为乙从隅；

分子	52284	
分母	58709	
		$40 \times 58709 + 52284 = 2400644$
乙从方		$150 \times 2400644 = 360096600$
乙实		$58709 \times 322500 = 18933652500$
乙从隅		$9 \times 58709 = 528381$

开连枝平方[更不立草]，

一变	首商 $x = 40$
乙实	$(528381x + 360096600)x - 18933652500 = -3684378900$
乙从方	$528381x + 360096600 = 381231840$
乙从隅	528381
二变	首商 $x = 40$
实	-3684378900
从方	$528381x + 381231840 = 402367080$

从隅	528381
----	--------

次位商 $x=7$

一变	次商 $x=9$
乙实	$(528381x + 402367080)x - 3684378900 = -20276319$
乙从方	$528381x + 402367080 = 407122509$
乙从隅	528381
二变	次商 $x=9$
实	-20276319
从方	$528381x + 407122509 = 411877938$
从隅	528381

得 49 步 ($\approx 49.049225842817116$); 不尽 $20276319/(528381+411877938)$, 隅并方, 得共 412406319 为母, 与不尽求等, 得 1, 不可约, 乃定为 49 步 412406319 分步之 20276319, 为乙截长; 以乙长母通全步, 内子, 得 20228185950 为法; 以乙长步下母 412406319 乘通率 4300, 得 1773347171700 为实; 以法除之, 得 87 步, 不尽 13494994050, 与法求等, 得 150, 俱约之, 为 87 步 134854573 分步之 89966627, 为得数; 乃以乙小广母 58709, 乘得数子 89966627, 得 5281850704543 为泛; 却以得数母 134854573 分, 乘乙小广子 52284, 得 7050736494732, 以为寄数, 于上;

分子	20276319	
分母	412406319	
实		$412406319 \times 4300 = 1773347171700$
法		$49 \times 412406319 + 20276319 = 20228185950$
实如法而一		$87.6671381251565 = 87 + 13494994050/20228185950$
乙小广母	58709	$58709 \times 89966627 = 5281850704543$, 泛
乙小广子	52284	$134854573 \times 52284 = 7050736494732$, 寄

乃以小广母 58709, 乘得数母 134854573, 得 7917177126257, 为法; 以寄减泛, 今不及减, 乃破全步 1 为分, 内子, 并乘小广母 58709, 得 13199027830800; 故 $87 + 89966627/134854573$ 减去小广 $40 + 52284/58709$ 步, 及分, 余 46 步 7917177126257 分步之 6148291336068, 为乙大广, 亦丙小广; 7917177126257 与 6148291336068 之等为 58709, 可约之;

数母	134854573	
数子	89966627	
泛数	5281850704543	
寄数	7050736494732	
乙小广母	58709	$58709 \times 134854573 = 7917177126257$
		$(89966627 + 134854573) \times 58709 = 13199027830800$
		$13199027830800 - 7050736494732 = 6148291336068$
乙大广		$(87 + 89966627/134854573) - (40 + 52284/58709)$ $= 46 + 6148291336068/7917177126257$ $= 46 + 104724852/134854573$ 步, 亦丙小广

求丙长: 置甲长 57 步 2045 分步之 853, 乙长 49 步 412406319 分步之 20276319, 以甲乙分母互乘子, 甲乙分母相乘, 得甲正长 57 步 843370922355 分步之 351782590107, 乙正长 49 步 843370922355 分步之 41465072355, 并甲乙长及分, 共长 106 步 843370922355 分

步之 393247662462；用减元长 150 步，先破一步，通分母，作 843370922355，减去甲乙共长，余 43 步 843370922355 分步之 450123259893，为丙正长。843370922355 与 450123259893 之等为 3，可约之；

甲分子	853
甲分母	2045
乙分子	20276319
乙分母	412406319
通分子	$853 \times 412406319 + 2045 \times 20276319 = 393247662462$
通分母	$2045 \times 412406319 = 843370922355$
甲+乙	$57 + 49 + 393247662462 / 843370922355$
元长	150 步
丙正长	$150 - (106 + 393247662462 / 843370922355)$ $= 43 + 450123259893 / 843370922355$ $= 43 + 150041086631 / 281123640785$ $= 43.5337192070081$ 步

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

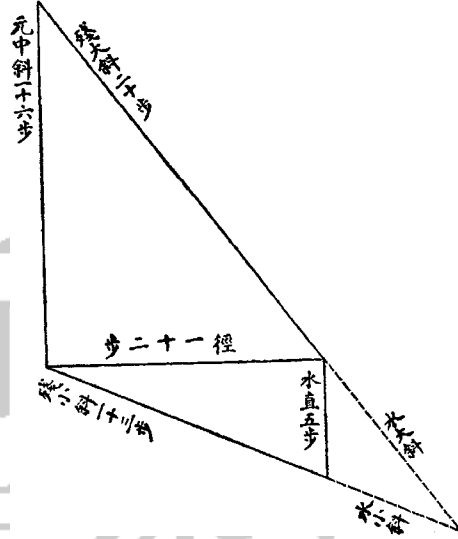
第 25 题：漂田堆积

问：三斜田，被水冲去一隅，而成四不等直田之状，元中斜一十六步，如元中斜之股，又如残田之广；残大斜二十步，如元中斜之弦；横量径一十二步，如元中斜之勾，亦是元小斜之股；残小斜一十三步，如元小斜之弦；水直五步，如元小斜之勾，又如残田之少阔；欲求元积，元大斜，元小斜；水积，二水斜；残积，各几何。

答曰：元积：一百三十九步一十一分步之七；
 元大斜：二十九步一十一分步之一；
 元小斜：一十八步一十一分步之一十；
 水积：一十三步一十一分步之七；
 水大斜：九步一十一分步之一；
 水小斜：五步一十一分步之一十；
 残积：一百二十六步；

术曰：以少广求之，连枝入之，又勾股入之。

置水直减中斜，余为法；以中斜乘大残，为大斜实；以法除实，得元大残；以残大斜减之，余为水大斜；以法乘径，又自之，为小斜隅；以水直幂并径幂为弦幂，又乘径幂，又乘中斜幂，为小斜实；与小斜隅约，约之，开连枝平方，得元小斜；以残小斜减之，余为水小斜；以水直幂，并水大斜幂，减水小斜幂，余半之，自乘于上，以水直幂乘水大斜幂，内减上，余四约之，通分纳子，为实；以母为从隅，开连枝平方，得水积；以水直并中斜，乘径，为实；以二为法，二为法，除之得残积；以残积并水积，共为元积；有分者，通之，重有者，重通之。



草曰：以水直 5 减中斜 16，余 11，为法；
 以中斜 16 乘大残 20，得 320，为大斜实；
 以法除之，得 29 步 11 分步之 1，为元大斜；
 内减残大斜 20 步，余 9 步 11 分步之 1，为水大斜；
 以法 11 乘径 12，得 132，自之，得 17424，为小斜隅；
 以水直 5 自乘，得 25，为水直幂；以径 12 自之，得 144，为径幂；
 并水直幂，得 169，为弦幂；以乘径幂 144，得 24336，于上；
 又以中斜 16 自乘，得 256，为中斜幂；以乘上，得 6230016，为小斜实；
 与小斜隅求等，得 144，俱约之，实得 43264，隅得 121；

水直	5	$5^2=25$ ，水直幂
中斜	16	$16-5=11$ ，法
大残	20	$16 \times 20=320$ ，大斜实
元大斜		$320 \div 11=29+1/11$
残大斜	20	
水大斜		$(29+1/11)-20=9+1/11$
小斜隅		$(11 \times 12)^2=17424$
径	12	$12^2=144$ ，径幂
弦幂		$25+144=169$
上		$169 \times 144=24336$
中斜幂		$16^2=256$
小斜实		$256 \times 169 \times 144=6230016$
求等		$(17424, 6230016)=144(121, 43264)$

开平方，开方不尽，以连枝术入之：用隅 121 乘实 43264，得 5234944，为定实；以 1 为定隅，开平方：

一变	首商 $x=2000$	二变	首商 $x=2000$
实	$(x+0)x-5234944=-1234944$	实	-1234944
从方	$x+0=2000$	从方	$x+2000=4000$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x=200$

一变	次商 $x=200$	二变	次商 $x=200$
实	$(x+4000)x-1234944=-394944$	实	-394944
从方	$x+4000=4200$	从方	$x+4200=4400$
从隅	1	从隅	1

三位商 $x=80$

一变	三商 $x=80$	二变	三商 $x=80$
实	$(x+4400)x-394944=-36544$	实	-36544
从方	$x+4400=4480$	从方	$x+4480=4560$
从隅	1	从隅	1

四位商 $x=8$

一变	四商 $x=8$
实	$(x+4560)x-36544=0$
从方	$x+4560=4568$
从隅	1

得 2288，为实；以约隅 121 除之，得 18 步，不尽 110，与法 121，俱以 11 约之，得 11 分步之 10，为元小斜；

减残小斜 13 步，余 5 步 11 分步之 10，为水小斜；

置水直幂 25 步，并水大斜幂 82 步 121 分步之 78，得 107 步 121 分步之 78，内减水小斜幂 34 步 121 分步之 111，余 72 步 11 分步之 8，半之，得 36 步 11 分步之 4，自乘，得 1322 步 121 分步之 38 于上；

次以水直幂 25 步，乘水大斜幂 82 步 121 分步之 78，得 2066 步 121 分步之 14，内减上，余 743 步 121 分步之 97，以 4 约之，得 185 步 121 分步之 115，通分纳子，得 22500 步，为实；

元小斜	18+10/11	
残小斜	13 步	
水小斜		$18+10/11-13=5+10/11$
水直幂	25	
水大斜幂	$82+78/121$	
水小斜幂	$34+111/121$	
求差		$(25+82+78/121)-(34+111/121)=72+8/11$
半之		$(72+8/11)\div 2=36+4/11$
自乘，上		$(36+4/11)^2=1322+38/121$
		$25\times(82+78/121)=2066+14/121$
减上		$(2066+14/121)-(1322+38/121)=743+97/121$
		$(743+97/121)\div 4=22500/121$

以母 121 为隅，开连枝平方：用隅 121 乘实 22500，得 2722500，为实；以 1 为隅，开

平方：

一变	首商 $x = 1000$	二变	首商 $x = 1000$
实	$(x + 0)x - 2722500 = -1722500$	实	-1722500
从方	$x + 0 = 1000$	从方	$x + 1000 = 2000$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 600$

一变	次商 $x = 600$	二变	次商 $x = 600$
实	$(x + 2000)x - 1722500 = -162500$	实	-162500
从方	$x + 2000 = 2600$	从方	$x + 2600 = 3200$
从隅	1	从隅	1

三位商 $x = 50$

一变	三商 $x = 50$
实	$(x + 3200)x - 162500 = 0$
从方	$x + 3200 = 3250$
从隅	1

得 1650 为实；以隅 121 除之，得 13 步，不尽 77，与法 121 有等 11，俱以 11 约之，得 11 分步之 7，为水积；

置中斜 16，并水直 5，得 21，乘径 12；得 252，以半之，得 126，为残积，以并水积，共得 139 步 11 分步之 7，为元积；

中斜	16	
水直	5	
径	12	
残积		$(16 + 5) \times 12 \div 2 = 126$ 步
水积	$13 + 7/11$	
元积		$126 + 13 + 7/11 = 139 + 7/11$ 步

【编者注：原文求水积时是按照直角三角形计算的，得到的是近似值。事实上，被水冲去的三角形是三边长都不等的三角形，其面积完全可以用“20 三斜求积”得到的结果计算出精确值，本文依此修改。】

第 26 题：环田三积

问：环田大小圆田共三段，环田外周三十步，虚径八步，大圆田径一十步，小圆田周三十步，欲知三田积，及环内周，通、实径，大圆周，小圆径各几何？

答曰：环田：

积，二十步二百三十六万二千二百五十六分步之一百二十九万八千二十五；

通径，九步一十九分步之九；

实径，一步一十九分步之九；

内周，二十五步一十七分步之五；

大圆田：

积，七十九步五十三分步之三；

周，三十一步二十一分步之十三；

小圆田：

积，七十一步二百八十六分步之四十三；

径，九步一十九分步之九；

术曰：以方田及少广率变求之。

各置环圆径自乘为幂，进位为实。

以一为隅开平方得周。各置圆环周自乘为幂，退位为实。

以一为隅，开平方得径。

以周幂或径幂乘各实，以一十六约之为实。

以一为隅，开平方得圆积。

置环周幂，乘径实，十六约之为大率。

置虚径幂，乘内周实，十六约之为小率。

以二率相减之，余以自乘为实。并二率，倍之，为从上廉。

一为益隅，开三乘方，得环积。

置环周自乘，退位为实，一为隅，开平方，得通径。

以虚径减通径，余为实径。

其有开不尽者，约而命之。

草曰：置大圆径 10 步自乘，得 100 为径幂。进位得 1000 为大圆实。

大圆径	10 步	
径幂		$10^2=100$ 步
大圆实		$100 \times 10=1000$ 步，取圆周率为 $\sqrt{10}$

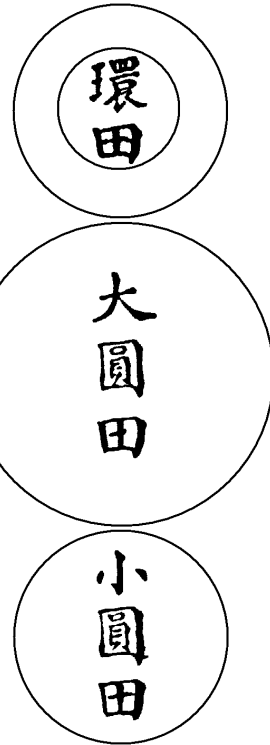
以 1 为隅开平方：

一变	首商 $x=30$	二变	首商 $x=30$
实	$(x+0)x-1000=-100$	实	-100
从方	$x+0=30$	从方	$x+30=60$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x=1$

一变	次商 $x=1$	二变	次商 $x=1$
实	$(x+60)x-100=-39$	实	-39
从方	$x+60=61$	从方	$x+61=62$
从隅	1	从隅	1

得 31 步，不尽 39 为分子，乃以隅生方，又益隅，共得 63 为分母。以分子与母求等得



3, 俱以 3 约之, 母于得 21 分步之 13, 为大圆周 31 步 21 分步之 13。

次以径幂 100, 乘前实 1000 得 10 万, 以 16 约之, 得 6250, 为实。

径幂	100 步	
大圆实	1000 步	
实		$(100 \times 1000) \div 16 = 6250$ 步

以 1 为隅, 开平方:

一变	首商 $x = 70$	二变	首商 $x = 70$
实	$(x + 0)x - 6250 = -1350$	实	-1350
从方	$x + 0 = 70$	从方	$x + 70 = 140$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 9$

一变	次商 $x = 9$	二变	次商 $x = 9$
实	$(x + 140)x - 1350 = -9$	实	-9
从方	$x + 140 = 149$	从方	$x + 149 = 158$
从隅	1	从隅	1

得 79 步, 不尽 9 为分子。乃以隅生方, 又增隅得 159 为分母。以分子母求等得 3, 俱以 3 约母子, 得 53 分步之 3, 为大圆积 79 步 53 分步之 3。

次置小圆田周 30 步, 以自乘得 900 为周幂。退位为 90, 为径实。

小圆田周	30 步	
周幂		$30^2 = 900$ 步
径实		$900 \div 10 = 90$ 步, 取圆周率为 $\sqrt{10}$

以 1 为隅, 开平方:

一变	首商 $x = 9$	二变	首商 $x = 9$
实	$(x + 0)x - 90 = -9$	实	-9
从方	$x + 0 = 9$	从方	$x + 9 = 18$
从隅	1	从隅	1

得 9 步。不尽 9, 以隅生方, 又益隅, 得 19 分步之 9, 为小圆径 9 步 19 分步之 9。

次以周幂 900, 乘前实 90, 得 81000, 以 16 约之, 得 5062 步 5 分为实。

周幂	900 步	
前实	90 步	
实		$(900 \times 90) \div 16 = 5062.5$ 步

以 1 为隅, 开平方:

一变	首商 $x = 70$	二变	首商 $x = 70$
实	$(x + 0)x - 5062.5 = -162.5$	实	-162.5
从方	$x + 0 = 70$	从方	$x + 70 = 140$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 1$

一变	次商 $x = 1$	二变	次商 $x = 1$
实	$(x + 140)x - 162.5 = -21.5$	实	-21.5
从方	$x + 140 = 141$	从方	$x + 141 = 142$
从隅	1	从隅	1

得 71 步。有不尽数 21 步 5 分为子, 以隅生方, 又益隅, 得 143 为分母, 以分子母求等

得 5 分，俱约之得 286 分步之 43 为积。

次置环田周 30 步自乘，得 900 为周幂。退位得 90，为环田实。

环田周	30 步	
周幂		$30^2=900$ 步
环田实		$900 \div 10=90$ 步，取圆周率为 $\sqrt{10}$

以 1 为隅开平方：

一变	首商 $x=9$	二变	首商 $x=9$
实	$(x+0)x-90=-9$	实	-9
从方	$x+0=9$	从方	$x+9=18$
从隅	1	从隅	1

得 9 步，不尽 9 为分子，以隅生方，并隅得 19 为分母。直命之为环田通径 9 步 19 分步之 9。

次以环周幂 900 步，乘环实 90 步，得 81000 步，以 16 约之，得 5062 步 5 分，为大率。

次置环田虚径 8 步自乘，得 64 为虚幂，进位得 640 为实。

环周幂	900 步	
环实	90 步	
大率		$(900 \times 90) \div 16=5062.5$ 步
环田虚径	8 步	
虚幂		$8^2=64$ 步
实		$64 \times 10=640$ 步，取圆周率为 $\sqrt{10}$

以 1 为隅，开平方：

一变	首商 $x=20$	二变	首商 $x=20$
实	$(x+0)x-640=-240$	实	-240
从方	$x+0=20$	从方	$x+20=$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x=5$

一变	次商 $x=5$	二变	次商 $x=5$
实	$(x+40)x-240=-15$	实	-15
从方	$x+40=45$	从方	$x+45=50$
从隅	1	从隅	1

得 25 步，不尽 15 为分子，以隅生方，又并隅得 51 为分母。与子求等得 3，俱约之得 17 分步之 5，为环田内周 25 步 17 分步之 5。

次以虚幂 64，乘周实 640，得 40960，以 16 约之，得 2560 为小率。以小率减大率，余 2502 步 5 分，自乘得 6262506 步 2 分 5 厘为实。以小、大二率并之，得 7622 步 5 分，倍之得 15245 为从上廉。

虚幂	64 步	
周实	640 步	
小率		$(64 \times 640) \div 16=2560$ 步
大率	5062.5 步	
实		$(5062.5-2560)^2=6262506.25$ 步
从上廉		$(2560+5062.5) \times 2=15245$ 步

以 1 为益隅，开玲珑三乘方：

以 $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{-1, 0, 15245, 0, -6262506.25\}$ 进行一变：

一变	商 $x = 20$
实	$((-x + 0)x + 15245)x + 0 - 6262506.25 = -324506.25$
方	$((-x + 0)x + 15245)x + 0 = 296900$
从上廉	$(-x + 0)x + 15245 = 14845$
虚下廉	$-x + 0 = -20$
益隅	-1

一变结束。以 $\{a_4, a_3, a_2, a_1\} = \{-1, -20, 14845, 296900\}$ 进行二变：

二变	商 $x = 20$
实	-324506.25
方	$((-x - 20)x + 14845)x + 296900 = 577800$
从上廉	$(-x - 20)x + 14845 = 14045$
虚下廉	$-x - 20 = -40$
益隅	-1

二变结束。以 $\{a_4, a_3, a_2\} = \{-1, -40, 14045\}$ 进行三变：

三变	商 $x = 20$
实	-324506.25
方	577800
从上廉	$(-x - 40)x + 14045 = 12845$
虚下廉	$-x - 40 = -60$
益隅	-1

三变结束。以 $\{a_4, a_3\} = \{-1, -60\}$ 进行四变：

四变	商 $x = 20$
实	-324506.25
方	577800
从上廉	12845
虚下廉	$-x - 60 = -80$
益隅	-1

四变结束。实不为 0，故得 20 步。不尽 324506 步 2 分 5 厘为分子，续商无数，乃以益隅 1，益下廉 80，并之，得 81 为减母。次以从上廉 12845，并从方 577800 得 590645，以减母 81 减之，余 590564 为分母。以分子求等得 2 分 5 厘，俱约之得 2362256 分步之 1298025，为环田积 20 步 2362256 分步之 1298025。

【亦即： $x = 20 \frac{324506.25}{-1 - 80 + 12845 + 577800} = 20 \frac{1298025}{2362256}$ 为所求近似值。

本题精确解为 $x = 20.5548$ 和 121.748 ，均可用上述方法求得；】

次置环田通径 9 步 19 分步之 9，以虚径 8 步减之，余 1 步 19 分步之 9 为环田实径。合问。

第 27 题：围田租亩

问：有兴复围田，已成，共计三千二十一顷五十一亩一十五步，分三等：

其每亩起租：上等，六斗；中等，四斗五升；下等，四斗；

中田多上田弱半，不及下田太半；欲知三色田亩及各租几何。

馆按：题言“中田多上田弱半，不及下田太半”，盖以弱半为三分之一，太半为三分之二也。多上田弱半者，即比上田多三分之一也；不及下田太半者，即比下田少三分之二也。是上田加三分之一为中田，即下田三分之一也。转言之，则中田为下田三分之一，上田为中田四分之三也。

答曰：上田四百七十七顷八亩一十五步，米二万八千六百二十四石八斗三升七合五勺；

中田六百三十六顷一十亩三角，米二万八千六百二十四石八斗三升七合五勺；

下田一千九百八顷三十二亩一角，米七万六千三百三十二石九斗。

术曰：以衰分求之。

列母子，求田率，副并为法，以共田为实，实如法而一，得一分之率，以遍乘未并者，得三等田，各以起租乘之，各得米。

草曰：置弱半母 4 为中率，子 3 为上率，以太半子 2 减母 3 余 1，以乘中率 4，只得 4，为中泛；又以余 1 乘上率 3，只得 3，为上泛；次以太半母 3 乘中泛 4 得 12，为下泛副；并三泛得 19，为法。

中率	4	弱半母
上率	3	弱半子
中泛	$(3-2) \times 4 = 4$	
上泛	$(3-2) \times 3 = 3$	
下泛副	$3 \times 4 = 12$	
上田	$(1-1/4) = 3/4$ 中田	$(1-3/4) = 1/4$ 下田
中田	$(1+1/3) = 4/3$ 上田	$(1-2/3) = 1/3$ 下田
下田	4 上田	3 中田
上田：中田：下田	$= 3/4$ 中田：中田：3 中田	$= 3 : 4 : 12$
法		$3 + 4 + 12 = 19$

置田 3021 顷 51 亩 15 步，以亩法 240 通之，得 72516240 步，纳子 15 步得 72516255 步，为实；以法 19 除之，得 3816645 步，为一分之数；以上泛 3 因之，得 11449935 步，为上积；又以中泛 4 因一分之数，得 15266580 步，为中积；又以下泛 12 乘一分之数，得 45799740 步，为下积。

其三积，各以亩法 240 约之，为亩；其上田得 477 顷 8 亩 15 步；其中田得 636 顷 10 亩 3 角；其下积得 1908 顷 32 亩 1 角；

亩法	240 步
田	302151 亩 15 步
实	$302151 \times 240 + 15$ 步 = 72516255 步
一分之数	$72516255 \div 19 = 3816645$ 步
上积	$3816645 \times 3 = 11449935$ 步 = 477 顷 8 亩 15 步
中积	$3816645 \times 4 = 15266580$ 步 = 636 顷 10 亩 3 角
下积	$3816645 \times 12 = 45799740$ 步 = 1908 顷 32 亩 1 角

各以起租乘三积为三实，其上积 11449935 步，乘上积 6 斗，得 68699610 石为实；以亩法 240 除之，得 286248 石 8 斗 3 升 7 合 5 勺为上田租；其中积 15266580 步，乘中田租 4 斗 5 升，得 68699610 石，为实；以亩法 240 除之，得 286248 斗 3 升 7 合 5 勺；其下积 45799740 步，乘下租 4 斗，得 183198960 石，为实；以亩法 240 除之，得 76332 石 9 斗，为下田米。

	上	中	下
泛	3	4	12
田积	11449935 步	15266580 步	45799740 步
每亩起租	6 斗	4.5 斗	4 斗
实	11449935×6 =68699610 石	15266580×4.5 =68699610 石	45799740×4 =183198960 石
田租米	$68699610 \div 240$ =286248.375 斗	$68699610 \div 240$ =286248.375 斗	$183198960 \div 240$ =763329 斗

馆按：草内求各衰数，意谓以三分为上田衰数，加弱半三分之一得四分，为中田衰数，三因中田衰数得一十二分，为下田衰数。并之得一十九分，为总衰数。其法本属显明，但语中参入母子，副泛等名目，其意反晦矣。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

“田域第三”现代文翻译

第 19 题：求尖田的面积

问题：有一块由两个底相同的等腰三角形构成的尖田，两腰长度不相等，两大的腰长 39 步，两小的腰长 25 步，中间的底长 30 步。请问：尖田的面积的是多少。

【原文】尖田求积

问有两尖田一段，其尖长不等，两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步。欲知其积几何？

第 20 题：根据边长求面积

问题：有边长不等的沙田，它的最小边长 13 里，中等边长 14 里，最大边长 15 里；已知 1 里等于 300 步。请问：沙田的面积的是多少。

【原文】三斜求积

问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步。欲知为田几何。

第 21 题：求洼地的面积

问题：有块洼地由两个三边长都不等的三角形构成，其中一边重合。正北方边长 17 里，它上面的高穿过南方尖部，高长 24 里，东南边长 20 里，东北边长 15 里，西方边长 26 里；请问：洼地的面积的是多少。

【编者注：荡（蕩 dàng）<名>

浅水湖 [shallow lake]。如：黄天荡。

积水长草的洼地 [marsh]。如：芦苇荡，荡地，芦花荡，菱荡。】

【原文】斜荡求积

问有荡一所，正北阔一十七里，自南尖穿径，中长二十四里，东南斜二十里，东北斜一十五里，西斜二十六里，欲知亩积几何。

第 22 题：安置难民

问题：有块沙洲，形如棹刀，由一个直角三角形和斜边上一个三边长都不等的三角形构成。直角边广 1920 步，直角边从 3600 步，大斜 2500 步，小斜 1820 步，用以安置难民，每户配给 15 亩；请问：沙洲的面积的是多少，可容纳多少难民。

【编者注：棹（zhào），本义：长的船桨 [long oar]。】

【原文】计地容民

问沙洲一段，形如棹刀，广一千九百二十步，从三千六百步，大斜二千五百步，小斜一千八百二十步，以安集民，每户给一十五亩，欲知地积容民几何。

第 23 题：求蕉叶田面积

问题：有块田形状如同蕉叶，中长 576 步，中广 34 步，不知其周长，请问：蕉叶田的面积的是多少亩。

【原文】蕉田求积

问蕉叶田一段，中长五百七十六步，中广三十四步，不知其周，求积亩合几何。

第 24 题：平均分配梯田

问题：有块形状为直角梯形的农田，南边底长 34 步，北边底长 52 步，斜腰长 150 步，直角腰作为出入边道；由兄弟三人要平分这块农田，其地形难分，要求官府来帮助分配：南面的归甲、中间的归乙，北面的归丙；请问：田的面积是多少，各人分得田的面积是多少，及各段田的边长是多少。

【原文】均分梯田

问户业田一段，若梯之状，南广小三十四步，北广大五十二步，正长一百五十步，合系

兄弟三人均分其田，边道各欲出入，其地形难分，经官乞分定南甲乙，北丙，欲知其田共积，各人合得田数，及各段正长大小广几何。

第 25 题：计算被水冲毁的田地面积

问题：有块三边长都不等的三角形构成的三斜田，被水冲去右下角这个三角形角落，而变成四不等直田（高过底边端点的梯形田），元中斜 16 步，看作是大三角形的股，又看作是残田的下底边；残大斜 20 步，看作是大三角形的弦；横量径 12 步，看作是大三角形的勾，也看作是中三角形的股；残小斜 13 步，看作是中三角形的弦；水直 5 步，看作是中三角形的勾，又看作是残田的上底边；请问：原三角形面积，大斜和小斜；被水冲去的三角形面积，大斜和小斜；残留的四不等直田面积，各是多少。

【编者注：原文求水积时，是按照直角三角形来计算的，得到的是水积的近似值，故其题目叙述也刻意强调这一点，因此导致混乱。事实上，被水冲去的三角形是三边长都不等的三角形，其面积完全可以用“20 三斜求积”得到的结果计算出精确值，本文依此修改了题目的叙述和解答。

《数书九章新释》237 页示意图中的虚线没有意义，应删除；可取《文渊阁四库全书·子部·天文算法类·数学九章》797—419 页的“漂田图”。】

【原文】漂田堆积

问三斜田，被水冲去一隅，而成四不等直田之状，元中斜一十六步，如多长；水直五步，如少阔；残小斜一十三步，如弦；残大斜二十步，如元中斜之弦；横量径一十二步，如残田之广；又如元中斜之勾，亦是水直之股。欲求元积残，积水，积元大斜，元小斜，二水斜各几何。

第 26 题：测算环形田面积

问题：环形田，大圆田，小圆田，共三块；环形田外周 30 步，内直径 8 步；大圆田直径 10 步，小圆田周 30 步。请问：三块田的面积；以及环形田内圆周长，外圆直径，环形田实径；大圆田周长；小圆田直径；各是多少。

【编者注：环形田外周和小圆田周都是 30 步，《文渊阁四库全书·子部·天文算法类·数学九章》和《丛书集成：数书九章》的附图不合理。】

【原文】环田三积

问环田大小圆田共三段，环田外周三十步，虚径八步，大圆田径一十步，小圆田周三十步，欲知三田积及环内周通实径大圆周小圆径各几何。

第 27 题：新开垦农田的租税

问题：现有重新开垦的农田，共计 3021 顷 51 亩 15 步，分成三个等级：

其中：上等田每亩起租税 6 斗；中等田每亩起租税 4 斗 5 升；下等田每亩起租税 4 斗；中田比上田多 $\frac{1}{3}$ ，中田比下田少 $\frac{2}{3}$ ；请问：三类田的亩数，以及租税数，各是多少。

【原文】围田租亩

问有兴复围田已成，共计三千二十一顷五十一亩一十五步，分三等：其上等每亩起租六斗；中等四斗五升；下等四斗；中田多上田弱半，不及下田太半；欲知三色田亩及各租几何。

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

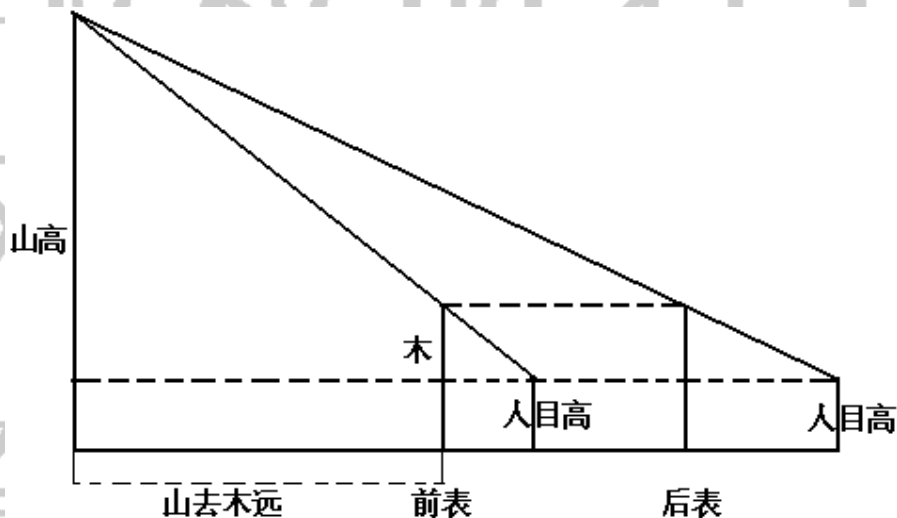
淳佑七年（丁未，1247年）

测望第四

28 望山高远，29 临台测水，30 陟岸测水，31 表望方城，32 遥度圆城
33 望敌圆营，34 望敌远近，35 望知敌众，36 表望浮图

第 28 题：望山高远

问：名山去城，不知高远。城外平地有木一株，高二丈三尺，假为前表，乃立后表，与木齐高，相去一百六十四步，先退前表三丈九寸，次退后表三丈七尺三寸，斜望山峰，各与其表之端参合。人目高五尺，里法三百六十步，步法五尺。欲知山高，及山去木远各几何。



答曰：高，一里一百四步五十分步之四十三；山去木远，二里七十一步十六分步之十三；
术曰：以勾股求之，重差入之。

置二退表相减，余为法；以步法通表间为寄，以目高减表高，余乘寄于上；以目高乘法，并上，为高实；实如法而一，得山高；以表间乘退后表，为远实；实如法而一，得山远。

草曰：置后退表 3 丈 7 尺 3 寸，减前退表 3 丈 9 寸，余 64 寸，为法；

置表去木 164 步，以步法 50 寸，通得 8200 寸，为表间，并法 64 寸，得 8264 寸，于上；
以目高 5 尺，减表高 2 丈 3 尺，余通之，为 180 寸，乘上，得 1487520 寸，为高实，实如法
64 寸而一，得 23242 寸 2 分寸之 1，为积寸；次以步法 50 寸约之，得 464 寸 50 分步之 43；
次以里法 360 步约之，得 1 里 104 步 50 分步之 43，为山高；

前退表	309 寸	
后退表	373 寸	
法		$373 - 309 = 64$ 寸
表间		$164 \times 50 = 8200$ 寸
上		$8200 + 64 = 8264$ 寸
表高	230 寸	
目高	50 寸	
余		$230 - 50 = 180$ 寸

高实		$8264 \times 180 = 1487520$ 寸
山高 (积寸)		$1487520 \div 64 = 23242.5$ 寸
以步法约之		$23242.5 \div 50 = 464.85$ 步
以里法约之		$464.85 \div 360 = 1.29125$ 里
换算为米		$1.29125 \times 552.96 = 714.0096$ 米

次以表间 8200 寸，乘前退表 309 寸，得 39590 寸 8 分寸之 5 为远实，实如法 64 寸而一，得 791 寸 16 分寸之 13，得 2 里 71 步 16 分步之 13，为山去木远；

法	64 寸	
表间	8200 寸	
远实		$8200 \times 309 = 2533800$ 寸
山去木远		$2533800 \div 64 = 39590.625$ 寸
以步法约之		$39590.625 \div 50 = 791.8125$ 步
以里法约之		$791.8125 \div 360 = 2.1994791667$ 里
换算为米		$2.199479167 \times 552.96 = 1216.224$ 米

【编者注：原文如下：

问：名山去城，不知高远。城外平地有木一株，高二丈三尺，假为前表，乃立后表，与木齐高，相去一百六十四步，先退前表三丈九寸，次退后表三丈一尺三寸，斜望山峰，各与其表之端参合。人目高五尺，里法三百六十步，步法五尺。欲知山高，及远各几何。

答曰：高，二十里半零三步五分步之三；

远，二十七里三百二十八步五百七十五分步之六十七；

原文数据错误，计算结果为：

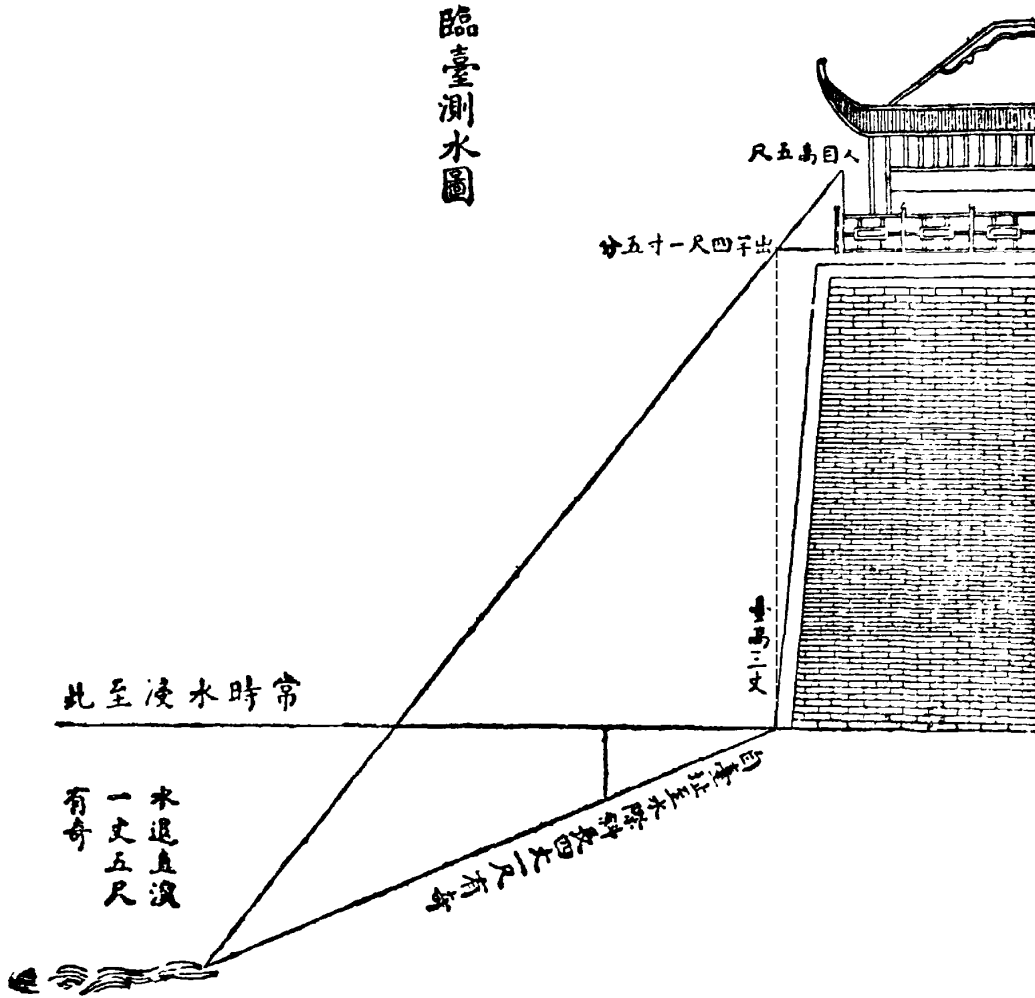
山去木远	633450 寸	35.19167 里	19459.58 米	难以目测
山高	368950 寸	20.49722 里	11334.14 米	珠穆朗玛峰海拔 8848 米

宋代 1 尺 \approx 30.72 厘米，亦即：1 里 \approx 552.96 米；】

第 29 题：临台测水

问：临水城台，立高三丈，其上架楼；其上、下址间，侧脚阔二尺；因护岸排沙，下桩，去址一丈二尺，外桩露土，高五尺，与下址平；遇水涨时，水浸至下址；今水退不知多少，人从楼上栏杆腰串间，虚驾一竿出外，斜望水际，得四尺一寸五分，乃与竿端参合；人目高五尺，人目距上址二尺一寸五分；欲知水退立深，自台下址，至水际，涸岸斜长，各几何？

答曰：水退立深，一丈五尺一百五十七分尺之一百三十五；
涸岸斜长，四丈一尺一百五十七分尺之三十七；



术曰：以勾股，变法，兼少广求之。

求涸岸斜长：置台高，并目高，以乘出竿，为上；以目高，乘脚阔，减上，余自乘，为段；以去下址幂，并岸高幂，乘段，为峻实；

次置去下址，乘目高，为寄，以出竿，乘岸高，减寄，余自乘，为峻隅；

验峻实，峻隅，两者可约；求等，约之，为峻定实，峻定隅；

开同体连枝平方，得峻岸斜长；

同体格：先以隅开平方，得数，名峻隅；

次以定实开平方，得数，为峻实；

以峻隅为法，除之，得峻斜；

求水退深：置岸高幂，乘段，为深实；以峻隅为深隅；其深实，深隅，可约，约之；

仍以同体格入之，开连枝平方；

以深隅为法，除深实，得水退深；

草曰：求涸岸斜长：以出竿 4 尺 1 寸 5 分，乘台高 30 尺，得 124 尺 5 寸，为段；

以去下址 12 尺，乘段，得 1494 尺，以为阔泛；以护岸高 5 尺，乘段 124 尺 5 寸，得 622 尺 5 寸，为浅泛；以目高 5 尺，乘去下址 12 尺，得 60 尺，为约泛；

以阔泛，浅泛，约泛，三者求等，等得 1 尺 5 寸，皆以约：其阔泛得 996 尺，为阔率；其浅泛得 415 尺，为浅率；其约泛得 40 尺，为约率；

出竿	4.15	
台高	30 尺	
段		$4.15 \times 30 = 124.5$ 尺
去下址	12 尺	
阔泛		$12 \times 124.5 = 1494$ 尺
护岸高	5 尺	
浅泛		$5 \times 124.5 = 622.5$ 尺
目高	5 尺	
约泛		$5 \times 12 = 60$ 尺
阔率		$1494 \div 1.5 = 996$ 尺， $996^2 = 992016$ 尺，为阔幂
浅率		$622.5 \div 1.5 = 415$ 尺， $415^2 = 172225$ 尺，为浅幂
约率		$60 \div 1.5 = 40$ 尺

以阔率 996 自乘，得 992016 尺，为阔幂；以浅率 415 自乘，得 172225 尺，为浅幂，并阔、浅二幂，得 1164241 尺，为竣幂；

以阔幂 992016 尺，乘竣幂，得 1154945699856 尺，于上；又以台高 30 尺自乘，得 900 尺，为台高幂，乘上，得 1039451129870400 尺，为竣实；

次以阔率 996，乘浅率 415，得 413340，为寄；以台高 30，乘阔率 996，得 29880，又乘约率 40，得 1195200，内减寄，余 781860 尺，自乘，得 611305059600 尺，为竣隅；

以隅与竣实求等，得 24800400，俱以约之，得 41912676 尺，为竣定实；得 24649，为竣定隅；

阔幂	992016 尺	
浅幂	172225 尺	
竣幂		$992016 + 172225 = 1164241$ 尺
上		$992016 \times 1164241 = 1154945699856$ 尺
台高	30 尺	$30^2 = 900$ ，台高幂
竣实		$900 \times 1154945699856 = 1039451129870400$ 尺 $= 24800400 \times 41912676$
阔率	996 尺	
浅率	415 尺	
约率	40 尺	
寄		$996 \times 415 = 413340$
竣隅		$(30 \times 996 \times 40 - 413340)^2 = 611305059600$ 尺 $= 24800400 \times 24649$
竣定实		$1039451129870400 \div 24800400 = 41912676$ 尺
竣定隅		$611305059600 \div 24800400 = 24649$ 尺

开同体连枝平方，得竣岸至水际斜长。验同体格：

乃以定隅 24649 为实，先以 1 为隅，开平方：

一变	首商 $x = 100$	二变	首商 $x = 100$
实	$(x + 0)x - 24649 = -14649$	实	-14649
从方	$x + 0 = 100$	从方	$x + 100 = 200$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 50$

一变	次商 $x = 50$	二变	次商 $x = 50$
实	$(x + 200)x - 14649 = -2149$	实	-2149
从方	$x + 200 = 250$	从方	$x + 250 = 300$
从隅	1	从隅	1

三位商 $x = 7$

一变	三商 $x = 7$
实	$(x + 300)x - 2149 = 0$
从方	$x + 300 = 307$
从隅	1

得 157，为同体法。

次以竣定实 41912676 尺为实，亦以 1 为隅，开平方：

一变	首商 $x = 6000$	二变	首商 $x = 6000$
实	$(x + 0)x - 41912676 = -5912676$	实	-5912676
从方	$x + 0 = 6000$	从方	$x + 6000 = 12000$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x = 400$

一变	次商 $x = 400$	二变	次商 $x = 400$
实	$(x + 12000)x - 5912676 = -952676$	实	-952676
从方	$x + 12000 = 12400$	从方	$x + 12400 = 12800$
从隅	1	从隅	1

三位商 $x = 70$

一变	三商 $x = 70$	二变	三商 $x = 70$
实	$(x + 12800)x - 952676 = -51776$	实	-51776
从方	$x + 12800 = 12870$	从方	$x + 12870 = 12940$
从隅	1	从隅	1

四位商 $x = 4$

一变	四商 $x = 4$
实	$(x + 12940)x - 51776 = 0$
从方	$x + 12940 = 12944$
从隅	1

得 6474 尺，为同体实；实如同体法 157 而一，得 41 尺，不尽 37，与法 157 求等，得 1；俱以 1 各约之；其法与余只得此数，乃直命之，得 4 丈 1 尺 157 分寸之 37，为涸岸斜长至水际。

同体法	157 尺	
同体实	6474 尺	
涸岸斜长至水际		$6474 \div 157 = 41 \text{ 尺} + 37/157$

求退水深：置岸高 5 尺，自乘，得 25 尺，为岸高幕；乘竣定实 41912676 尺，得 1047816900 尺，为深泛；以去岸 12 尺自乘，得 144 尺，为去岸幕；并岸高幕 25 尺，得 169 尺，以乘竣

定隅 24649，得 4165681 尺，为深隅泛；置二泛求等，得 169，俱约二泛，得 6200100，为定实；得 24649，为深定隅；

岸高	5 尺	$5^2=25$ 尺，为岸高幂
竣定实	41912676 尺	
深泛		$25 \times 41912676 = 1047816900$ 尺 $= 169 \times 6200100$
去岸	12 尺	$12^2=144$ 尺，为去岸幂
竣定隅	24649 尺	
深隅泛		$(144+25) \times 24649 = 4165681$ 尺 $= 169 \times 24649$
深定实		$1047816900 \div 169 = 6200100$
深定隅		$4165681 \div 169 = 24649$

开连枝平方，得水退立深。验同体格：

乃以深定隅 24649 为实，先以 1 为隅，开平方，得 157，为同体法；
次以深定实 6200100 为实，亦以 1 为隅，开平方：

一变	首商 $x=2000$	二变	首商 $x=2000$
实	$(x+0)x - 6200100 = -2200100$	实	-2200100
从方	$x+0=2000$	从方	$x+2000=4000$
从隅	1	从隅	1

次位商 $x=400$

一变	次商 $x=400$	二变	次商 $x=400$
实	$(x+4000)x - 2200100 = -440100$	实	-440100
从方	$x+4000=4400$	从方	$x+4400=4800$
从隅	1	从隅	1

三位商 $x=90$

一变	三商 $x=90$
实	$(x+4800)x - 440100 = 0$
从方	$x+4800=4890$
从隅	1

得 2490，为同体实，实如法 157 而一，得 15 尺，不尽 135，与法求等，得 1，俱以 1 各约法与，只得此数，乃直命之，得 1 丈 5 尺 157 分寸之 135，为水退立深数也。

同体法	157 尺	
同体实	2490 尺	
水退立深		$2490 \div 157 = 15$ 尺 + $135/157$

【编者注：

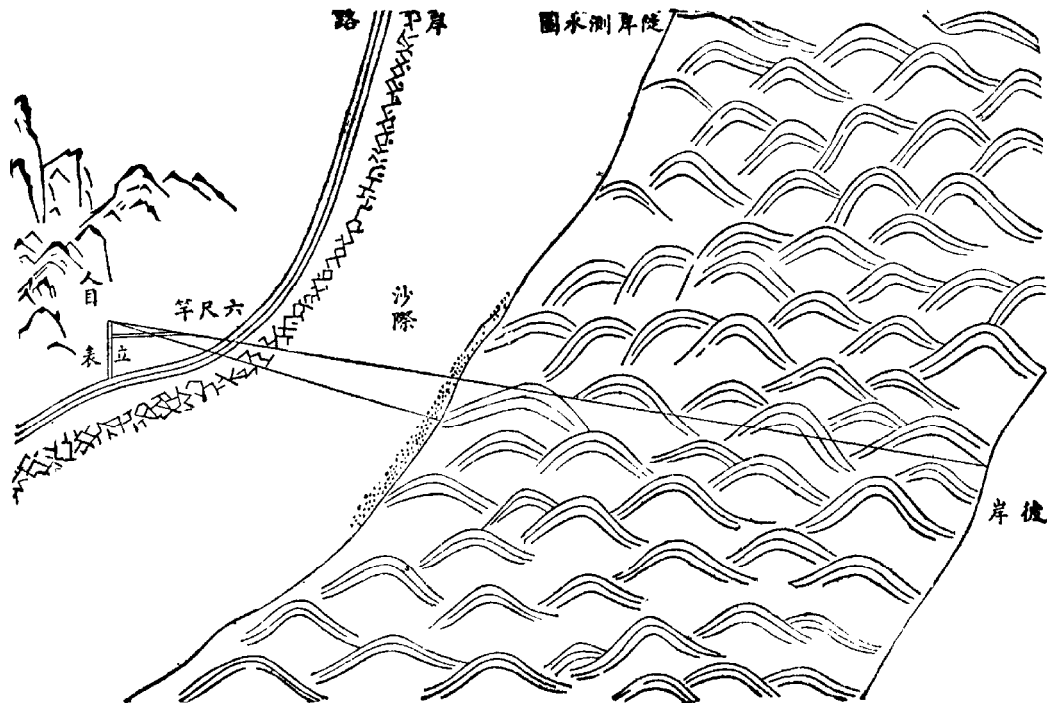
王守义《数书九章新释》在 270—280 页的修改和解答，都不正确。

秦九韶的原文准确无误。】

第 30 题：陟岸测水

问：行师遇水，须计箠缆，搭造浮桥。今垂绳量，陟岸，高三丈，人立其上，欲测水面之阔；以六尺竿为矩，平持，去目下五寸；今矩本抵颞，遥望水彼岸，与矩端参相合；又望水此岸沙际，入矩端三尺四寸；人目高五尺；其水面阔几何。

答曰：水阔二十三丈八尺。



术曰：以勾股，重差求之。

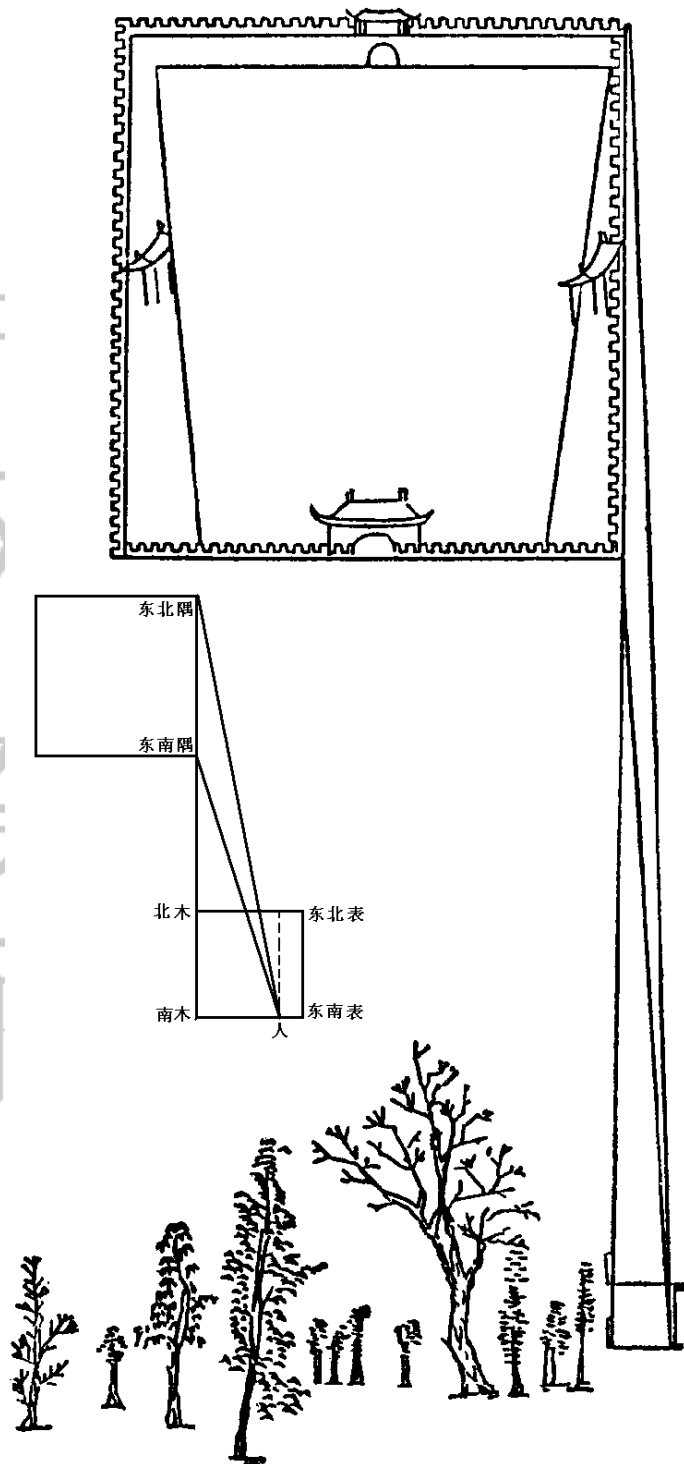
置矩去目下寸，为法；以人目高并岸高，乘入矩端为实；实如法而一，得水阔。

草曰：置矩本去目下 5 寸为法；以人目高 5 尺，并岸高 3 丈，得 3 丈 5 尺，通为寸，得 350 寸；乘沙际入矩端 34 寸，得 11900 寸，为实；实如法 5 寸而一，得 2380 寸，展为 23 丈 8 尺，为水阔，合问。

去目下	5 寸	为法
人目高	50 寸	
岸高	300 寸	
入矩端	34 寸	
实		$(50+300) \times 34 = 11900$ 寸
水阔		$11900 \div 5 = 2380$ 寸

第 31 题：表望方城

问：敌城不知广远；傍城南山原林间，望之，林际有木二株，南北相去一百六十步，遥与城东方面参相直；乃于二木之东，相对立两表，表间与木四方平；北木与东北表以绳维之，入目平；人自东南表，向西行一十步，望城东北隅，绳去东北表一十五步；又望城东南隅，绳去东北表四十八步强半步，里法三百六十步；欲知其方广，及城东南隅相去北木几何。



表望方城图

表望方城图

答曰：城方广，各一十二里二百二十步又三十一分步之二十；

城东南隅至北木，一里九十九步又三十一分步之一十一；

术曰：以勾股，重差求之。

置城东南隅景去表，减表间，余乘表间，为城东南隅去北木实；

以西行步减城东南隅景去表，余为法，实如法而一，得城东南隅去北木数；

以城东北隅景去表，减表间，余乘表间，为城东北隅去北木实；

以西行步减城东北隅景去表，余为法，实如法而一，又减城东南隅去北木数，得城广数；

草曰：以西行 10 步，减东南隅去表 48 步 7 分半，余 38 步 7 分半，为法；

以城东南隅景去表 48 步 7 分半，减表间 160 步，余 111 步 2 分半，乘表间 160 步，得 17800 步，为城东南隅去北木实；

以法 38 步 7 分半除之，得 459 步 31 分步之 11；以里法 360 约之，得 1 里 99 步 31 分步之 11，为城东南隅去北木数；

西行	10 步	
东南隅去表	48 步 7 分半	
法		$48.75 - 10 = 38.75$ 步
表间	160 步	
城东南隅去北木实		$(160 - 48.75) \times 160 = 17800$ 步
		$17800 \div 38.75 = 459 + 11/31$ 步
里法	360 步	
里数		$(459 + 11/31) \div 360 = 1$ 里 $99 + 11/31$ 步

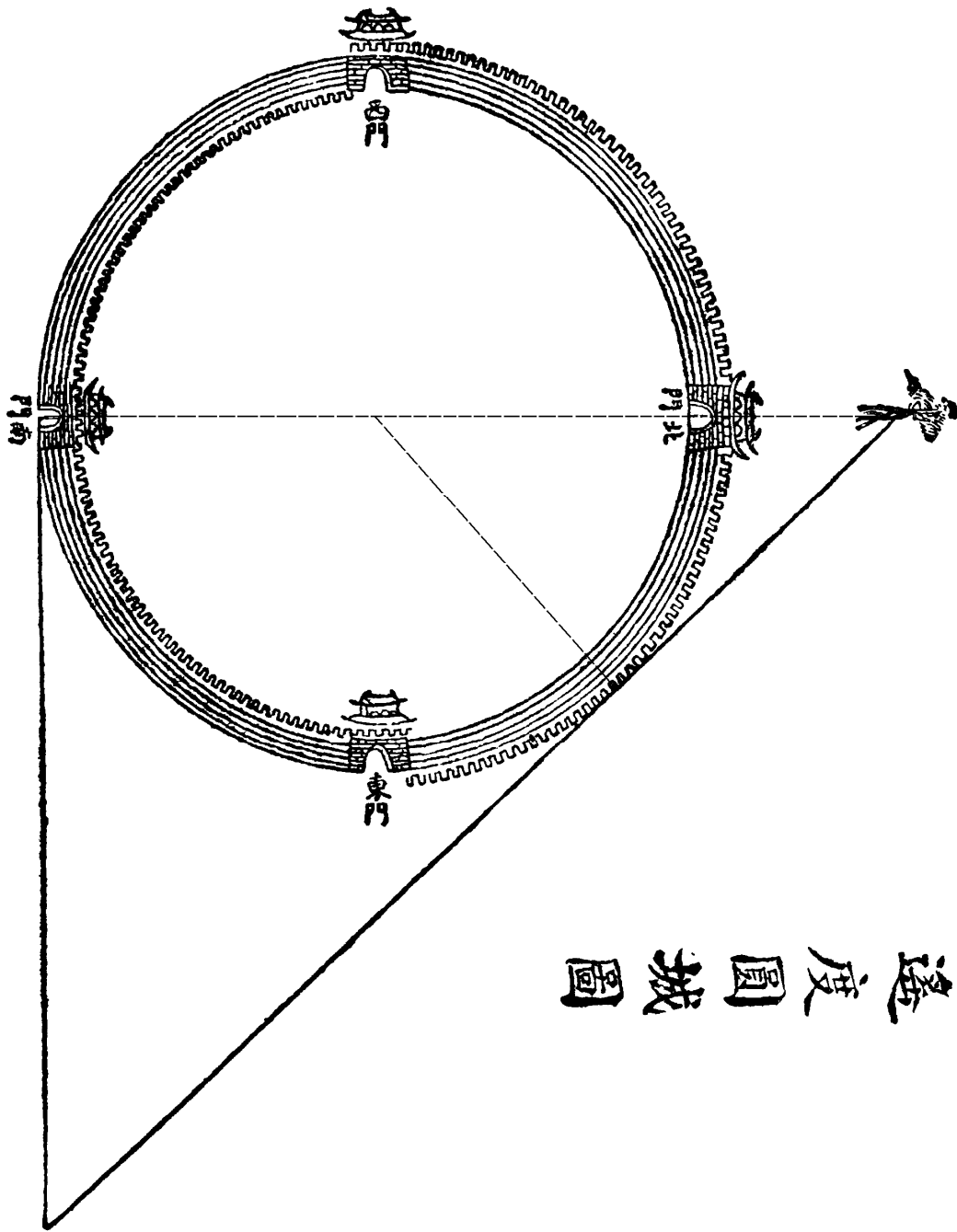
次置城东北隅景去表 15 步，减表间 160，余 145 步，乘表间 160，得 23200，为城东北隅去北木实；

以西行 10 步，减东北隅景去表 15 步，余 5 步为法，除之，得 4640 步；以里法 360 约之，为 12 里 320 步；以减城东南隅去北木数 1 里 99 步 31 分步之 11，余 11 里 220 步 31 分步之 20，为城方广里数及步数；合问。

西行	10 步	
东北隅去表	15 步	
法		$15 - 10 = 5$ 步
表间	160 步	
城东南隅去北木实		$(160 - 15) \times 160 = 23200$ 步
		$23200 \div 5 - (459 + 11/31) = 4180 + 20/31$ 步
里法	360 步	
里数		$(4180 + 20/31) \div 360 = 11$ 里 $+ 11/31$ 步

第 32 题：遥度圆城

问：有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木，出南门便折行九里，乃见木。欲知城周、径各几何？圆用古法。



答曰：径九里，周二十七里。

术曰：以勾股，夕桀求之。

一为从隅，五原北外里，为从七廉；置北里幂，八因，为从五廉；以北里幂为正率，以东行幂为负率，二率差，四因，乘北里，为益三廉；倍负率，乘五廉，为益上廉；以北里乘上廉为实；

开玲珑九乘方，得数，自乘，为径；

以三因径，得周。

草曰：以 1 为从隅，以 5 因北 3 里得 15 里，为从七廉；以北 3 里自乘得 9 里，为正率，以 8 因正率得 72，为从五廉；以东行 9 里自乘得 81，为负率；以正率 9 减负率，余 72 为负差；以 4 因之得 288，以乘北 3 里，得 864，系负差所乘者，为益三廉；倍负率 81 得 162，乘五廉 72 得 11664，为益上廉；以北 3 里乘上廉得 34992，为实。

从隅	1	
北	3 里	
从七廉		$5 \times 3 = 15$ 里
正率		$3^2 = 9$ 里
从五廉		$8 \times 9 = 72$ 里
负率		$9^2 = 81$ 里
负差		$81 - 9 = 72$ 里
益三廉		$4 \times 72 \times 3 = 864$ 里
益上廉		$2 \times 81 \times 72 = 11664$ 里
实		$3 \times 11664 = 34992$ 里

各置实廉隅，玲珑空耦位方廉，以约实，众法不可超进，乃于实上定商 3 里，其隅与商相生，得 3，为从下廉；

又与商相生，入从七廉，共得 24，为星廉；

又与商相生，得 72，为从六廉；

又与商相生，入五廉内，共得 288；

又与商相生，得 864，为从四廉；

又与商相生，得 2592，为正三廉；内消益三廉 864 讫，余 1728 为从三廉；

又与商相生，得 5184，为从二廉；

又与商相生得 15552 为正上廉；内消益上廉 11664 讫，余 3888，为从上廉；

又与商相生，得 11664 为从方。

乃命上商 3 里除实，适尽。

所得 3 里以自乘之，得 9 里，为城圆径之里数；

又以古法圆率 3 因之得 27，为城周。

【秦九韶算法解】

依题意得到方程： $x^{10} + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11664x^2 - 34992 = 0$

取试商 $x = 3$ 进行如下运算：

以 $\{a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} =$

$\{1, 0, 15, 0, 72, 0, -864, 0, -11664, 0, -34992\}$ 进行一变：

一变	首商 $x = 3$
实	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0)x + 72)x + 0) - 864) + 0) - 11664) + 0) - 34992 = 0$
方	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0)x + 72)x + 0) - 864) + 0) - 11664) + 0 = 11664$
上廉	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0)x + 72)x + 0) - 864) + 0) - 11664 = 3888$
二廉	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0)x + 72)x + 0) - 864) + 0 = 5184$
三廉	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0)x + 72)x + 0) - 864 = 1728$
四廉	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0)x + 72)x + 0 = 864$
五廉	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0)x + 72 = 288$
六廉	$(((((((((x + 0)x + 15)x + 0 = 72$

七廉	$(x+0)x+15=24$
下廉	$x+0=3$
隅	1

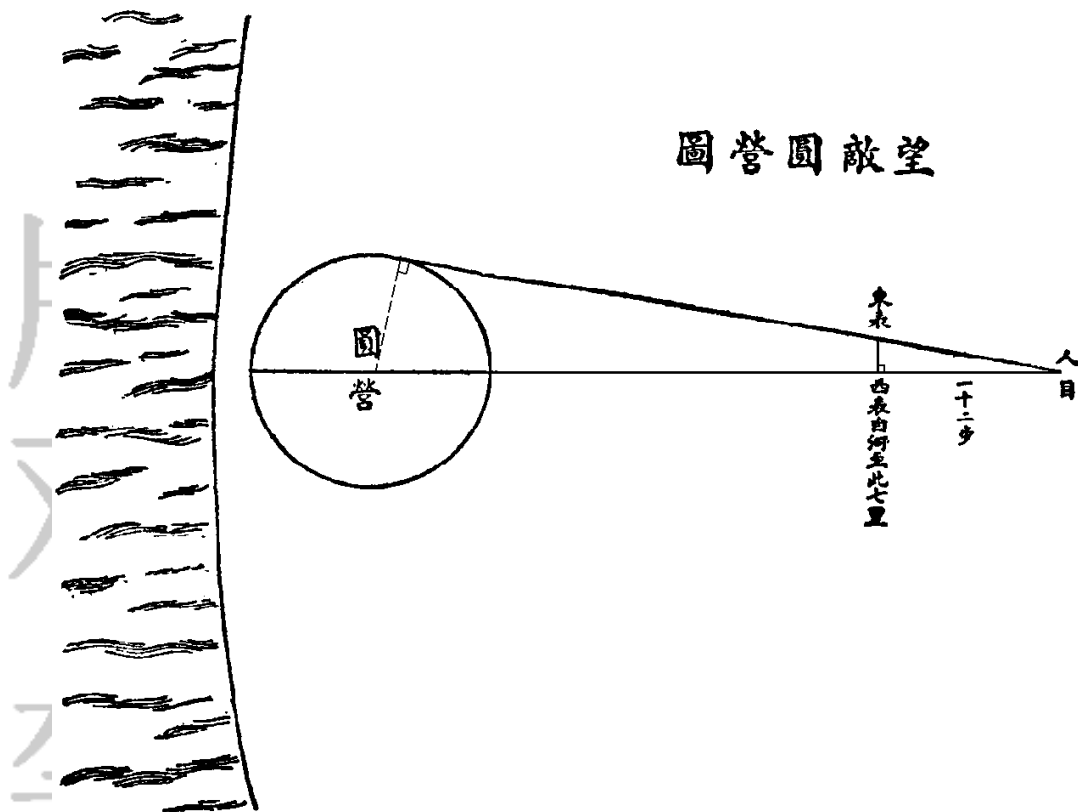
实为 0，一变结束。故 $x=3$ 为所求。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 33 题：望敌圆营

问：敌临河为圆营，不知大小。自河南岸至其地七里，于其地立两表，相去二步，其西表与敌营南北相直，人退西表一十二步，遥望东表，适与敌营圆边参合；圆法用约率，里法三百六十步；欲知其营周，及径，各几何。

答曰：营周，六里八十七步三万五千九百一十七分步之二千三百三十七；
径，一里百五十四步五千一百三十一分步之五千四。



术曰：以勾股，夕桀求之。

置表间，自乘，为勾幂；以退表自乘，为股幂；置里通步，并退表，为率，自之，乘勾幂，为泛实；以勾幂乘率，为泛从方，以四约股幂，为泛隅，三泛可约，约之，为定；开连技平方，得营径；以约率二十二乘，七除，为周。

草曰：置表间 2 步，自乘，得 4，为勾幂；以退表 12 步，自乘，得 144，为股幂；置 7 里，以里法 360 步通之，得 2520 步，并退表 12 步，得 2532 步，为率；自乘，得 6411024，乘勾幂 4，得 25644096，为泛实；

以勾幂 4，乘率 2532，得 10128，为泛从方；

置股幂 144，以 4 约之，得 36，为泛隅；

置三泛，求等，得 4，俱以约之，得 6411024，为定实，2532 为从方，9 为定隅；

表间	2 步	$2 \times 2 = 4$ ，勾幂
退表	12 步	$12 \times 12 = 144$ ，股幂
岸至其地	7 里	$7 \times 360 = 2520$ 步
率		$2520 + 12 = 2532$ 步
泛实		$2532 \times 2532 \times 4 = 25644096 = 4 \times 6411024$
泛从方		$4 \times 2532 = 10128 = 4 \times 2532$
泛隅		$144 \div 4 = 36 = 4 \times 9$

开连枝平方：乃以方隅进超二度，约商，置 700 步，以商生隅，得 6300，入方，得 8832，为从方；乃命上商除实，实余 228624，又以商生隅，入方，得 15132；诸法皆退，方一退，为 15132；隅再退，为 9；

乃于上商之次，续商，置 10 步，以续商生隅，入方，得 15222，乃命续商除实，实余 76404；又以续商生隅，入方，得 15312；诸法又退，方一退，为 15312，隅再退，为 9；

乃于续商之次，置商 4 步，以商生隅，入方，得 15348，乃命上商除实，实余 15012，又以商生隅，入方，得 15384；

一变	首商 $x=700$	二变	首商 $x=700$
实	$(9x+2532)x-6411024=-228624$	实	-228624
从方	$9x+2532=8832$	从方	$9x+8832=15132$
从隅	9	从隅	9

次位商 $x=10$

一变	次商 $x=10$	二变	次商 $x=10$
实	$(9x+15132)x-228624=-76404$	实	-76404
从方	$9x+15132=15222$	从方	$9x+15222=15312$
从隅	9	从隅	9

三位商 $x=4$

一变	三商 $x=4$	二变	三商 $x=4$
实	$(9x+15312)x-76404=-15012$	实	-15012
从方	$9x+15312=15348$	从方	$9x+15348=15384$
从隅	9	从隅	9

得商 714 步；实不尽 15012 步，不开；并方隅，共得 15393，为母；以实余 15012，为子；母子求等，得 3，俱以约之，得 714 步 5131 分步之 5004；以里法约之，得 1 里 354 步 5131 分步之 5004，为营径；

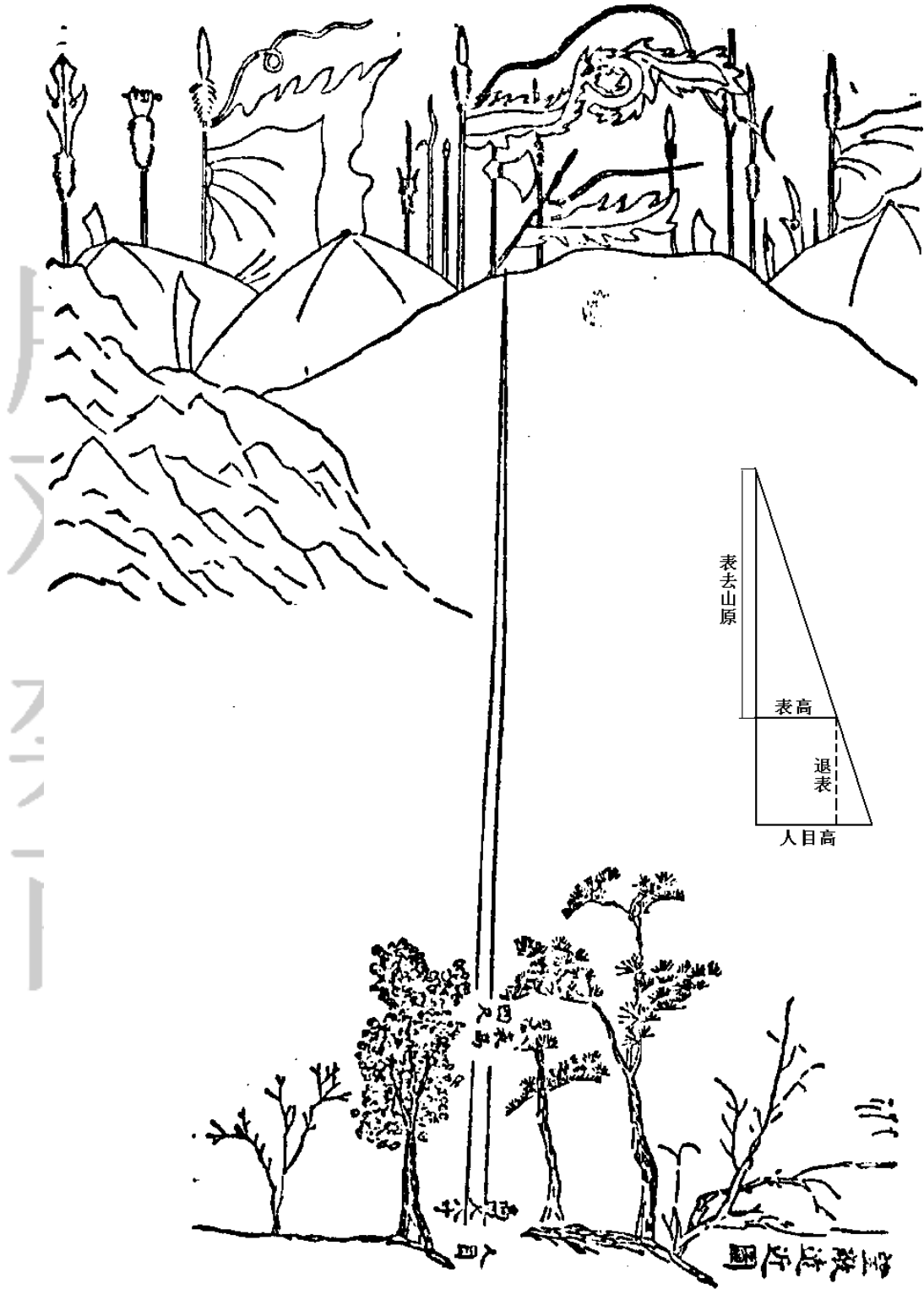
商		714 步 + 5004/5131
母		$9+15384=15393=3 \times 5131$
子		$15012=3 \times 5004$
求等	3	
里法	360 步	
营径		$714+5004/5131-360=1 \text{ 里} + 354 \text{ 步} + 5004/5131$

次以约率 22，乘营径步数，为实；以 7 除之，得 2247 步 35917 分步之 2337；以里法约之，得 6 里 87 步 35917 分步之 2337，为营周。

约率子	22	
约率母	7	
营径		714 步 + 5004/5131
营周步数		$22 \times (714+5004/5131) \div 7 = 2247 \text{ 步} + 2337/35917$
里法	360 步	
营周里数		$(2247+2337/35917) \div 360 = 6 \text{ 里} 87 \text{ 步} + 2337/35917$

第 34 题：望敌远近

问：敌军处北山下，原不知相去远近，乃于平地立一表，高四尺，人退表九百步[步法五尺]，遥望山原，适与表端参合，人目高四尺八。欲知敌军相去几何。



答曰：一十二里半。

术曰：以勾股求之，重差入之。

置人目高，以表高减之，余为法；置退表，乘表高为实，实如法而一。

草曰：置人目高 4 尺 8 寸，减表高 4 尺，余 8 寸为法；置退表 900 步，以步 50 寸通之，得 45000 寸，乘表高 40 寸，得 1800000 寸，为实，如法 8 寸而一，得 225000 寸，以步法 50 寸约之，得 4500 步，为相去步；以里法 360 步约之，得 12 里半，为敌去表所在。合问。

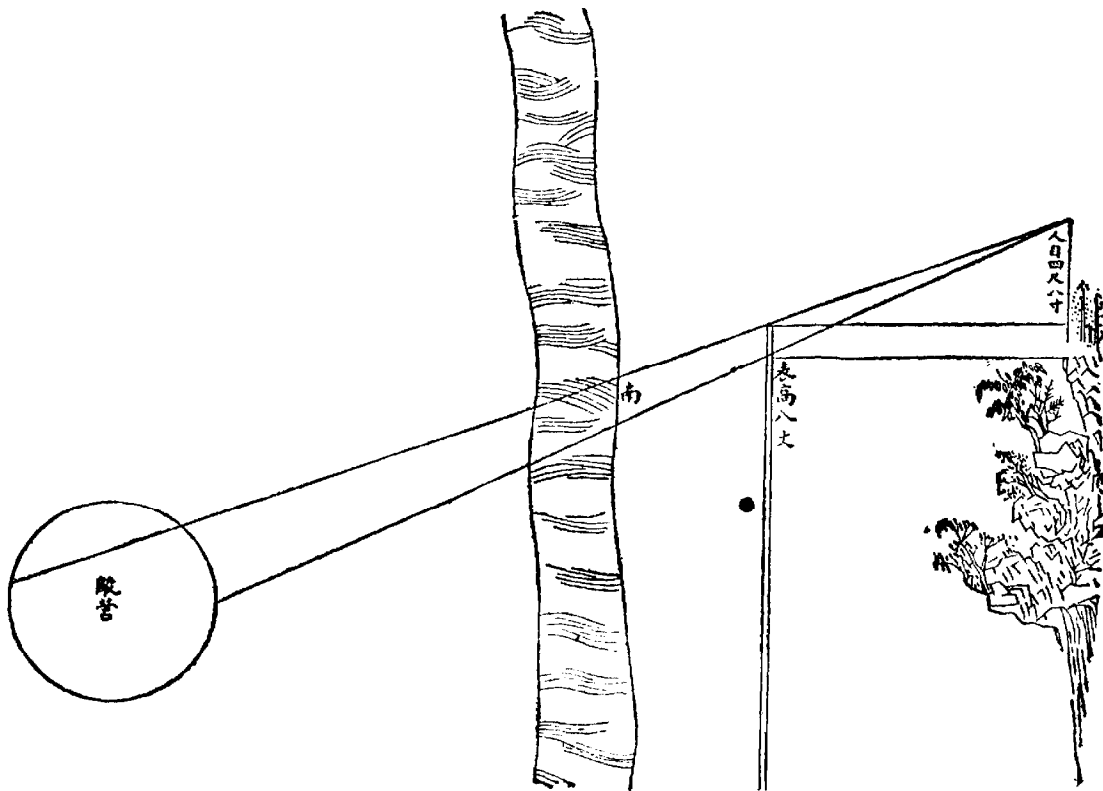
目高	48 寸
表高	40 寸
法	$48 - 40 = 8$ 寸
步法	50 寸
退表	$900 \times 50 = 45000$ 寸
实	$45000 \times 40 = 1800000$ 寸
相去步	$1800000 \div 8 \div 50 = 4500$ 步
里法	360 步
敌去表所在	$4500 \div 360 = 12.5$ 里

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

第 35 题：望知敌众

问：敌为圆营，在水北平沙，不知人数。谍称：彼营布卒，占地方八尺。我军在水南山原，于下立表，高八丈，与原山腰等平；自表端引绳虚量，平至人足三步；人立其处，望彼营北陵，与表端参合；又望营南陵，入表端八尺；人目高四尺八寸，以圆密率，入重差，求敌众合得几何。

圖 衆 敵 知 望



答曰：敌众三百八十五人。

术曰：以勾股乘之。

置表高并人目，乘人退表步，又乘入表，为实；以入表并人目高，乘人目为法，除之，得径；

以密周率乘径，得数为实；以密径率因人立，为法，约之，得外周人数，余收为一；

副置，加六，以乘副，得数为实，如一十二而一，余亦收为全。

草曰：[求营径] 置人立退表 3 步，以步法 5 尺展为 50 寸通之，得 150 寸；

置表高 8 丈，并人目高 4 尺 8 寸，得 848 寸；乘入表 8 尺，得 10176000 寸，为实；

以人目高 48 寸，并入表 80 寸；又以人目高 48 寸乘之，得 6144 寸，为法；

实如法而一，得径 1656 寸 2 分 5 厘；

		求和	求积
退表	150 寸		$150 \times 80 \times 848 = 10176000$ 寸
表高	800 寸	$800 + 48 = 848$	
入表	80 寸	$80 + 48 = 128$	
人目高	48 寸		$48 \times 128 = 6144$ 寸
营径			$10176000 \div 6144 = 1656.25$

【求外周人数，用密率】以密率周法 22，乘径 1656.25，得 36437.5 寸，为实；以密率径法 7，因谍称人立 8 尺，得 560 为法；以法 560 寸，约实 36437.5 寸，得 65 人，为外周人数；不尽 37.5 寸，弃之；

		求积
营径	1656.25 寸	$1656.25 \times 22 = 36437.5$
密率分子	22	
密率分母	7	
谍称人立	80 寸	$7 \times 80 = 560$
外周人数		$36437.5 \div 560 = 65.066964$

【求敌众人数，用密率】副置外周 65 人，加 6，得 71 人，乘副 65，得 4615，为实；以 12 为法，实如法而一，得 384 人，不尽 7，收为 1，得 385，为敌众人数。

		求和	求积	不尽
外周人数	65		$65 \times 71 = 4615$	
圆束差	6	$65 + 6 = 71$		
敌众人数			$4615 \div (2 \times 6) \approx 384.583333$	$7 > 6$ ，取 385

【编者注：在宋代，1 尺 \approx 30.72 厘米；1 步 = 5 尺 \approx 153.6 厘米 = 1.536 米；3 步 \approx 4.608 米；因此，我认为：“平至人足三十步”不现实，应该修改为“平至人足三步”。这样，可保证答案与秦九韶的相当，尽管秦九韶原文的计算有错误。

原文有错误。此据《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992。）修改。】

禁止制作为
商品销售！

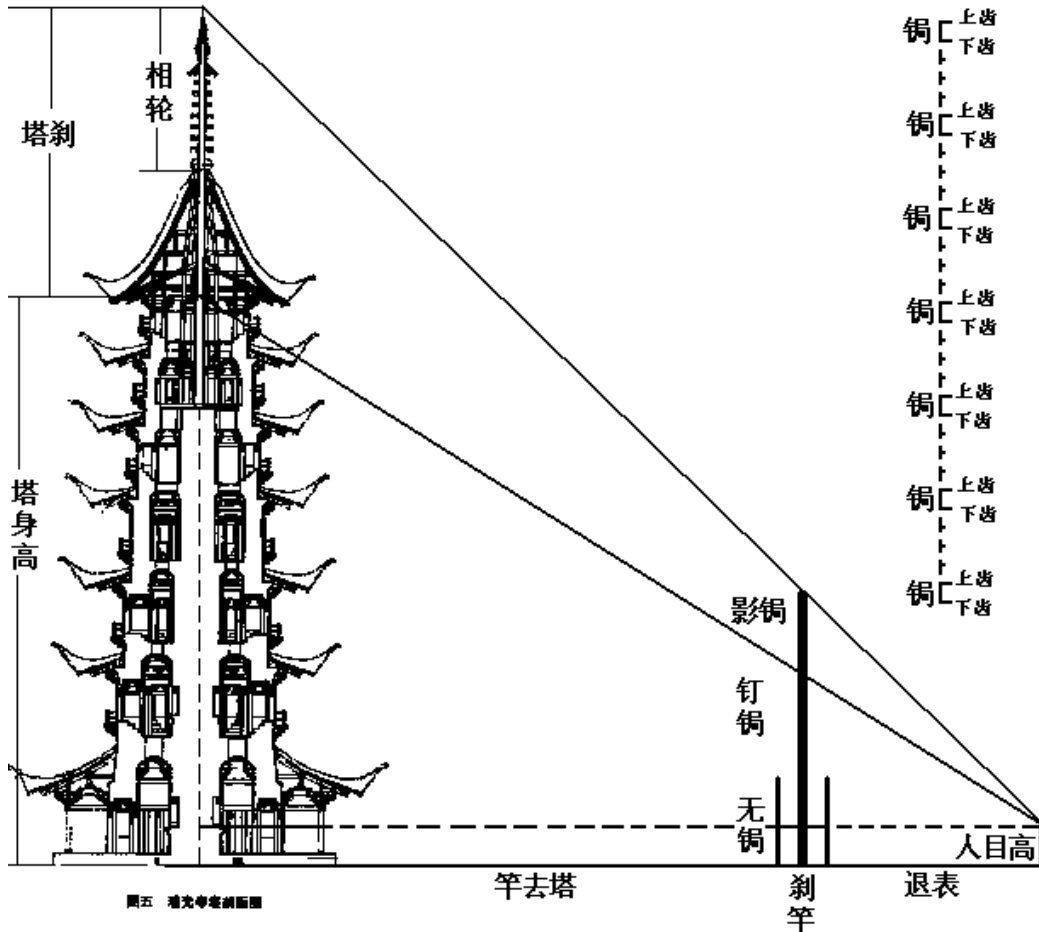
第 36 题：表望浮图

问：有浮图鼓侧，欲换塔心木，不知其高。去塔六丈，有刹竿，亦不知其高。

刹竿木，去地九尺二寸始钉铜，铜一十四枚，枚长五寸，邻铜下股相去二尺五寸；

就刹竿为表，人退刹竿三丈，遥望浮图尖端，适与刹竿端斜合；

又望塔刹（相轮之本），影入铜第七枚上股；人目去地四尺八寸，塔心木放三尺为楯卯剪截。欲求：塔身高，塔刹高，刹竿高，合用塔心木长，各几何。



图五 瑞光寺塔剖面图

【编者注：图片来自张步骞（qiān）：“苏州瑞光寺塔”一文中的“图五 瑞光寺塔剖面图”，见《文物》1965 年第 10 期第 60 页。此塔位于苏州城西南盘门内，今塔系北宋景德元年（1004 年）至天圣八年（1030 年）所重建。】

答曰：塔高一十一丈七尺；塔刹高四丈五尺；塔身高七丈二尺；刹竿高四丈二尺二寸；塔心木七丈五尺（内三尺为剪截，穿凿，楯卯）

术曰：以勾股求之，重差入之。

置铜数减一，余乘铜相去数，并一枚长数，加刹竿本，共为表竿高；以退表为法，以人目高减表竿高，余乘竿去塔，为实；实如法而一，得数，加表竿高，共为塔高；置相轮本入铜数，减一，余乘铜相去，为上；又人退竿，并竿去塔，乘上，为实，实如法而一，得相轮高；以减塔高，余为塔身高。以益楯卯尺数，为塔心木长。

草曰：置铜 14 枚，减 1，余 13，以乘铜相去 2 尺 5 寸得 325 寸，并最上铜一枚长 5 寸，得 330 寸；又加竿本 9 尺 2 寸，共得 422 尺，为表竿高；

上下铜间距离	铜长	铜数	竿钉铜部分长度	无铜长度
$25 - 5 = 20$	5	14	$(14 - 1) \times 20 + 5 \times 14 = 330$	92 寸

以人退表 3 丈，通为 300 寸，为法；次以人目高 4 尺 8 寸，减表竿高 422 寸，余 374 寸，以乘竿去塔 6 丈，得 224400 寸，为实；实如法 300 而一，得 748 寸，加表竿高 422 寸，得 1170 寸，以 10 约之，为 11 丈 7 尺，为塔高；

表竿高		$330+92=422$ 寸
退表	300 寸	为法
人目高	48 寸	
竿去塔	600 寸	
实		$(422-48)\times 600=224400$ 寸
塔高		$224400\div 300+422=1170$ 寸=11 丈 7 尺

置塔刹本入第 7 铜，减 1，余 6，以乘铜相去 2 尺 5 寸，得 150 寸，为上；又人退竿 3 丈，并竿去塔 6 丈，得 900 寸，以乘上 150 寸，得 135000 寸，为实；实如前法 300 寸而一，得 450 寸，约为 4 丈 5 尺，得塔刹高；

以塔刹高 4 丈 5 尺，减塔高 11 丈 7 尺，余 7 丈 2 尺，为塔身高；
益 3 尺，为剪裁楯卯；共得 7 丈 5 尺，为塔心木长，合前问。

上		$(7-1)\times 25=150$ 寸
实		$(300+600)\times 150=135000$ 寸
塔刹高		$135000\div 300=450$ 寸=4 丈 5 尺
塔身高		$1170-450=720$ 寸=7 丈 2 尺
剪裁楯卯	30 寸	
塔心木长		$720+30=750$ 寸=7 丈 5 尺

【编者注：本题原文有错误，此本《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李伊审校，安徽科学技术出版社，1992。）修改。】

禁止制作为
商品销售！

“测望第四”现代文翻译

第 28 题：测量山的高度和距离

问题：城池旁边有座名山，城池外的平地上有一株树木，高 2 丈 3 尺；把这株树木当作是前表，另外再立一后表，与树木高度相同，后表距离树木 164 步；先从前表后退 3 丈 9 寸，接着从后表后退 3 丈 7 尺 3 寸，两次都可以通过表的末端，斜望到山的顶峰。已知人的眼睛离开地面 5 尺，1 里等于 360 步，1 步等于 5 尺。请问：山高是多少，这株树木到山的中心距离是多少。

【编者注：原文数据错误，计算结果为：

山去木远	633450 寸	35.19167 里	19459.58 米	难以目测
山高	368950 寸	20.49722 里	11334.14 米	珠穆朗玛峰海拔 8848 米

宋代 1 尺 \approx 30.72 厘米，亦即：1 里 \approx 552.96 米；

这里的题目已经作了修改。】

【原文】望山高远

问名山去城不知高远，城外平地有木一株，高二丈三尺，假为前表，乃立后表，与木齐高，相去一百六十四步，先退前表三丈九寸，次退后表三丈一尺三寸，斜望山峰，各与其表之端参合。人目高五尺，里法三百六十步，步法五尺。欲知山高及远各几何。

第 29 题：在水边高台上测水

问题：城的楼台临水而立，高 3 丈；人立处为上址，城墙根为下址，二者水平距离为 2 尺；水中因护岸排沙而下桩，桩离下址 1 丈 2 尺，桩露出土外部分高 5 尺，桩顶端恰好与下址平齐；遇到涨水时，水恰好浸至下址处；如今，水已退去，人从楼上栏杆腰串间，申出一竿竹竿，透过竹竿另一顶端恰好可以斜望到水的边缘，此时得到竹竿的长度是 4 尺 1 寸 5 分；已知人目高 5 尺，人目距上址 2 尺 1 寸 5 分；请问：水退后的高度差，自楼台下址至水的边缘的长度，干涸的岸的斜长，各的多少。

【编者注：《数书九章新释》272 页的图 23 不正确。王守义的更正和答案均误。】

【原文】临台测水

问临水城台，立高三丈，其上架楼；其下址侧脚阔二尺；获下排沙下椿，去址一丈二尺，外椿露土高五尺，与下址平；遇水涨时，浸至址；今水退不知多少，人从楼上栏杆腰串间，虚驾一竿出外，斜望水际，得四尺一寸五分，乃与竿端参合；人目高五尺；欲知水退立深，涸岸斜长自台址至水际，各几何。

第 30 题：向岸上逐步移动，以测水面宽度

问题：军队行军遇到河流，需要计算竹篾缆绳，以搭造浮桥过河。现在，需要测量水面的宽度；拿着绑有重物的绳子，向岸上逐步移动，走到 3 丈高的位置，人站立，手平持 6 尺长的竹竿，竹竿一端抵着下巴，透过竹竿另一顶端恰好可以斜望河的对岸；接着又测望河在这边的岸，视线恰好经过距离竹竿另一顶端 3 尺 4 寸的位置；已知人目高 5 尺；请问：河的水面宽度的多少。

【编者注：陟（zhì），由低处向高处走，升，登高。

陟岸，表示逐步向岸上移动，以调整高度，使得“水彼岸与矩端参相合”。

故“陡岸测水”不合题意。应该是“陟岸测水”。《丛书集成初编：数书九章》与《数书九章新释》均误。《文渊阁四库全书·数学九章》正确。

颔（hàn，yí），下巴。】

【原文】陡岸测水

问行师遇水，须计篾缆，搭造浮桥。今垂绳量陟岸，高三丈，人立其上，欲测水面之阔；以六尺竿为矩，平持去目下五寸；今矩本抵颔，遥望水彼岸，与矩端参相合；又望水此岸沙

际，入矩端三尺四寸；人目高五尺；其水面阔几何。

第 31 题：立表观测方城

问题：敌方城池为正方形；我方在靠近城的南部山原的树林之间测望，树林边缘有乔木两株，一南一北，距离 160 步，恰好与敌城东边城墙成一条直线；现在它们的东面另外立两竿表，两竿表与两株乔木构成正方形；北边乔木与东北边的表之间紧系一绳子，与人目平齐；人从东南边的表向西方平移 10 步，测望城墙的东北角，视线恰好经过绳子离东北边的表 15 步的位置；又测望城墙的东南角，视线恰好经过绳子离东北边的表 48 步强半步的位置；已知 1 里为 360 步；请问：敌方城池的边长，城东南角到北边乔木的距离，各是多少。

【编者注：从草曰分析，应该是以北木为基础考虑各个计算问题，原文叙述不清楚，需修改。】

【原文】表望方城

问敌城不知广远；傍城南山原林间望之，林际有木二株，南北相去一百六十步，遥与城东方面参相直；乃于二木之东，相对立两表，表间与木四方平；人目以绳维之，人自东表后，向西行一十步，望城东北隅，入东前表一十五步，又望城东南隅，入东前表四十八步强半步，里法三百六十步。欲知其方广及相去几何？

第 32 题：观测圆城的周长和直径

问题：有座圆城，东西南北开有四个门；北门外 3 里有棵乔木，出南门便向东折行 9 里，即可见到这棵乔木。请问：圆城的周长，直径，各是多少。圆周率古法周 3 径 1。

【编者注：《数书九章新释》289—290 页的【新释】有误，可按照《秦九韶与数书九章》364—366 页，或者 345—349 页的方法修改。】

【原文】遥度圆城

问有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木，出南门便折行九里，乃见木。欲知城周、径各几何？圆用古法。

第 33 题：观测敌军圆营的周长和直径

问题：敌军临河设立圆营，不知圆营大小。自河南岸至某地的距离为 7 里，我方于此地立东西两表，表间距离 2 步，其中西表与敌营南北端点在一条直线上；人从西表后退 12 步，透过东表恰好可以斜望到敌营圆边的东边端点；圆周率用约率 $22/7$ ，1 里等于 360 步；请问：敌军圆营的周长，直径，各是多少。

【编者注：原文说“圆法用密率”，但是，草曰用的是 $22/7$ ，故应修改为“圆法用约率”。】

【原文】望敌圆营

问敌临河为圆营，不知大小。自河南岸至其地七里，于其地立两表，相去二步，其西表与敌营南北相直，人退西表一十二步，遥望东表，适与敌营圆边参合；圆法用密率，里法三百六十；欲知其营周及径各几何。

第 34 题：观测敌军距离

问题：敌军地处北山原下，距离不清楚。现在平地上立一表，高 4 尺，人退表九百步[步法五尺]，透过表的顶端恰好可以斜望到山原的顶峰；已知人目离开地面 4 尺 8。请问：敌军的距离是多少。

【原文】望敌远近

问敌军处北山下原，不知相去远近，乃于平地立一表，高四尺，人后退到离表 900 步的地方[1 步等于 5 尺]，遥望山原，适与表端参合，人目高四尺八。欲知敌军相去几何。

第 35 题：观测敌方人数

问题：敌军在河的北面的平沙岸上按圆营布阵，不知具体人数。侦察员报告：敌军布营时，每个士兵占地 8 尺。我军在河的南面山中，于山下立表，高 8 丈，与原山腰平齐；从表的顶端引出一条绳子，平行后退 3 步，为人站立处；瞄望敌军圆营的北端，与表的顶端成一

条直线；又瞄望敌军圆营的南端，与表的顶端下 8 尺处成一条直线；已知人目高 4 尺 8 寸，圆周率取密率，用重差计算。请问：敌军人数是多少。

【编者注：原文“平至人足三十步”不现实，我修改为“平至人足三步”。】

【原文】望知敌众

问敌为圆营，在水北平沙，不知人数。谍称彼营布卒，占地方八尺。我军在水南山原，于下立表，高八丈，与原山腰等平；自表端引绳，虚量平至人足三十步；人立其处，望彼营北陵，与表端参合；又望营南陵，入表端八尺；人目高四尺八寸，以圆密率，入重差，求敌众合得几何。

第 36 题：测量佛塔高度

问题：有座楼阁式佛塔出现倾斜，需要更换塔心木来矫正，却不知塔心木的高。

离开塔心 6 丈远的地方立有刹竿一柱，刹竿的高度不明。刹竿木上从离开地面 9 尺 2 寸的位置开始钉镬，有镬 14 枚，每枚镬长 5 寸，相邻两枚镬的下齿之间的距离为 2 尺 5 寸；就以刹竿为表，人后退到离刹竿 3 丈远的地方，透过刹竿顶端恰好可以斜望到佛塔的尖端；接着，又斜望佛塔刹的底部，视线恰好“穿过”刹竿上第七枚镬的上齿；

已知人目离开地 4 尺 8 寸，塔心木有 3 尺是放入楯卯里面的。

请问：佛塔全高，佛塔塔身高，佛塔相轮高，刹竿高，合用的塔心木总长，各是多少。

【编者注：镬（jū），镬子[cramp]，通常为铁制的，两端弯成鸠尾形用以将块状物(如石块或木块)固定在一起的器物。镬，又名马钉，相当于放大版的钉书针。

楯（shūn）栏杆的横木 [rail]；又如：楯柱(殿前栏槛柱子)；楯轩(指有栏杆的长廊或小室)；楯梯(古代攻城的长梯)；楯槛(栏杆和楹柱)；楯槛(楯栏。栏杆)；

榫（sūn）榫眼；榫头 [tenon]。竹、木、石制器物或构件上利用凹凸方式相接处凸出的部分。如：榫卯(榫头和卯眼)；框架结构两个或两个以上部分的接合处 [joint]；

欹（qī），本义：用箸夹取，引申为倾斜不正 [tilted]；欹斜（qīxié）[slope] 倾斜；歪斜；地势欹斜；

楼阁式佛塔的基本构造可分四部分，由下而上分别是：地宫、塔基、塔身和塔刹。

塔刹是全塔最重要的部分。塔刹中的相轮（套在刹杆上的圆盘），是五重塔屋根的金属部分的总称，是塔刹的主要部分；是佛的表相，象征佛，是佛教徒敬佛、礼佛的仰望标志。相轮的数目一般为奇数，最多为十三个相轮。从上到下依次是宝珠、龙车、水烟、九轮、受花（请花）、伏钵、露盘。贯通中间的棒叫做“擦”，也称为“刹管”。

刹竿：长竿之上以金铜造宝珠焰形，立之于寺前，以表寺宇所在之处。】

【原文】表望浮图

问有浮图欹侧，欲换塔心木，不知其高。去塔六丈有刹竿，亦不知其高。竿木去地九尺二寸始钉镬，镬一十四枚，枚长五寸，每镬下股相去二尺五寸；就竿为表，人退竿三丈，遥望浮图尖，适与竿端斜合；又望相轮之本，其景入镬第七枚上股，人目去地四尺八寸，心木放三尺为楯卯剪裁。欲求塔高轮高，合用塔心木长各几何。

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

赋役第五

37 服邑修赋，38 围田先计，39 筑梗均劳，40 宽减屯租，41 户田均宽，
42 均科绵税，43 户税移割，44 移运均劳，45 均定劝分

第 37 题：复邑修赋

问：有海圻县地，今有复涨，岁久，乡井再成，申请创邑，称：土排到六乡，以附郭为甲，最远为已，各有田九等，开具下项：

甲乡：共计田十四万一百九十三亩三角一十二步；

上等	上田	五千六百七十八亩一角四十八步	5678.45
	中田	四千八百九十二亩三十步	4892.125
	下田	六千六百二十一亩五十四步	6621.225
中等	上田	八千二百二十五亩二十四步	8225.1
	中田	一万三十五亩六步	10035.025
	下田	一万六千五百三十亩	16530
下等	上田	二万一千九十亩二十四步	21090.1
	中田	三万二千六十亩三步	32060.0125
	下田	三万五千六十一亩三角三步	35061.7625

乙乡：田共计八万四千一十亩二角二步；

上等	上田	六千七百八十九亩一角三十六步	6789.4
	中田	五千九百八十七亩二角	5987.5
	下田	八千一十亩三角三步	8010.7625
中等	上田	七千五百四十一亩	7541
	中田	九千一百二十一亩二角一十二步	9121.55
	下田	一万九千六十六亩六步	19066.025
下等	上田	一万八千三十七亩一角六步	18037.275
	中田	九千四百五十六亩三角五十九步	9456.995833
	下田	无	0

丙乡：田共计一十二万九百三十五亩五十八步五分；

上等	上田	四千八百六十八亩二角三步	4868.5125
	中田	五千九百七十九亩三角六步	5979.775
	下田	六千八百八十八亩二角六步	6888.525
中等	上田	七千九百八十四亩一角	7984.25
	中田	一万四千五十六亩一十二步	14056.05
	下田	二万三千三百三十三亩一十二步	23333.05
下等	上田	二万七千七百五十五亩一十六步五分	27755.06875
	中田	无	0
	下田	三万七十亩三步	30070.0125

丁乡：田共计八万九千六十六亩二步三分；

上等	上田	一万一千一百二亩一步	11102.0042
	中田	九千八百七十六亩一角	9876.25
	下田	八千七百六十五亩一角三十步	8765.375
中等	上田	七千五百三十九亩三十四步三分	7539.1429
	中田	无	0
	下田	一万二千九百八十七亩四十二步	12987.175
下等	上田	无	0
	中田	五千四百三十二亩一角六步	5432.275
	下田	三万三千三百六十三亩三角九步	33363.7875

戊乡：田共计二十万四千四百七十四亩一角二十四步四分；

上等	上田	二万四千六百三十二亩三十九步	24632.1625
	中田	一万三千五百二十一亩二十七步	13521.1125
	下田	九千九百八十八亩三角三步	9988.7625
中等	上田	八千八百七十七亩五十六步四分	8877.235
	中田	一万一千三百三十三亩三角	11333.75
	下田	二万七千六十七亩	27067
下等	上田	一万九千八百七十六亩三角六步	19876.775
	中田	七万九千一百三十五亩三角四十三步	79135.92917
	下田	一万四十一亩二角三十步	10041.625

己乡：田共计一十五万八千四百六十亩三角一十八步二分；

上等	上田	无	0
	中田	七千七百八十八亩三角五十一步	7788.9625
	下田	无	0
中等	上田	九千九百九十九亩二角三步	9999.5125
	中田	一万八百三十六亩五十六步	10836.23333
	下田	无	0
下等	上田	三万二千八十九亩一角四十五步六分	32089.44
	中田	四万三千六百七十八亩二角五十七步	43678.7375
	下田	五万四千六十七亩三角四十五步六分	54067.94

【编者注：左右列数值换算方法：在 54067.94 中，

$0.94 \times 240 = 225.6$ ， $225.6 - 3 \times 60 = 45.6$ ，

则 54067.94 即为 54067 亩 3 角 45 步 6 分；

面积单位：亩，角，步，分；1 亩 = 60 角 = 240 步，1 角 = 4 步；

重量、体积单位：石，斗，升，合，勺，抄，撮，圭；

长度单位：匹，丈，尺，寸，分，厘，毫，丝，忽；】

照得昨来本县原科：

苗米，一十万三千五百六十七石八斗四升四合三勺；

和买，一万三千四百九十八匹一丈七尺三寸七分六厘；

夏税，九千八百七十六匹三丈二尺六寸五分八厘。

其六乡田系三色，甲为上，乙、丙为次，丁、戊、己又为次。

先令官物为三差，使上比中，中比下，皆十分外差一；

次令各乡九等，皆于十分内差一抛科，用合租额；其乙乡田最肥，次丁，次甲，次丙，次己，次戊。

欲知各乡三色九等田每亩等则，及各乡共科数几何。

馆按：题内言田有三色，甲为上云云，又言乙乡田最肥云云，语若相左。盖前言三色者，六乡共科之等，后言田肥者，每亩所出之异也。若易田系三色，为科有三差，则语意明矣。

答曰：甲乡：

		苗米	和买	夏税
上等	上田	三斗二升三合二勺	一尺六寸九分	一尺二寸三分
	中田	二斗九升九勺	一尺五寸二分	一尺一寸一分
	下田	二斗五升八合六勺	一尺三寸五分	九寸九分
中等	上田	二斗二升六合二勺	一尺一寸八分	八寸六分
	中田	一斗九升三合九勺	一尺一分	七寸四分
	下田	一斗六升一合六勺	八寸四分	六寸二分
下等	上田	一斗二升九合三勺	六寸七分	四寸九分
	中田	九升六合九勺	五寸一分	三寸七分
	下田	六升四合六勺	三寸四分	二寸五分

乙乡：

		苗米	和买	夏税
上等	上田	三斗六升三合三勺	一尺八寸九分	一尺三寸九分
	中田	三斗二升六合九勺	一尺七寸	一尺二寸五分
	下田	二斗九升六勺	一尺五寸二分	一尺一寸一分
中等	上田	二斗五升四合三勺	一尺三寸三分	九寸七分
	中田	二斗一升八合	一尺一寸四分	八寸三分
	下田	一斗八升一合六勺	九寸五分	六寸九分
下等	上田	一斗四升五合三勺	七寸六分	五寸五分
	中田	一斗九合	五寸七分	四寸二分
	下田	七升二合七勺	三寸八分	二寸八分

丙乡：

		苗米	和买	夏税
上等	上田	三斗三合五勺	一尺五寸八分	一尺一寸六分
	中田	二斗七升三合一勺	一尺四寸二分	一尺四分
	下田	二斗四升二合八勺	一尺二寸七分	九寸三分
中等	上田	三斗一升二合四勺	一尺一寸一分	八寸一分
	中田	一斗八升二合一勺	九寸五分	六寸九分
	下田	一斗五升一合七勺	七寸九分	五寸八分
下等	上田	一斗二升一合四勺	六寸三分	四寸六分
	中田	九升一合	四寸七分	三寸五分
	下田	六升七勺	三寸二分	二寸三分

丁乡：

		苗米	和买	夏税
上等	上田	三斗四升三合二勺	一尺七寸九分	一尺三寸一分
	中田	三斗八合九勺	一尺六寸一分	一尺一寸八分
	下田	二斗七升四合六勺	一尺四寸三分	一尺五分
中等	上田	二斗四升二勺	一尺二寸五分	九寸二分
	中田	二斗五合九勺	一尺七分	七寸九分

	下田	一斗七升一合六勺	八寸九分	六寸五分
下等	上田	一斗三升七合三勺	七寸二分	五寸二分
	中田	一斗三合	五寸四分	三寸九分
	下田	六升八合六勺	三寸六分	二寸六分

戊乡：

		苗米	和买	夏税
上等	上田	一斗五升三合八勺	八寸	五寸九分
	中田	一斗三升八合四勺	七寸二分	五寸三分
	下田	一斗二升三合一勺	六寸四分	四寸七分
中等	上田	一斗七合七勺	五寸六分	四寸一分
	中田	九升二合三勺	四寸八分	三寸五分
	下田	七升六合九勺	四寸	二寸九分
下等	上田	六升一合五勺	三寸二分	二寸三分
	中田	四升六合一勺	二寸四分	一寸八分
	下田	三升八勺	一寸六分	一寸二分

己乡：

		苗米	和买	夏税
上等	上田	二斗八升二合二勺	一尺四寸七分	一尺八分
	中田	二斗五升三合九勺	一尺三寸二分	九寸七分
	下田	二斗二升五合七勺	一尺一寸八分	八寸六分
中等	上田	一斗九升七合五勺	一尺三分	七寸五分
	中田	一斗六升九合三勺	八寸八分	六寸五分
	下田	一斗四升一合一勺	七寸四分	五寸四分
下等	上田	一斗一升二合九勺	五寸九分	四寸三分
	中田	八升四合六勺	四寸四分	三寸二分
	下田	五升六合四勺	二寸九分	二寸二分

甲乡：

苗米	一万九千五百五十二石二斗四升八合三勺
和买	一万一百九十二丈二尺六寸五分六厘
夏税	七千四百五十七丈六尺八寸九分八厘

乙乡：

苗米	一万七千七百七十二石九斗五升三合
和买	九千二百六十五丈六尺九寸六分
夏税	六千七百七十九丈七尺一寸八分

丙乡：

苗米	一万七千七百七十二石九斗五升三合
和买	九千二百六十五丈六尺九寸六分
夏税	六千七百七十九丈七尺一寸八分

丁乡：

苗米	一万六千一百五十七石二斗三升
和买	八千四百二十三丈三尺六寸
夏税	六千一百六十三丈三尺八寸

戊乡：

苗米	一万六千一百五十七石二斗三升
和买	八千四百二十三丈三尺六寸
夏税	六千一百六十三丈三尺八寸

己乡：

苗米	一万六千一百五十七石二斗三升
和买	八千四百二十三丈三尺六寸
夏税	六千一百六十三丈三尺八寸

术曰：以衰分求之。

先列本县色位，自下锥行列之；又以乡数对列而乘之，副并为法，以除官物数，得一分之率；以率数乘未并者，各得诸乡之数；

次列各乡等位，自上等置十分，每以内分锥行，九折之，至九等止；

又各以亩步乘之，副并为乡法，以除诸各乡所得官物数，所得为一分之率，以乘未并者，各得每亩税色。

章曰：列本县色位三自，下色列十分，中十一分，上比中身外加一，上得 121，中得 110，下得 100，为上中下三率，列之右行；

乃列甲 1，对上率；乙、丙共 2，对中率；丁、戊、己共 3，对下率；列左行：

	左行	右行
上：甲	1	121=110(1+10%)
中：乙、丙	2	110=100(1+10%)
下：丁、戊、己	3	100

乃以左行列数，各相对乘右行率数；其上得 121，其中得 220，其下得 300，乃副置而并之，得 641 为法；

	左行	右行	左乘右
上：甲	1	121	121
中：乙、丙	2	110	220
下：丁、戊、己	3	100	300
			641

求苗米：置元科苗米 103567 石 8 斗 4 升 4 合 3 勺，为实，以法除之，得 161 石 5 斗 7 升 2 合 3 勺，为 1 分之率；以未并下率 100 乘之，得 16157 石 2 斗 3 升，为丁、戊、己三乡各科数；以于身下加 1 得 17772 石 9 斗 5 升 3 合，为乙、丙二乡各科数；又于身下加 1 得 19550 石 2 斗 4 升 8 合 3 勺，为甲合科数；

	苗米科数	
上：甲	19550 石 2 斗 4 升 8 合 3 勺	中×(1+10%)
中：乙、丙	17772 石 9 斗 5 升 3 合	下×(1+10%)
下：丁、戊、己	16157 石 2 斗 3 升	1 分率×100
1 分率	161 石 5 斗 7 升 2 合 3 勺	运算

求和买：亦用 641 为法，置元科和买 13498 匹 1 丈 7 尺 3 寸 7 分 6 厘，以匹法 4 丈通 13498 匹，得 13498×4=53992 丈，加内零 1 丈 7 尺 3 寸 7 分 6 厘，得 53993 丈 7 尺 3 寸 7 分 6 厘，为实，以法除之，得 84 丈 2 尺 3 寸 3 分 6 厘，为 1 分之率；亦以未并下率 100 乘之，得 8423 丈 3 尺 6 寸，为丁、戊、己三乡各科数；次于身下加 1 得 9265 丈 6 尺 9 寸 6 分，为乙、丙二乡各科数；又于身下加 1 得 10192 丈 2 尺 6 寸 5 分 6 厘，为甲乡合科数；

	和买科数	
上：甲	10192 丈 2 尺 6 寸 5 分 6 厘	中×(1+10%)

中：乙、丙	9265 丈 6 尺 9 寸 6 分	下×(1+10%)
下：丁、戊、己	8423 丈 3 尺 6 寸	1 分率×100
1 分率	84 丈 2 尺 3 寸 3 分 6 厘	运算

求夏税：亦置 641 为法，置元科夏税 9876 匹 3 丈 2 尺 6 寸 5 分 8 厘，以匹法 4 丈通 9876 匹，得 9876×4=39504 丈，加内零 3 丈 2 尺 6 寸 5 分 8 厘，得 39507 丈 2 尺 6 寸 5 分 8 厘为实，以法除之，得 61 丈 6 尺 3 寸 3 分 8 厘，为 1 分之率；亦以未并下率 100 乘之，得 6163 丈 3 尺 8 寸，为丁、戊、己三乡各科数；次于身下加 1 得 6779 丈 7 尺 1 寸 8 分，为乙、丙二乡各科数；又于身下加 1 得 7457 丈 6 尺 8 寸 9 分 8 厘，为甲乡科数；

	夏税科数	
上：甲	7457 丈 6 尺 8 寸 9 分 8 厘	中×(1+10%)
中：乙、丙	6779 丈 7 尺 1 寸 8 分	下×(1+10%)
下：丁、戊、己	6163 丈 3 尺 8 寸	1 分率×100
1 分率	61 丈 6 尺 3 寸 3 分 8 厘	运算

次列九等，上以十，次九、八、七、六、五、四、三、二，各对乘六乡九等田亩，其田亩下角步，以亩法除之，得分、厘、毫、丝、忽，于亩上对乘之，各得率。

馆按：题内云各乡 9 等皆于十分内差 1 则是通次 9 折也术内亦云列各乡等位自上等置十分每以内分推行 9 折之至 9 等止则其法当为通次 9 折益明矣乃草中则云上以十次 98765432 则是通次减 1 而非通次 9 折矣以此得答数既与题问未合而术与草亦不相应也。

甲乡田率：

	田亩数	倍率	田率	
上等	上	5678.45	10	56784 分 5 厘
	中	4892.125	9	44029 分 1 厘 2 毫 5 丝
	下	6621.225	8	52969 分 8 厘
中等	上	8225.1	7	57575 分 7 厘
	中	10035.025	6	60210 分 1 厘 5 毫
	下	16530	5	82650 分
下等	上	21090.1	4	84360 分 4 厘
	中	32060.0125	3	96180 分 3 毫 7 丝 5 忽
	下	35061.7625	2	70123 分 5 厘 2 毫 5 丝
和			604883.2375	

乙乡田率：

	田亩数	倍率	田率	
上等	上	6789.4	10	67894 分
	中	5987.5	9	53887 分 5 厘
	下	8010.7625	8	64086 分 1 厘
中等	上	7541	7	52787 分
	中	9121.55	6	54729 分 3 厘
	下	19066.025	5	95330 分 1 厘 2 毫 5 丝
下等	上	18037.275	4	72149 分 1 厘
	中	9456.995833	3	28370 分 9 厘 8 毫 7 丝
	下	0	2	无
和			489234.1125	

丙乡田率：

		田亩数	倍率	田率
上等	上	4868.5125	10	48685 分 1 厘 2 毫 5 丝
	中	5979.775	9	53817 分 9 厘 7 毫 5 丝
	下	6888.525	8	55108 分 2 厘
中等	上	7984.25	7	55889 分 7 厘 5 毫
	中	14056.05	6	84336 分 3 厘
	下	23333.05	5	116665 分 2 厘 5 毫
下等	上	27755.06875	4	111020 分 2 厘 7 毫 5 丝
	中	0	3	无
	下	30070.0125	2	60140 分 2 毫 5 丝
和			585662.9	

丁乡田率:

		田亩数	倍率	田率
上等	上	11102.0042	10	111020 分 4 毫 2 丝
	中	9876.25	9	88886 分 2 厘 5 毫
	下	8765.375	8	70123 分
中等	上	7539.1429	7	52774 分 3 忽
	中	0	6	无
	下	12987.175	5	64935 分 8 厘 7 毫 5 丝
下等	上	0	4	无
	中	5432.275	3	16296 分 8 厘 2 毫 5 丝
	下	33363.7875	2	66727 分 5 厘 7 毫 5 丝
和			470763.5673	

戊乡田率:

		田亩数	倍率	田率
上等	上	24632.1625	10	246321 分 6 厘 2 毫 5 丝
	中	13521.1125	9	121690 分 1 毫 2 丝 5 忽
	下	9988.7625	8	79910 分 1 厘
中等	上	8877.235	7	62140 分 6 厘 4 毫 5 丝
	中	11333.75	6	68002 分 5 厘
	下	27067	5	135335 分
下等	上	19876.775	4	79507 分 1 厘
	中	79135.92917	3	237407 分 7 厘 8 毫 7 丝 5 忽
	下	10041.625	2	20083 分 2 厘 5 毫
和			1050398.02	

己乡田率:

		田亩数	倍率	田率
上等	上	0	10	无
	中	7788.9625	9	70100 分 6 厘 6 毫 2 丝 5 忽
	下	0	8	无
中等	上	9999.5125	7	69996 分 5 厘 8 毫 7 丝 5 忽
	中	10836.23333	6	65017 分 4 厘
	下	0	5	无

下等	上	32089.44	4	128357分7厘6毫
	中	43678.7375	3	131036分2厘1毫2丝5忽
	下	54067.94	2	108135分8厘8毫
和				572644.5025

并六乡之九率，为六乡之法：

	乡法
甲	604883.2375
乙	489234.1125
丙	585662.9
丁	470763.5673
戊	1050398.02
己	572644.5025

以六乡法，各除诸乡官物，得1分之率[米至圭，帛至忽，止。半已上，收；已下，弃]。

甲乡：

	官物	1分之率
苗米	19550石2斗4升8合3勺	3升2合3勺2抄1撮
和买	10192丈2尺6寸5分6厘	1寸6分8厘5毫4忽
夏税	7457丈6尺8寸9分8厘	1寸2分3厘2毫8丝

乙乡：

	官物	1分之率
苗米	17772石9斗5升3合	3升6合3勺2抄8撮
和买	9265丈6尺9寸6分	1寸8分9厘3毫9丝2忽
夏税	6779丈7尺1寸8分	1寸3分8厘5毫8丝

丙乡：

	官物	1分之率
苗米	17772石9斗5升3合	3升3勺4抄8撮
和买	9265丈6尺9寸6分	1寸5分8厘2毫1丝
夏税	6779丈7尺1寸8分	1寸1分5厘7毫5丝

丁乡：

	官物	1分之率
苗米	16157石2斗3升	3升4合3勺2抄1撮4圭
和买	8423丈3尺6寸	1寸7分8厘9毫3丝
夏税	6163丈3尺8寸	1寸3分9毫2丝3忽

戊乡：

	官物	1分之率
苗米	16157石2斗3升	1升5合3勺8抄2撮
和买	8423丈3尺6寸	8分1毫9丝2忽
夏税	6163丈3尺8寸	5分8厘6毫7丝7忽

己乡：

	官物	1分之率
苗米	16157石2斗3升	2升8合2勺1抄5撮1圭
和买	8423丈3尺6寸	1寸4分7厘9丝6忽
夏税	6163丈3尺8寸	1寸7厘6毫3丝

各用乡锥行数九、八、七、六、五、四、三、二、一，各乘1分之率，为各乡每亩等则泛数；或自上等上田之则，以1分之率累减之，亦得：

【编者注：请按照下面单位格式读取表格数据：

苗米单位：0.斗升合勺抄撮圭；

和买、夏税单位：0.尺寸分厘毫丝忽；】

甲	乙	丙	丁	戊	己	
0.0323207	0.0363281	0.0303467	0.0343213	0.0153820	0.0282151	苗米率
0.0168500	0.0189392	0.0158209	0.0178930	0.0080192	0.0147096	和买率
0.0123291	0.0138578	0.0115761	0.0130923	0.0058677	0.0107630	夏税率
倍率 10						
0.3232070	0.3632811	0.3034673	0.3432133	0.1538201	0.2821511	苗米
0.1684997	0.1893919	0.1582087	0.1789297	0.0801921	0.1470958	和买
0.1232914	0.1385782	0.1157614	0.1309230	0.0586766	0.1076301	夏税
倍率 9						
0.2908863	0.3269530	0.2731206	0.3088919	0.1384381	0.2539360	苗米
0.1516497	0.1704527	0.1423878	0.1610368	0.0721729	0.1323862	和买
0.1109623	0.1247204	0.1041853	0.1178307	0.0528090	0.0968671	夏税
倍率 8						
0.2585656	0.2906249	0.2427738	0.2745706	0.1230561	0.2257209	苗米
0.1347998	0.1515135	0.1265670	0.1431438	0.0641537	0.1176766	和买
0.0986331	0.1108626	0.0926092	0.1047384	0.0469413	0.0861041	夏税
倍率 7						
0.2262449	0.2542968	0.2124271	0.2402493	0.1076741	0.1975058	苗米
0.1179498	0.1325743	0.1107461	0.1252508	0.0561345	0.1029671	和买
0.0863040	0.0970047	0.0810330	0.0916461	0.0410736	0.0753411	夏税
倍率 6						
0.1939242	0.2179687	0.1820804	0.2059280	0.0922920	0.1692907	苗米
0.1010998	0.1136351	0.0949252	0.1073578	0.0481152	0.0882575	和买
0.0739748	0.0831469	0.0694569	0.0785538	0.0352060	0.0645781	夏税
倍率 5						
0.1616035	0.1816406	0.1517336	0.1716066	0.0769100	0.1410756	苗米
0.0842499	0.0946959	0.0791043	0.0894649	0.0400960	0.0735479	和买
0.0616457	0.0692891	0.0578807	0.0654615	0.0293383	0.0538151	夏税
倍率 4						
0.1292828	0.1453125	0.1213869	0.1372853	0.0615280	0.1128605	苗米
0.0673999	0.0757567	0.0632835	0.0715719	0.0320768	0.0588383	和买
0.0493166	0.0554313	0.0463046	0.0523692	0.0234706	0.0430521	夏税
倍率 3						
0.0969621	0.1089843	0.0910402	0.1029640	0.0461460	0.0846453	苗米
0.0505499	0.0568176	0.0474626	0.0536789	0.0240576	0.0441287	和买
0.0369874	0.0415735	0.0347284	0.0392769	0.0176030	0.0322890	夏税
倍率 2						
0.0646414	0.0726562	0.0606935	0.0686427	0.0307640	0.0564302	苗米

0.0336999	0.0378784	0.0316417	0.0357859	0.0160384	0.0294192	和买
0.0246583	0.0277156	0.0231523	0.0261846	0.0117353	0.0215260	夏税

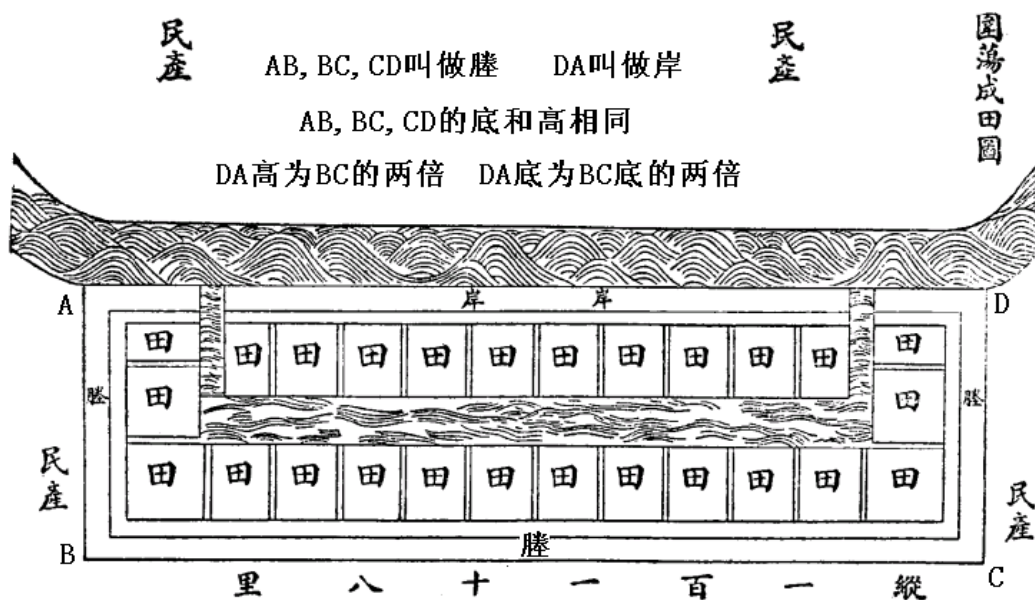
已上田则苗至勺，绢至分，收归为等则定数，答在前。

馆按：右各条下有不合之数者，皆在寄零尾数，至答数收之，勺及分以下俱不用，故数无不合也。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 38 题：围田先计

问：有草荡一所，广三里，纵一百一十八里；夏日水深二尺五寸，与溪面等平，溪阔一十三丈，流长一百三十五里，入湖。冬日水深一尺，欲趁此时围裹成田，于荡中顺纵开大港一条，磬折通溪；顺广开小港二十四条，其深同；其小港阔，比大港六分之一，大港深，比大港面三分之一，大小港底各不及面一尺，取土为塍，高一丈，上广六尺，下广一丈二尺；荡纵当溪，其岸高广倍其塍数，上下流各立斗门一所，须令田内止容水八寸，遏余水复溪，入湖。里法三百六十步，步法五尺；欲知田积，塍土积，大、小港底面，深，阔，冬夏积水，田港容水，过水，溪面泛高几何。



馆按：题意掘土为港，即以其土四边为塍，当溪者，高阔倍之，余三边，等语皆未详。

答曰：田积：一千八百八十四顷八十三亩九十六步；

塍土积：九百六十五亿五千二百万立方寸；

大港：面阔：三丈五尺四寸，底阔：三丈四尺四寸，深：一丈一尺八寸；

小港：面阔：六尺三寸，六分之二，底阔：五尺三寸，六分之二，深：一丈一尺八寸；

夏积水：二万八千六百七十四亿立方寸；

冬积水：一万一千四百六十九亿六千万立方寸；

田容水：九千一百一十三亿四千七百二十万立方寸；

港容水：九百六十五亿五千二百万立方寸，港上者在田内；

遏出水：一万八千五百九十五亿八十万立方寸；

溪面泛高：一尺三寸八千七百七十五分寸之七百九；

术曰：以商功求之。

步法、里法，皆先化寸，各通广、纵为率；

二率相并为率和；二率相乘为寄；其岸高广倍其塍数，故三因纵率于上；

倍率和，加上，为段，并塍二广，乘半塍高，又乘段，为土积，亦为港容求；

以阔母乘土积，为实；以阔子乘小港数，又乘广率，为泛；阔母乘纵率，并泛，为隅；

大、小港底不及面一尺，半不及为五寸；

以半不及乘之，为益方；又置隅，以深母乘之，深子除之，为隅；

开平方，所得至寸收之，为大小港等深；以深母因等深，又以深子除之，为大港面；

内减半不及数，余以阔子乘之，阔母除之，又加半不及数，为小港面；

二面各减不及，为底，倍率和，加纵，以膝下广乘之，为址（zhǐ，地基基部）；

置小港数，乘广率，以阔子乘之，阔母除之，并纵率，复以大港面乘之，为港平；

以港平并址，减寄，余为田积；以址减寄，余乘容水，为田容水；

以夏、冬水深乘寄，得夏、冬积水；以田容水并港容水，减夏积水，余为遏出水；

以八节乘之，为实；以溪阔乘流长，又乘岁日，为法；除之，得溪面泛高；

草曰：先通步法为 50 寸，通 360 步，得 18000 寸，为里法；

以里法通荡广 3 里得 54000，为广率；又通荡纵 118 里，得 2124000，为纵率；

以纵率并广率，得 2178000，为率和；以纵率乘广率，得 114696000000，为寄；

3 因纵率 2124000，得 6372000，于上，倍率和 2178000，得 4356000，加上得 10728000，

为段；

次以膝上广 6 尺，并下广 1 丈 2 尺，得 18 尺，乘半膝高 50 寸，得 9000 寸；

又乘段 10728000，得 96552000000，为土积，亦为港容水；

步法	50 寸
里法	18000 寸
广率	$3 \times 18000 = 54000$ 寸
纵率	$118 \times 18000 = 2124000$ 寸
率和	$54000 + 2124000 = 2178000$ 寸
寄	$54000 \times 2124000 = 114696000000$ 寸
上	$3 \times 2124000 = 6372000$ 寸
段	$2 \times 2178000 + 6372000 = 2 \times 54000 + 5 \times 2124000 = 10728000$ 寸
膝上广	60 寸
膝下广	120 寸
膝高	100 寸
	$(60 + 120) \times 100 \div 2 = 9000$ 寸
土积 = 港容水	$9000 \times 10728000 = 96552000000$ 立方寸

以小港阔母 6 因土积，得 579312000000，为实；

以小港阔子 1 乘小港 24 条，又乘广率 54000，得 1296000；又以小港阔母 6，因纵率 2124000，得 12744000，并之，得 14040000，为泛；

大、小港底不及面 1 尺，半不及为 5 寸，以 5 乘泛，得 70200000，为益方；

又置泛 14040000，以大港深母 3 乘之，得 42120000，以大港深子 1 除之，仍为 42120000，

为隅；

今隅、方、实可约，求等，得 1080000，俱以约之，实得 536400，益方得 65，隅得 39；

土积	96552000000 寸
实	$6 \times 96552000000 = 579312000000$
泛	$24 \times 54000 + 6 \times 2124000 = 14040000$
益方	$5 \times 14040000 = 70200000$
隅	$3 \times 14040000 = 42120000$
总等	$(42120000, 70200000, 579312000000) = 1080000$
约之	(隅, 方, 实) = (39, 65, 536400)

开平方：

一变	首商 $x = 100$	二变	首商 $x = 100$
实	$(39x - 65)x - 536400 = -152900$	实	-152900

益方	$39x - 65 = 3835$	益方	$39x + 3835 = 7735$
从隅	39	从隅	1

次位商 $x = 10$

一变	次商 $x = 10$	二变	次商 $x = 10$
实	$(39x + 7735)x - 152900 = -71650$	实	-71650
益方	$39x + 7735 = 8125$	益方	$39x + 8125 = 8515$
从隅	39	从隅	1

三位商 $x = 8$

一变	三商 $x = 8$	二变	三商 $x = 8$
实	$(39x + 8515)x - 71650 = -1034$	实	-1034
益方	$39x + 8515 = 8827$	益方	$39x + 8827 = 9139$
从隅	39	从隅	1

得 118 寸 (118.11308690696)，不尽 1034，弃之，乃得 118 寸，为大、小港等深；次以大港深母 3，因等深 118 寸，得 354 寸，展为 3 丈 5 尺 4 寸，为大港面阔；内减半不及 5 寸，余 3 丈 4 尺 9 寸，以小港阔子 1 乘之，小港阔母 6 除之，得 5 尺 8 寸 6 分寸之 1；又加半不及 5 寸，得 6 尺 3 寸 6 分寸之 1；为小港面；以大、小港底不及面 1 尺，各减大、小港面，得 3 丈 4 尺 4 寸，为大港底；得 5 尺 3 寸 6 分寸之 1，为小港底；

次倍率和 2178000，得 4356000；并纵 2124000，得 6480000，以滕下广 1 丈 2 尺乘之，得 777600000，为址 (zhǐ，地基基部)；

次以小港数 24，乘广率 54000，得 1296000，以小港阔子 1 乘之，以小港阔母 6 除之，得 216000，并纵 2124000，得 2340000；以大港面 3 丈 5 尺 4 寸乘之，得 828360000，为港平；

以并址 777600000，得 1605960000，减寄 114696000000，余 113090040000，为田积寸；以步法 50 寸自乘，得 2500，除积寸，得 45236016 步，为田积步；以亩法 240 步约之，得 1884 顷 83 亩，不尽 96 步，为田积；

大、小港等深	118 寸
底不及面	10 寸
大港面	$3 \times 118 = 354$ 寸
大港底	$354 - 10 = 344$ 寸
小港面	$(354 - 5) \div 6 + 5 = 63 + 1/6$ 寸
小港底	$63 + 1/6 - 10 = 53 + 1/6$ 寸
广率	54000 寸
纵率	2124000 寸
率和	$54000 + 2124000 = 2178000$ 寸
寄	$54000 \times 2124000 = 114696000000$ 寸
址(地基基部)	$(2 \times 2178000 + 2124000) \times 120$ $= 6480000 \times 120 = 777600000$ 寸
港平	$(24 \times 54000 \div 6 + 2124000) \times 354$ $= 2340000 \times 354 = 828360000$ 寸
田积	$114696000000 - (828360000 + 777600000)$ $= 113090040000$ 寸

以址 777600000，减寄 114696000000，余 113018400000，乘令容水 8 寸，得 911347200000，

为田容水；

次以夏水深 2 尺 5 寸，乘寄 11469600000，得 286740000000 寸，为夏积水；

次以冬水深 1 尺，乘寄，得 11469600000 寸，为冬积水；

乃以田容水 91134720000，并港容水 9655200000，得 100789920000，减夏积水 286740000000 寸，余 185950080000，为遏出水；

当以 8 节乘之，岁日 360 除之，为实；今从省：

先以 8 节约岁日 360，得 45 为除率；

次以里法 18000 寸，通流长 135 里，得 2430000；又乘溪阔 13 丈，得 3159000000，以乘除率 45，得 142155000000，为法，除遏出水 185950080000，得 1 尺 3 寸，为溪面泛高，不尽 11485800000，与法 142155000000 求等，得 16200000，俱以约之，为 8775 分寸之 709，为溪面泛高寸下分母之数。合问。

址	777600000 寸
寄	11469600000 寸
令容水	8 寸
田容水	$(11469600000 - 777600000) \times 8$ $= 91134720000$ 立方寸
夏积水	$25 \times 11469600000 = 286740000000$ 立方寸
冬积水	$10 \times 11469600000 = 114696000000$ 立方寸
港容水	9655200000 立方寸
遏出水	$286740000000 - (91134720000 + 96552000000)$ $= 185950080000$ 立方寸
除率	$360 \div 8 = 45$
法	$18000 \times 135 \times 1300 \times 45 = 142155000000$ 平方寸
溪面泛高	$185950080000 \div 142155000000 = 13.080797720$ 寸
不尽	$(11485800000, 142155000000) = 16200000 (709, 8775)$

【编者注：《文渊阁四库全书·子部·天文算法类·数学九章》

馆按：题言大港深比大港面 3 分之 1，答数中大港面 6 丈 1 尺 7 寸，深 6 尺 8 寸，是 9 分之 1，不足，而非 3 分之 1 矣。此数与题不合，以下俱误。

馆按：草中自求大小港阔深以后，既与题问不合，且法多疎漏。今以立天元一术推明求大小港阔深之法于后，至田积，水积等不过幂积，体积相较，初无深义，可无论也。

法：立天元一 x 为 1 分，6 因之，得 $6x$ ，为大港阔；减 10 寸，得 $6x - 10$ 寸，为大港底阔，并之，得 $12x - 10$ 寸；

以半深一元 x 乘之，得 $12x^2 - 10x$ ；以纵率 2124000 因之，得 $25488000x^2 - 21240000x$ ；

又以天元一 x 为小港阔，减 10 寸，得 $x - 10$ ，为小港底阔，并之，得 $2x - 10$ 寸；

以半深一元 x 因之，得 $2x^2 - 10x$ ，以 24 倍广率 54000 因之，得 $2592000x^2 - 12960000x$ ，并二数，得 $28080000x^2 - 34200000x$ 【编者注：错误，应该是 $28080000x^2 - 15084000x$ 】，与土滕共积等；

而边各以 10000 除之，得 $2808x^2 - 3420x$ ，与 9655200 寸等；三数又求等，得 36，遍约之，得 $78x^2 - 95x$ ，与 268200 寸等；

乃以寸数为实，以元数为纵，以方数为隅，开带纵平方，得方边为一分数 5 尺 9.2505329 寸，即小港阔；减 1 尺，得 4 尺 9.2505329 寸，为小港底阔；

6 因一分数，得 3 丈 5 尺 5.5301973 寸，为大港阔；减 1 尺得 3 丈 4 尺 5.5301973 寸，

为大港底阔；2 因一分数，得 1 丈 1 尺 8.5010658 寸，为同深；

以此转求共港容水数，乃与共土塍原积数相合。

馆本无术。现取《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992。）修改结果。王守义在 258 页注释：

【注 1】原答港深六尺八寸，与原设“大港深，比大港面三分之一”不符。

【注 2】沈钦裴氏曾对本问作出详尽的校正，惟术数均与此稍有差异。

【注 3】关于溪面泛高，秦氏似乎是假定在每岁八节中，平均每节可满荡一次，而遏出水，则是按全年各日平均复溪入湖的；这样的假定，显然是根据经验和想像而给出的；但泛高（平均泛高）应与湖水表面积的大小，有着密切的关系，那样的计算，是很复杂的，所以本问的溪面泛高，是一个仅供参考的近似值。】

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 39 题：筑埂均功

问：四县共兴筑圩埂，长三十六里半。甲县出二千七百八十人；乙县出一千九百九十人；丙县出一千六百三十人；丁县出一千三百二十人；其甲县先差到一千五百四十四夫；丙县先差到九百六十五夫。欲知：甲县，丙县，各合先赋役之埂长几何[里法三百六十步]。

答曰：甲先到人，筑二千六百二十八步[计七里一百八步]；

丙先到人，筑一千六百四十二步半[计四里二百二步半]；

术曰：以商功求之。

置里，通步作尺，为积率；并诸县人数，为均法。法与率，可约者约之。以科率各乘先到人，为实，皆法而一，各得先筑里步，为先赋埂长。续到人合赋功，准此求之。

草曰：置 36 里 5 分，以里法 360 步通之，得 13140 步；又以步 5 尺乘之，得 65700 尺，为长率；并甲，乙，丙，丁四县合科人，得 7720，为均法；

今法与率可求等，得 20，以约之，率得 3285，法得 386，以长率 3285 尺，乘甲县先到人 1544 夫，得 5072040 人，为甲实，实如法 386 而一，得 13140 尺；以步 5 尺约之，得 2628 步，为甲县先到人所筑积步；

又以长率 3285 乘丙县先到人 965 夫，得 3170025 尺，为丙实，实如法 386 而一，得 8212 尺 5 寸，以步法 5 尺约之，得 1642 步半，为丙县先到人所筑步。

埂长	36.5 里	
里法	360 步	$36.5 \times 360 = 13140$ 步
步法	5 尺	
长率		$36.5 \times 360 \times 5 = 65700$ 尺
均法		$2780 + 1990 + 1630 + 1320 = 7720$ 人
每人筑率		$65700 \div 7720 = 3285/386$
甲县	1544 夫	
甲县所筑		$1544 \times 3285/386 = 13140$ 尺
丙县	965 夫	
丙县所筑		$965 \times 3285/386 = 8212.5$ 尺

第 40 题：宽减屯租

问：屯租欲议宽减，仍听以夏麦折纳分数：

官牛种者，与减二分；私牛种者，与减四分。

每岁租谷，以三分之一许夏折二麦内，四分大，六分小；

二麦及谷折色：每大麦三石折小麦二石；小麦二石折谷三石五斗。

屯租旧额：官种一石，纳租五石；私种一石，纳租三石；

今某州屯田，去年计，官、私种共九千七百八十二石，共合收租谷三万九千五百八十六石。

欲知：官，私种各数原额，今减，合催成年夏麦，秋谷各几何。

馆按：此题有官，私共种数，租数有种一石租数，求各种数租数，古谓之“差分”，今谓之“和较比例”；折色，亦差分也，今谓之“和数比例”；大，小麦与谷相易，古谓之“异乘，同乘”，今谓之“和率比例”。

答曰：请官种，五千一百二十石；私出种，四千六百六十二石；

原租额：共三万九千五百八十六石；

官种，二万五千六百石；私种，一万三千九百八十六石；

今共减：一万七百一十四石四斗；

官种，五千一百二十石；私种，五千五百九十四石四斗；

合共催：二万八千八百七十一石六斗。

	官种	私种
租	二万四千八十石	八千三百九十一石六斗
一分折麦计谷	六千八百二十六石六斗六升零三分之二	二千七百九十七石二斗
四分折大麦	二千三百四十石五斗七升七分升之一； 系折谷 二千七百三十石六斗六升三分之二	九百五十九石四升； 系折谷 一千一百一十八石八斗八升
六分折小麦	二千三百四十石五斗七升七分升之一； 系折谷 四千九十六石	九百五十九石四升； 系折谷 一千六百七十八石三斗二升
三分正色谷	一万三千六百五十三石三斗三升之一	五千五百九十四石四斗

成年共收：

夏折谷[馆按：即官种，私种一分折谷共数]，九千六百二十三石八斗六升三分之二；

大麦，三千二百九十九石六斗一升七分升之一；

小麦，三千二百九十九石六斗一升七分升之一；

秋正谷，一万九千二百四十七石七斗三升三分之一。

术曰：以粟米求之，互易入之。

列共租共种，各以租种率数，依本色对之；

先以各种率互乘诸租，验租数之少者，以乘共种，得数，复减共租，余为实；

以二租数相减，余为官种法，实如法而一，得官种；以减共种，余为私种；

各以租率对乘官、私种，各得官、私种所纳租；

次以减分对乘各纳租，乃得各减数；以减所纳，余为合催租；

乃分别之，先以总折分子乘之，各为实；并以总分母，除之，各得折色，正色数；

次置折色数二位，用夏折大、小麦乘之，各得与每折诸率如雁翅列；

常以多一事者，相乘为实，以少一事者，相乘为法，各得所折大小麦；

其正色数如故，为并本色，得成年夏折二麦秋收正谷。

草曰：列共租 39586 石，并共种 9782 石；

[原租]

次各以官种 1 石，纳租 5 石；私种 1 石，纳租 3 石；各为率，对租种，本色列之。

先以种率各 1 石，互承租数，只得共谷；

次验租数：率 3 石系少者，以乘共种 9782 石，得 29346 石，为种；复减共租，余 10240 石，为种实；以租率 3 减租率 5 余 2 石，系官租者，为官种法，除种实得 5120 石，为官种；以减共种 9782，余 4662 石，为私出种；

以官租率 5 石，私租率 3 石，各对乘官私种，得 25600 石，为官租所纳租，得 13986 石，为私种所纳租；并之，得原额租；

	官种	私种	合计
共租	39586		
共种	9782		
纳租率	5	3	
共谷	$39586 - 3 \times 9782 = 10240$	$39586 - 5 \times 9782 = 9324$	
租率差	$5 - 3 = 2$	$5 - 3 = 2$	
所纳租	$5 \times 10240 \div 2 = 25600$	$3 \times 9324 \div 2 = 13986$	39586

[减租]

次列官牛种，与减二分；私牛种，与减四分；

各对乘所纳租数，得 5120 石，为官种减租数；

得 5594 石 4 斗，为私种减租数；并之得 10714 石 4 斗，为今减数；

[催租]

乃以官种减租 5120 石，减官种租 25600，余 20480 石，为官种合催租；

次以私种减租 5594 石 4 斗，减私种租 13986 石，余 8391 石 6 斗，为私种合催租；

乃以二等合催租分列之，先以每岁 3 分之 1，以子 1 减分母 3 得 2；

乃以 1 及 2，皆为子，各乘各催租；

[一分折色及二分正色]

其官种者：一分租，得 20480 石；二分租，得 40960 石；

其私种者：一分租，得 8391 石 6 斗；二分租，得 16783 石 2 斗；

并为实。此四实并，如母 3 而一；

其官种一分折色，得 6826 石 6 斗 6 升零 3 分升之 2；

及二分正色谷，得 13653 石 3 斗 3 升 3 分升之 1；

其私种一分折色，得 2797 石 2 斗；

二分正色谷得 5594 石 4 斗；

	官种	私种	合计
所纳租	25600	13986	
减率	2	4	
减租	$25600 \times 2 \div 10 = 5120$	$13986 \times 4 \div 10 = 5594.4$	10714.4
合催租	$25600 \times (10 - 2) \div 10 = 20480$	$13986 \times (10 - 4) \div 10 = 8391.6$	28871.6
一分租	20480, 折色 $\div 3 = 6826 + 2/3$	8391.6, 折色 $\div 3 = 2797 + 1/5$	
二分租	40960, 折色 $\div 3 = 13653 + 1/3$	16783.2, 折色 $\div 3 = 5594 + 2/5$	
折麦	20480	8391.6	

[四分折色，六分折色]

次置官、私种各一分折色数各二位，乃用夏折四分大，六分小对乘之，通系四位，乃并四、六得 10 分，约之，是并退一位，其官种四分大麦者，置折谷 6826 石 6 斗 6 升 3 分升之 2；通分内子，得 20480，列二位，头位以四分折之，得 8192 石，为大麦实；下位以六分折

之，得 12288 石，为小麦实；

次置私种折谷 2797 石 2 斗列二位，头位以四分折之，得 1118 石 8 斗 8 升，为大麦率；
下位以六分折之，得 1678 石 3 斗 2 升，为小麦率；

次列折色：每大麦 3 石，折小麦 2 石；小麦 2 石，折谷 3 石 5 斗，为诸率；

与大、小麦实率四数，如雁翅列之；其六分折小麦，勿置大麦率；

折率有母者，列母。其图如后。

		官大麦 8192	官小麦 12288
		折率母 3	折率母 3
	大麦 3		
小麦 2	小麦 2		
谷 3.5			

$$\text{六分折大麦: } \frac{\text{大麦}}{\text{谷}} = \frac{\text{大麦}}{\text{小麦}} \times \frac{\text{小麦}}{\text{谷}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3.5} = \frac{3}{3.5};$$

	私大麦 1118.88	私小麦 1678.32
小麦 2		
谷 3.5		

$$\text{六分折小麦: } \frac{\text{小麦}}{\text{谷}} = \frac{2}{3.5};$$

官种者：先以大麦率 3，乘小麦率 2，得 6，又乘谷实 8192 石，得 49125 石，为大麦实；
乃以小麦率 2，乘谷率 3 石 5 斗，得 7 石，又乘母，得 21 石，为法，除实，得 2340 石
5 斗 7 升 7 七分升之 1，为官种折大麦数；

仍以母 3 约本实 8192 石，得 2730 石 6 斗 6 升 3 分升之 2，为所折上得大麦谷数；

次以小麦折 2，乘谷实 12288 石，得 24576 石，为小麦实；

乃以谷率 3 石 5 斗，乘母 3，得 10 石 5 斗，为法，除实，得 2340 石 5 斗 7 升 7 分升之
1，为官种折小麦谷；仍以母 3 约本实 12288 石，得 4096 石，为所折上得小麦谷数；

官种四分折折大麦数	$\frac{3}{3.5} \times \frac{8192}{3} = 2340.57 + 1/7$
官种四分折大麦谷数	$\frac{8192}{3} = 2730.66 + 2/3$
官种六分折折小麦数	$\frac{2}{3.5} \times \frac{12288}{3} = 2340.57 + 1/7$
官种六分折小麦谷数	$\frac{12288}{3} = 4096$

私种者：先以大麦 3 乘小麦率 2 得 6，又乘谷数 1118 石 8 斗 8 升，得 6713 石 2 斗 8 升，
为实，乃以小麦率 2 乘谷率 3 石 5 斗，得 7 石，为法，除之，得 959 石 4 升，为私种折大麦
数；

次以小麦率 2，乘谷率 1678 石 3 斗 2 升，得 3356 石 6 斗 4 升，为实，以谷率 3 石 5 斗
为法，除之，得 959 石 4 升，为私种谷折小麦数；

私种四分折折大麦数	$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3.5} \times 1118.88 = 959.04$
私种四分折大麦谷数	1118.88

私种六分折小麦数	$\frac{2}{3.5} \times 1678.32 = 959.04$
私种六分折小麦谷数	1678.32

[成年夏折共收]

次以官种四分大麦 2340 石 5 斗 7 升 7 分升之 1，并私种四分大麦 959 石 4 升，得 3299 石 6 斗 1 升 7 分升之 1，为成年夏折大麦数；

次以官种六分小麦 234 石 5 斗 7 分 7 分升之 1，并私种六分小麦 959 石 4 升，得 3299 石 6 斗 1 升 7 分升之 1，为成年夏折小麦数；

次以官种二分正色谷 13653 石 3 斗 3 升 3 分升之 1，并私种正色谷 5594 石 4 斗，得 19247 石 7 斗 3 升 3 分升之 1。合问。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 41 题：户税均宽

问：州郡宽恤，近将某县下三等税户秋科余欠钱米，已与蠲放，共：钱一千三百五十五贯七百六文，米五千二百七十二石一斗九升；某本县下三等物力计三万七千六百五十八贯五百文。今来官员陈述：“本县多有乐输无欠之户，今蒙蠲放税尾，似反宽润顽输之户，于理未均”。遂议：将乐输三等户于明年两税与照昨来体例减免。契勘得三等无欠户物力二十二万八百一十五贯三百二十一文。欲知每百文合减免钱、米，及共减各几何。

答曰：每物力一百文，放钱：三文六分；放米：一升四合；

明年两税放免：钱，七千九百四十九贯三百五十一文五分五厘六毫；

米，三万九百一十四石一斗四升四合九勺四抄；

术曰：以粟米，衰分求之。

置原物力为法，除原放钱、米，得每百文物力所放钱、米率；

以各率乘今来物力，各得钱、米，为明年两税合放数。

草曰：以原物力 37658 贯 500 文为法，先除原放钱 1355 贯 706 文，定法：百文上得一文为商，除得 3 文 6 分，为物力百文所放钱率；

次除原放米 5272 石 1 斗 9 升，得 1 升 4 合，为物力百文所放米率；

以今三等户物力 220815 贯 321 文遍乘所放钱，米二率，得钱 7949 贯 351 文 5 分 5 厘 6 毫；得米 30914 石 1 斗 4 升 4 合 9 勺 4 抄，为明年两税合放数。

原物力	37658500 文	
原放钱	1355706 文	
物力百文所放钱率		$1355706 \div 376585 = 3.6$ 文
原放米	527219 升	
物力百文所放米率		$527219 \div 376585 = 1.4$ 升
三等户物力	220815321 文	
合放钱		$3.6 \times 220815321 = 794935156$ 文
合放米		$1.4 \times 220815321 = 309141449$ 升

第 42 题：均科绵税

问：县科绵，有五等户，共一万一千三十三户；共科绵八万八千三百三十七两六钱；上
等一十二户，副等八十七户，中等四百六十四户，次等二千三十五户，下等八千四百三十五
户。欲令上三等折半差，下二等四折差，科率求之。欲知：各等户纳数，及各等户合纳数，
各几何。

答曰：上等一户一百二十四两，合计一千四百八十八两；

副等一户六十二两，合计五千三百九十四两；

中等一户三十一两，合计一万四千三百八十四两；

次等一户一十二两四钱，合计二万五千二百三十四两；

下等一户四两九钱六分，合计四万一千八百三十七两六钱；

术曰：列五等户数，先以四折下等数，加次等户；又以四折之加中等户数，却以半折之，
加二等户；又以半折之，加上等户数，不折，便为法；除科绵，得上等一户之绵；

复求各等户一户所出绵数：上等户数半之，为副等；又半之，为中等；又四折之，为次
等；又四折之，为下等各一户绵，却各以户数乘之，各得五等共出绵。

草曰：先置下等户 8435，以四折之，得 3374；

乃以所得数并入次户 2035 内，得 5409 户；又以四折之，得 2163 户 6 分；

乃以所得数并入中户 464 内，得 2627 户 6 分；次以五分折之，得数 1313 户 8 分；

次以所得数并入副户 87 内，得 1400 户 8 分；又以五分折之，得 700 户 4 分；

乃以副数 700 户 4 分，并上户 12 户，得 712 户 4 分，不折，便以为法：

	户数	户折率	求科绵户数
上等户	12		$700.4 + 12 = 712.4$
副等户	87	0.5	$(1313.8 + 87) \times 0.5 = 700.4$
中等户	464	0.5	$(2163.6 + 464) \times 0.5 = 1313.8$
次等户	2035	0.4	$(3374 + 2035) \times 0.4 = 2163.6$
下等户	8435	0.4	$8435 \times 0.4 = 3374$

累折讫，共得 712 户 4 分为科绵户数，以为总法。乃置科绵 88337 两 6 钱为实，实与总法
712 户 4 分而一，得 124 两，为上一户所出绵数；

次推其余各等户一户所出绵数：以上等一户所出绵，五折之，得 62 两，为副等一户所
出绵；又五折之，得 31 两，为副等一户所出绵；乃以四折之，得 12 两 4 钱，为次等一户所
出绵；又以四折之，得 4 两 9 钱 6 分，为下等一户所出绵；

	户折率	一户所出绵
上等户	0.5	124
副等户	0.5	62
中等户	0.4	31
次等户	0.4	12.4
下等户		4.96

乃以各等户数，各乘一户所出，即各得每等共数之绵。

	户数	一户所出绵	共数之绵
上等户	12	124	1488
副等户	87	62	5394
中等户	464	31	14384
次等户	2035	12.4	25234
下等户	8435	4.96	41837.6

第 43 题：户税移割

问：某县，据甲称：本户田地，原纳

苗：三十五石七斗；和买本色：一十一匹二丈二尺九寸四分八厘七毫五丝，和买折帛：二十七匹二寸一分三厘七毫五丝；紬绢折帛：八匹三丈九尺七寸三分九厘，紬绢本色：二十匹二丈八尺九寸三分九厘；

已将田四百七亩出与乙，五百十六亩出与丙，乞，乞移割本户所出田上税赋，归并乙，丙两户送纳；

会到乙原有田三百七十五亩，丙原有田四百六十三亩，并系本乡本等，每亩：

苗三升五合；税一尺一寸五分；物力一贯二百；本等田紬一尺三寸四分；物力九百；

物力三十二贯，敷和买一匹，内三分本色，七折帛；

夏税：七分本色，三分折帛；紬：五分本色，五折帛，并绢紬。

欲知甲田地，及甲，乙，丙分割；合纳：苗米，和买，夏税折帛、本色、畸零各几何。

[馆按：此题科税，分田地二项，田有科米、税绢、物力三色；地只有税紬、物力二色；绢与紬，折色不同；物力，和买，合田地总计之；又甲户有田、地者，乙、丙二户有田无地，此等皆不可不明言者，题中殊未分晰。]

答曰：甲原有田一千二十亩；地一十一亩二角四十八步；

	甲	乙	丙
今有田	九十七亩	七百八十二亩	九百七十九亩
苗米	三石三斗九升五合	二十七石三斗七升	三十四石二斗六升五合
夏税折帛	三丈三尺四寸 六分五厘	六匹二丈九尺 七寸九分	八匹一丈七尺七寸 五分五厘
本色	一匹	一十五匹	一十九匹
畸零	三丈八尺八分五厘	二丈九尺五寸一分	二丈八尺九分五厘
物力	一百一十六贯四百文		
地	一十一亩二角四十八步		
税紬折帛	七尺八寸三分九厘		
税紬畸零	七尺八寸三分九厘		
物力	一十贯五百三十文	九百三十八贯 四百文	一千一百七十四贯 八百文
田地共物力	一百二十六贯 九百三十文		
和买折帛	二匹三丈一尺六分 三厘七毫五丝	二十匹二丈 一尺一寸	二十五匹二丈七尺 九寸五分
本色	一匹	八匹	一十一匹
畸零	七尺五寸九分八厘 七毫五丝	三丈一尺九寸	五寸五分

术曰：以粟米，及衰分求之。

置甲原纳米为实，以每亩苗为法，除之，得甲原有田，以乘每亩税，得田绢；

次以甲紬绢、本色折帛，并之，内减田绢，余为地紬；以每紬约之，得甲原有地；

次以甲出田，并乙、丙原有田，各得三户今有田、地，各以等则乘之，各得物力、苗税；

次以每亩物力率，约各户共物力，得和买，副之，三分因之，退位，为和本；七分因之，

退位为和折；夏税反其分而因之，退之；紬以半之，并入税，各得。

草曰：[甲原纳绢紬]置甲原纳米 35 石 7 斗为实，以每亩苗 3 升 5 合为法，除之，得 1020 亩，为甲原有田；以乘每亩税 1 尺 1 寸 5 分，得 117 丈 3 尺，为绢（积尺）；

甲原有田		亩苗	亩税
原纳米	3570 升	3.5 升	1.15 尺
田		$35.7 \div 3.5 = 1020$ 亩	
田绢			$1020 \times 1.15 = 1173$ 尺

[甲原有地紬，原有地]次以甲原纳绢紬，折帛 8 匹 3 丈 9 尺 7 寸 3 分 9 厘，并紬绢本色 20 匹 2 丈 8 尺 9 寸 3 分 9 厘，得 28 匹 6 丈 8 尺 6 寸 7 分 8 厘，其 28 匹，以匹法 4 丈，通得匹数 112 丈，纳余丈，得 118 丈 8 尺 6 寸 7 分 8 厘，内减田绢（积丈、尺）117 丈 3 尺，余 1 丈 5 尺 6 寸 7 分 8 厘，为甲地紬；以每亩紬 1 尺 3 寸 4 分，纳之，得 11 亩 7 分；其亩下 7 分，以亩法 240 步通之，得 168 步，以角法 60 步纳之，得 2 角 48 步，故得 11 亩 2 角 48 步，为甲原有地；

甲原有地		匹法 4 丈	亩紬 1.34 尺
原纳绢紬	83.9739 丈	35.9739 丈	
紬绢本色	202.8939 丈	82.8939 丈	
田绢		117.3 丈	
甲地紬		1.5678 丈	
原有地			$10 \times 1.5678 \div 1.34 = 11.7$ 亩

[亩米]乃以甲所出田 407 亩，及 516 亩，并得 923 亩，减原有 1020 亩，余 97 亩，为甲今有田；次以甲出田 407 亩，并乙原有田 375 亩，共得 782 亩，为乙今有田；次以甲所出田 516 亩，并丙原有田 463 亩，共得 979 亩，为丙今有田；各列 3 户今有田、地数于右行，副之；先以每亩苗 3 升 5 合遍乘右行，甲得 3 石 3 斗 9 升 5 合，乙得 27 石 3 斗 7 升，丙得 34 石 2 斗 6 升 5 合，为本户苗米；

次以每亩税 1 尺 1 寸 5 分，遍乘左副行，甲得 11 丈 1 尺 5 寸 5 分；乙得 89 丈 9 尺 3 寸；丙得 112 丈 5 尺 8 寸 5 分；

苗米	田	亩苗 3.5 升	亩税 1.15 尺
甲	$1020 - 407 - 516 = 97$	339.5 升	111.55 尺
乙	$407 + 375 = 782$	2737 升	899.3 尺
丙	$516 + 463 = 979$	3426.5 升	1125.85 尺

[三七折]各为丈积，各列二位，皆以 3 分因头位，7 分因下位，并退 1 位，即是自下三七折之；

三七折	亩税 0.115 丈	$\times 0.3$	匹	$\times 0.7$	匹
甲	11.155 丈	3.3465 丈	0 匹	7.8085 丈	1 匹
乙	89.93 丈	26.979 丈	6 匹	62.951 丈	15 匹
丙	112.585 丈	33.7755 丈	8 匹	78.8095 丈	19 匹

[夏税]又各以 4 丈 = 1 匹，约丈积成匹；

其甲得 3 丈 3 尺 4 寸 6 分 5 厘，为夏税折帛；

又得 1 匹 3 丈 8 尺 0 寸 8 分 5 厘，为夏税本色；

其乙得 6 匹 2 丈 9 尺 7 寸 9 分，为夏税折帛；

又得 15 匹 2 丈 9 尺 5 寸 1 分，为夏税本色；

其丙得 8 匹 1 丈 7 尺 7 寸 5 分 5 厘，为夏税折帛，

又得 19 匹 2 丈 8 尺 0 寸 9 分 5 厘，为夏税本色；

夏税	夏税折帛	夏税本色
甲	0 匹 + 3.3465 丈	1 匹 + 3.8085 丈
乙	6 匹 + 2.979 丈	15 匹 + 2.951 丈

丙	8 匹+1.7755 丈	19 匹+2.8095 丈
---	--------------	---------------

[物力]次以田力 1 贯 2 百，遍乘右副行，并以地物力乘甲原地，及纳甲，得 116 贯 400；乙得 938 贯 400；丙得 1174 贯 800；各为田物力；

田物力	田	田物力
甲	97	×1200=116400 文
乙	782	×1200=938400 文
丙	979	×1200=1174800 文

其甲：又置 11 亩 7 分，以乘地紬 1 尺 3 寸 4 分，得 1 丈 5 尺 6 寸 7 分 8 厘，为甲地紬；半之，得 7 尺 8 寸 3 分 9 厘，各为折紬本色；

又以甲地乘物力 900，得 10 贯 530，为甲地物力；

并田物力 116 贯 400，共得 126 贯 930 文，为甲物力；

甲物力	田物力	地	地紬	折紬本色	地物力	共物力
甲	116400 文	11.7 亩	×0.134= 1.5678 丈	÷2= 0.7839	×900= 10530 文	126930 文

[和买]列甲、乙、丙 3 户共物力，各为贯，皆以物力和买率 32 贯为法，除之：

甲得 3 匹 9 分 6 厘 6 毫 5 丝 6 忽 2 紬 5 尘；

乙得 29 匹 3 分 2 厘 5 毫；

丙得 36 匹 7 分 1 厘 2 毫 5 丝；

和买率	共物力	÷32 贯
甲	126.930 贯	3.9665625
乙	938.400 贯	29.325
丙	1174.800 贯	36.7125

各为和买率，亦各列二位，各以七三折之：

其头位 7 折者，为和买折帛；下位 3 折者，为和买本色折：

七三折	和买率	×0.7，和买折帛	×0.3，和买本色
甲	3.9665625	2.77659375 匹	1.18996875 匹
乙	29.325	20.5275 匹	8.7975 匹
丙	36.7125	25.69875 匹	11.01375 匹

乞，其甲得 2 匹 7 分 7 厘 6 毫 5 丝 9 忽 3 紬 7 尘 5 沙，为和买折帛率；

又得 1 匹 1 分 8 厘 9 毫 9 丝 6 忽 8 紬 7 尘 5 沙，为和买本色率；

乙得 20 匹 5 分 2 厘 7 毫 5 丝，为和买折帛率；

又得 8 匹 7 分 9 厘 7 毫 5 丝，为和买本色率；

丙得 25 匹 6 分 9 厘 8 毫 7 丝 5 忽，为和买折帛率；

又得 11 匹 1 厘 3 毫 7 丝 5 忽，为和买本色率；

各率，除端、匹外，乃以匹下分毫，皆以 4 因之，收为丈，尺，寸，分；

甲得和买折帛 2 匹 3 丈 1 尺 6 分 3 厘 7 毫 5 丝，本色 1 匹 7 尺 5 寸 9 分 8 厘 7 毫 5 丝；

乙得和买折帛 20 匹 2 丈 1 尺 1 寸，本色 8 匹 3 丈 1 尺 9 寸；

丙得和买折帛 25 匹 2 丈 7 尺 9 寸 5 分，本色 11 匹 5 寸 5 分；

为各户和买数，及分本色下畸零数，合问。

和买数	折帛匹下分毫	×4，折帛畸零数	本色匹下分毫	×4，本色畸零数
甲	0.77659375 匹	3.106375 丈	0.18996875 匹	0.759875 丈
乙	0.5275 匹	2.11 丈	0.7975 匹	3.19 丈
丙	0.69875 匹	2.795 丈	0.01375 匹	0.055 丈

第 44 题：移运均劳

问：今起夫移运县饷，于某郡交纳，合起一万二千夫：

甲州有三县：

上县力五十七万三千二百五十九贯五百文，至输所九百二十五里；

中县力五十四万四千九百八十三贯七百八十文，至输所六百五十二里；

下县力四十九万八千七百六十贯九百五十文，至输所四百六十五里；

乙军倚郭，一县五乡：

仁乡力一百二万八千三百七十一贯九百八十文，至输所七百六里；

义乡力一十一万九千四百七十二贯六百文，至输所七百九十五里；

礼乡力一十万八千四百六十三贯五十文，至输所七百九十里；

智乡力八万四千二百三十六贯二百八十五文，至输所七百十九里；

信乡力九千三百四十五贯一百六十文，至输所八百四里；

欲知以物力多寡，道里远近，均运之令费劳等，各合科夫几何。

答曰：甲州：上县差二千四百三十夫，中县差三千三十七夫，下县差四千二百六夫；

乙军郭县：仁乡七百一十三夫，义乡五百八十九夫；

礼乡五百三十八夫，智乡四百四十一夫，信乡四十六夫

术曰：以均输求之。

置各县及乡力，皆如里而一，不尽者，约之，复通分内子，互乘之，或就母迁退之，各得变力，可约，约之，为定力，副并为法；以合起夫遍乘未并定力，各得为实，并如前法而一，各得夫，其余分鞞之。

草曰：置甲州三县，及乙军五乡物力，里数，作八行列之。具图于后：

		物力	至输所	力如里而一	不尽
甲州	上县	573259 贯 500 文	925 里	619740	0
	中县	504983 贯 780 文	652 里	774515	0
	下县	498760 贯 950 文	465 里	1072604	90
乙军郭县	仁乡	128371 贯 980 文	706 里	181830	0
	义乡	119472 贯 600 文	795 里	150280	0
	礼乡	108463 贯 50 文	790 里	137295	0
	智乡	84236 贯 285 文	749 里	112465	0
	信乡	9345 贯 160 文	804 里	11623	268

置上县力 573259 贯 500 文，如 925 里而一，得力 619740；

置中县 504983 贯 780 文，如 652 里而一，得力 774515；

置下县 498760 贯 950 文，如 465 里而一，得力 1072604，不尽 90 文，与法求等，得 15，约之得 31 分之 6；

置仁乡 128371 贯 980 文，如 706 里而一，得力 181830；

置义乡 119472 贯 600 文，如 795 里而一，得力 150280；

置礼乡 108463 贯 50 文，如 790 里而一，得力 137295；

置智乡 84236 贯 285 文，如 749 里而一，得力 112465；

置信乡 9345 贯 160 文，如 804 里而一，得力 11623，不尽 268 文，与法求等，得 268，约为 3 分之 1；

其下县，信乡二处带母子者，各以母 $31 \times 3 = 93$ 互遍乘八处，所得毕；二处各纳本子：

		力如里而一	变力率
甲州	上县	619740	57635820
	中县	774515	72029895

	下县	1072604+6/31	99752190
乙军郭县	仁乡	181830	16910190
	义乡	150280	13976040
	礼乡	137295	12768435
	智乡	112465	10459245
	信乡	11623+1/3	1080970

已上为三乡五县变力率。可约者，复求等约之，求得等 5，故俱以 5 约之：

		以母 93 遍乘	定力
甲州	上县	57635820	11527164
	中县	72029895	14405979
	下县	99752190	19950438
乙军郭县	仁乡	16910190	3382038
	义乡	13976040	2795208
	礼乡	12768435	2553687
	智乡	10459245	2091849
	信乡	1080970	216194
法			56922557

已上并为定力。副并八处定力，得 56922557，为法【馆按：法多二十，仁乡定力多二十，故也】以合起 1200 夫，遍乘定力，讫，得实：

		定力	实	实如法而一	不尽
甲州	上县	11527164	138325968000	2430	4154490
	中县	14405979	172871748000	3036	54864948
	下县	19950438	239405256000	4205	45903815
乙军郭县	仁乡	3382038	40584456000	712	55595416
	义乡	2795208	33542496000	589	15109927
	礼乡	2553687	30644244000	538	19908334
	智乡	2091849	25102188000	440	56262920
	信乡	216194	2594328000	45	32812935
法		56922557			

已上八实，皆如前法 56922557 而一；余分四舍五入辈之，各得夫数，合问。

		实	不尽	辈之	夫数
甲州	上县	138325968000	4154490	0.0729	2430
	中县	172871748000	54864948	0.9638	3037
	下县	239405256000	45903815	0.8064	4206
乙军郭县	仁乡	40584456000	55595416	0.9766	713
	义乡	33542496000	15109927	0.2654	589
	礼乡	30644244000	19908334	0.3497	538
	智乡	25102188000	56262920	0.9884	441
	信乡	2594328000	32812935	0.5764	46

第 45 题：均定劝分

问：欲劝赈賑济。据申：民户共计一百六十二户，依物力亩步，排定作九等：

上等三户，第二等五户，第三等七户，第四等八户，第五等十三户，第六等二十一户，第七等二十六户，第八等三十四户，第九等四十五户。

今先劝谕第一等上户，愿赈五千石；第九等户，愿赈二百石。

欲知各等石数抛差，认米数并数，各几何。

答曰：石数抛差六百石；认米数并数：二十三万七千六百石；

上等一户米：五千石；三户计：一万五千石；

二等一户米：四千四百石；五户计：二万二千石；

三等一户米：三千八百石；七户计：二万六千六百石；

四等一户米：三千二百石；八户计：二万五千六百石；

五等一户米：二千六百石；一十三户计：三万三千八百石；

六等一户米：二千石；二十一户计：四万二千石；

七等一户米：一千四百石；三十六户计：三万六千四百石；

八等一户米：八百石；三十四户计：二万七千二百石；

九等一户米：二百石；四十五户计：九千石。

术曰：以衰分求之。

置上下户米，减余，为实；列等数，减一，余为法，除之，得石数抛差；

以抛差累减上等米，各得诸等米；以各等户乘之，并之，为总数。

草曰：置上等户米 5000 石，减下等户 200 石，余 4800 石，为实，以 9 等减 1，余 8 为法，除实得 600 石，为每等抛差。

上等户	5000 石
下等户	200 石
实	$5000 - 200 = 4800$ 石
等数	9
抛差	$(5000 - 200) \div (9 - 1) = 600$

用减上等，余 4400 石，为二等米；又减 600 得 3800 石，为三等米；又减 600 得 3200 石，为四等米；又减 600 得 2600 石，为五等米；又减 600 得 2000 石，为六等米；又减 600 得 1400 石，为七等米；又减 600 得 800 石，为八等米；又减 600 得 200 石，为九等米；

又各乘户数，并之，得总认米石数 237600 石。合问。

	米	户数	认米石数
上等	5000	3	15000
二等	4400	5	22000
三等	3800	7	26600
四等	3200	8	25600
五等	2600	13	33800
六等	2000	21	42000
七等	1400	26	36400
八等	800	34	27200
九等	200	45	9000
总认米石数			237600

“赋役第五”现代文翻译

第 37 题：确定修复城邑的赋税

问题：很久以前，有座县城被海水淹没，如今，这块地又冒了出来，天长日久，就再度成了乡镇，并且申请设立城市，申报称：土地安排到六个乡，以县城附近的为甲乡，离开县城最远的为己乡，每个乡各有九等田，具体项目开具如下：

甲乡：共计田 140193 亩 3 角 12 步；

上等	上田	5678 亩 1 角 48 步	5678.45
	中田	4892 亩 30 步	4892.125
	下田	6621 亩 54 步	6621.225
中等	上田	8225 亩 24 步	8225.1
	中田	10035 亩 6 步	10035.025
	下田	16530 亩	16530
下等	上田	21090 亩 24 步	21090.1
	中田	32060 亩 3 步	32060.0125
	下田	35061 亩 3 角 3 步	35061.7625

乙乡：田共计 84010 亩 2 角 2 步；

上等	上田	6789 亩 1 角 36 步	6789.4
	中田	5987 亩 2 角	5987.5
	下田	8010 亩 3 角 3 步	8010.7625
中等	上田	7541 亩	7541
	中田	9121 亩 2 角 12 步	9121.55
	下田	19066 亩 6 步	19066.025
下等	上田	18037 亩 1 角 6 步	18037.275
	中田	9456 亩 3 角 59 步	9456.995833
	下田	无	0

丙乡：田共计 120935 亩 58 步 5 分；

上等	上田	4868 亩 2 角 3 步	4868.5125
	中田	5979 亩 3 角 6 步	5979.775
	下田	6888 亩 2 角 6 步	6888.525
中等	上田	7984 亩 1 角	7984.25
	中田	14056 亩 12 步	14056.05
	下田	23333 亩 12 步	23333.05
下等	上田	27755 亩 16 步 5 分	27755.06875
	中田	无	0
	下田	30070 亩 3 步	30070.0125

丁乡：田共计 89066 亩 2 步 3 分；

上等	上田	11102 亩 1 步	11102.0042
	中田	9876 亩 1 角	9876.25
	下田	8765 亩 1 角 30 步	8765.375
中等	上田	7539 亩 34 步 3 分	7539.1429
	中田	无	0
	下田	12987 亩 42 步	12987.175

下等	上田	无	0
	中田	5432 亩 1 角 6 步	5432.275
	下田	33363 亩 3 角 9 步	33363.7875

戊乡：田共计 204474 亩 1 角 24 步 4 分；

上等	上田	24632 亩 39 步	24632.1625
	中田	13521 亩 27 步	13521.1125
	下田	9988 亩 3 角 3 步	9988.7625
中等	上田	8877 亩 56 步 4 分	8877.235
	中田	11333 亩 3 角	11333.75
	下田	27067 亩	27067
下等	上田	19876 亩 3 角 6 步	19876.775
	中田	79135 亩 3 角 43 步	79135.92917
	下田	10041 亩 2 角 30 步	10041.625

己乡：田共计 158460 亩 3 角 18 步 2 分；

上等	上田	无	0
	中田	7788 亩 3 角 51 步	7788.9625
	下田	无	0
中等	上田	9999 亩 2 角 3 步	9999.5125
	中田	10836 亩 56 步	10836.23333
	下田	无	0
下等	上田	32089 亩 1 角 45 步 6 分	32089.44
	中田	43678 亩 2 角 57 步	43678.7375
	下田	54067 亩 3 角 45 步 6 分	54067.94

该县过去的纳税信息如下：

苗米，103567 石 8 斗 4 升 4 合 3 勺；

和买，13498 匹 1 丈 7 尺 3 寸 7 分 6 厘；

夏税，9876 匹 3 丈 2 尺 6 寸 5 分 8 厘。

这六个乡的田分为三个成色：甲乡最佳，为上；乙、丙其次，为中；丁、戊、己又次，为上。因此，租税就要求上比中多纳 10%，中比下多纳 10%；其次，再令各个乡的九等田，按照 100%至 20%的折扣，确定最终的租税数额。

请问：各乡三个成色的九等田，每亩的租税率，以及各乡合计的租税数额，各是多少。

【编者注：左右列数值换算方法：在 54067.94 中，

$$0.94 \times 240 = 225.6, 225.6 - 3 \times 60 = 45.6,$$

则 54067.94 即为 54067 亩 3 角 45 步 6 分；

面积单位：亩，角，步，分；1 亩 = 60 角 = 240 步，1 角 = 4 步；

重量、体积单位：石，斗，升，合，勺，抄，撮，圭；

长度单位：匹，丈，尺，寸，分，厘，毫，丝，忽；

原文强调“其乙乡田最肥，次丁，次甲，次丙，次己，次戊。”没有必要，删除。

宋时“和买”大多是官府向民间购买丝麻产品，以保证庞大常备军的军装供应。为此，官府需在丝麻产区置场和买各种产品。宋太宗赵炅到宋真宗赵恒时，经马元方、王旭、李士衡等人创议，开始实行预买，即向民间预支和买本钱，而以丝麻产品随两税纳还官府。预买推行於河北、京东、京西、淮南、两浙、江南、荆湖、川峡等路，逐渐成为和买的主要形式，故宋人或将预买与和买混称，或合称和预买。大致自宋仁宗赵祯时，各地已用不同方式减克和买本钱，景佑时，和买紬绢一百九十万匹，庆历时，增至三百万匹，和买成为民间沉重的

负担。北宋晚期，和买已部分演变为定额税，南宋初期，更完全演变为定额税，官府不再支付和买本钱。和买一般按人户家业钱额、税钱额摊派，某些地区还适当参照户等。如四川自宋神宗赵顼时，规定乡村上三等户摊派和买，四、五等户不敷和买。南康军(今江西星子)每税钱四百三十文，起敷和买一匹。婺州(今浙江金华)某些县人户自三十贯家业钱以上，起敷和买。官户和乡村上户往往采取诡名子户的办法，即将一户分成数户以至数十户，以降低户等，向乡村下户转嫁和买负担。在不少地区，和买额超过夏税额，成为南宋的重赋。

(宋元)马端临《文献通考》:

高宗建炎三年，车驾初至杭州，朱胜非为相。两浙运副王琮言：“本路上供、和买绸绢，岁为一百一十七万匹，每匹折纳钱两千，计三百五万缗省，以助国用。”诏许之。东南折帛钱自此始。

按：折帛元出於和买。其始也，则官给钱以买之；其後也，则官不给钱而白取之；又其後也，则反令以每匹之价折纳见钱，而谓之折帛。倒置可笑如此，则官价之不给久矣，今乃甫诏诸路究臣覈州县已未支和买本钱实数来上，岂其时上之人元未知邪？或官吏肆为欺蔽，复以和买名色妄有支破邪？魏砀之说固为当理，然役钱者，应纳之物也；折帛者，横取之物也。官惟其乏钱，是以不免横取於民，若其可蠲，则自当明蠲横取之折帛钱，正不必以应纳之役钱比折也。】

【原文】复邑修赋

问有海圻县地，今有复涨，岁久乡井再成，申请创邑称土，排到六乡，以附郭为甲，最远为己，各有田九等，开具下项：

甲乡：共计田十四万一百九十三亩三角一十二步；

上等上田五千六百七十八亩一角四十八步，

中田四千八百九十二亩三十步，

下田六千六百二十一亩五十四步，

中等上田八千二百二十五亩二十四步，

中田一万三千五百六步，

下田一万六千五百三十亩，

下等上田二万一千九十亩二十四步，

中田三万二千六十亩三步，

下田三万五千六十一亩三角三步，

乙乡：田共计八万四千一十亩二角二步；

上等上田六千七百八十九亩一角三十六步，

中田五千九百八十七亩二角，

下田八千一十亩三角三步，

中等上田七千五百四十一亩，

中田九千一百二十一亩二角一十二步，

下田一万九千六十步，

下等上田一万八千三十七亩一角六步，

中田九千四百五十六亩三角五十九步，

下田无，

丙乡：田共计一十二万九百三十五亩五十八步五分；

上等上田四千八百六十八亩二角三步，

中田五千九百七十九亩三角六步，

下田六千八百八十八亩二角六步，

中等上田七千九百八十四亩一角，

中田一万四千五十六亩一十二步，
下田二万三千三百三十三亩一十二步，
下等上田二万七千七百五十五亩一十六步五分，
中田无，
下田三万七十亩三步，

丁乡：田共计八万九千六十六亩二步三分；
上等上田一万一千一百二亩一步，
中田九千八百七十六亩一角，
下田八千七百六十五亩一角三十步，
中等上田七千五百三十九亩三十四步三分，
中田无，

下田一万二千九百八十七亩四十二步，
下等上田无 0

中田五千四百三十二亩一角六步，
下田三万三千三百六十三亩三角九步，

戊乡：田共计二十万四千四百七十四亩一角二十四步四分；

上等上田二万四千六百三十二亩三十九步，
中田一万三千五百二十一亩二十七步，
下田九千九百八十八亩三角三步，
中等上田八千八百七十七亩五十六步四分，
中田一万一千三百三十三亩三角，
下田二万七千六十七亩，

下等上田一万九千八百七十六亩三角六步，
中田七万九千一百三十五亩三角四十三步，
下田一万四十一亩二角三十步，

己乡：田共计一十五万八千四百六十亩三角一十八步二分；

上等上田无，
中田七千七百八十八亩三角五十一步，
下田无，

中等上田九千九百九十九亩二角三步，
中田一万八百三十六亩五十六步，
下田无，

下等上田三万二千八十九亩一角四十五步六分，
中田四万三千六百七十八亩二角五十七步，
下田五万四千六十七亩三角四十五步六分，

照得昨来本县原科：

苗米，一十万三千五百六十七石八斗四升四合三勺；

和买，一万三千四百九十八匹一丈七尺三寸七分六厘；

夏税，九千八百七十六匹三丈二尺六寸五分八厘。

其六乡田系三色，甲为上，乙、丙为次，丁、戊、己又为次。

先令官物为三差，使上比中，中比下，皆十分外差一；

次令各乡九等，皆于十分内差一抛科，用合租额；其乙乡田最肥，次丁，次甲，次丙，次己，次戊。

欲知各乡三色九等田每亩等则，及共科数，各乡几何。

第 38 题：芦苇荡中围田造地

问题：有一所芦苇荡，广宽 3 里，纵长 118 里；

夏季：水深 2 尺 5 寸，与溪水平面相等，溪面宽 13 丈，流长 135 里，流入湖中。

冬季：水深 1 尺，决定趁冬季水浅时围荡造田，在荡中顺纵长方向开一条大港道，成直角形与溪相通；顺着广的方向开小港 24 条，深度都相同；小港宽为大港的 6 分之 1，大港的深为大港面宽的 3 分之 1，大港、小港的底各比其面小 1 尺；取出的土筑为田堤，田堤高 1 丈，上宽 6 尺，下宽 1 丈 2 尺；芦苇荡面向溪纵向的为田堤（又称为岸），它的高和宽都是田堤高和宽的两倍，在溪的上流和下流各开一所斗门，以保证田内止容有 8 寸的水，多余的水让它重新流回溪中，再进入湖里。已知：1 里=360 步，1 步=5 尺；请问：田的面积，埂的土积（=港容水）；大港、小港的底、深、宽；冬季积水，夏季积水，田容水，遏出水（=过水），溪面泛高，各是多少。

【编者注：磬（qìng）〈名〉象形。甲骨文字形。手又持小槌像击磬的形象。本义：古代乐器，用石或玉雕成，悬挂于架上，击之而鸣。

磬折：弯腰；卑躬屈膝。这里的“磬折”应该是“如同磬一样曲折”，亦即：所成度角在 100~170 度之间，《文渊阁四库全书·子部·天文算法类·数学九章》取此含义。原文理解为曲尺形，亦即直角形。

塍（塍 chéng）〈名〉形声。从土，朕(zhèn)声。本义：田间的土埂[earth bank path between fields]。田塍=田埂；塍陇=田间隆起的小路；小堤 [small dike]。如：塍岸=小堤，田堤。

原文中，埂的土积是个理想值（未考虑斗门），计算公式（梯形面积×长度）为：

土积= $(2 \times \text{荡广} + \text{荡纵}) \times 2 \times 2 \times \text{荡纵} \times (\text{埂上广} + \text{埂下广}) \times \text{埂高} \div 2$ ；

（宋元）马端临《文献通考·田赋考六○湖田围田》

绍兴五年春二月，宝文阁待制李光言：“明、越之境皆有陂湖，大抵湖高於田，田又高於江、海，旱则放湖水溉田，涝则决田水入海，故不为灾。本朝庆历、嘉祐间，始有盗湖为田者，三司使切责漕臣甚严。政和以来，创为应奉，始废湖为田，自是两州之民，岁被水旱之患。壬子岁，尝取会馀姚、上虞两邑利害，自废湖以来，每县所得租课不过数千斛，而所失民田常赋动以万计，遂先罢两邑湖田。其会稽之鉴湖、鄞之广德湖、萧山之湘湖等处尚多，望诏漕臣访问，应明、越湖田尽行废罢，其江东、西圩田，苏、秀围田，并遍下诸路监司守令条上。”诏诸路漕臣躬亲相度，以闻於朝。

二十三年，谏议大夫史才言：“浙西民田最广，而平时无甚害者，太湖之利也。近年濒湖之地，多为军下侵据，累土增高，长堤弥望，名曰‘坝田’。旱则据之以溉，而民田不沾其利；水则远近泛滥，不得入湖，而民田尽没。望诏有司究治，尽复太湖旧迹，使军民各安，田畴均利。”从之。

按：圩田、湖田多起於政和以来，其在浙间者隶应奉局，其在江东者蔡京、秦桧相继得之。大概今之田，昔之湖。徒知湖中之水可涸以垦田，而不知湖外之田将胥而为水也。主其事者皆近倖、权臣，是以委邻为壑，利己困民，皆不复问。《涑水记闻》言：“王介甫欲兴水利，有献言欲涸梁山泊可得良田万顷者，介甫然其说，复以为恐无贮水之地，刘贡甫言，在其旁别穿一梁山泊则可以贮之矣。介甫笑而止。当时以为戏谈。”今观建康之永丰圩、明越之湖田，大率即涸梁山泊之策也。】

【原文】围田先计

问有草荡一所，广三里，纵一百一十八里；夏日水深二尺五寸，与溪面等平，溪阔一十三丈，流长一百三十五里，入湖。冬日水深一尺，欲趁此时围裹成田，于荡中顺纵开大港一条，磬折通溪；顺广开小港二十四条，其深同；其小港阔，比大港六分之一，大港深，比大港面三分之一，大小港底各不及面一尺，取土为埂，高一丈，上广六尺，下广一丈二尺；荡纵当溪，其岸高广倍其埂数，上下流各立斗门一所，须令田内止容水八寸，遏余水复溪，入

湖。里法三百六十步，步法五尺；欲知田积，埂土积，大、小港底面，深，阔，冬夏积水，田港容水，过水，溪面泛高几何。

第 39 题：筑圩埂的埂长分配

问题：四个县共同修筑圩埂，埂长 36.5 里。甲县出 2780 人；乙县出 1990 人；丙县出 1630 人；丁县出 1320 人；其中，甲县先差派到 1544 夫；丙县先差派到 956 夫。请问：甲县和丙县各应先分配的埂长是多少[里法 360 步]。

【编者注：圩（wéi）<名>形声。从土，于声。本义：低洼区防水护田的土堤。

圩埂（wéigěng）[embankment on the low-lying land] 在低洼地区修筑的堤堰，用于防止洪水淹袭。】

【原文】筑埂均功

问四县共兴筑圩埂，长三十六里半。甲县出二千七百八十人；乙县出一千九百九十人；丙县出一千六百三十人；丁县出一千三百二十人；其甲县先差到一千五百四十四夫；丙县先差到九百六十五夫。欲知各合赋役埂长几何[里法三百六十步]。

第 40 题：宽减屯租

问题：打算宽减屯租，仍然以夏麦折纳的数额分配租数：

属于官方提供牛、种的，减租 2 成；属于私人个人出牛、种的，减租 4 成。

每年的租谷，可以 3 分之 1，折算为夏大麦 4 成，夏小麦 6 成；

大麦，小麦，谷之间的折率：大麦每 3 石折合小麦 2 石；小麦每 2 石折合谷 3 石 5 斗。

屯租原来的配额是：官方提供种 1 石，纳租 5 石；私人个人出种 1 石，纳租 3 石；

如今，某州屯田租，去年合计官、私种共 9782 石，总共应该收取的租谷为 39586 石。

请问：官牛种，私牛种各数的原额；今年的减租，应该催收成年的夏麦，秋谷，各是多少。

馆按：此题有官，私共种数，租数有种一石租数，求各种数租数，古谓之“差分”，今谓之“和较比例”；折色，亦差分也，今谓之“和数比例”；大，小麦与谷相易，古谓之“异乘，同乘”，今谓之“和率比例”。

【编者注：关于官牛种，《宋会要辑稿·营田杂录》有诏：

淳熙十年五月十三日，诏：「湖广、京西转运司将都统司具到顷亩，先次行下襄阳、德安府、鄂州契勘，如于民田无侵犯，即依逐司条具事理施行。候将来招到佃户人数并所收课子数目，每岁开具闻奏。」以湖广赵汝谊等言：「鄂州江陵府都都统制岳建寿申：『襄阳、德安府、鄂州根括积年荒田九十余顷，与屯田见耕田土相接。今若许令本司从营田体例招置佃户，官给牛具、种子，与免官司差役，耕种所得租课分收入官，庶岁荒闲之地渐所得田。』奉旨：令都统司同总领所、京西、湖北转运司措置条具闻奏。臣等今条具下项：乞从营田体例招置佃户，每顷以三人为率，约当三百余人。今欲将置到佃户依仿保伍法团结，有犯，从本屯及地分官司照条斟量轻重施行。一、官给牛具、种子，每亩种一斗，共享种九百余石，欲于逐处屯田见桩斛斗内支拨。所有耕牛，每顷用牛二头，共享一百八十余头，并农具于营屯所钱内通融支拨收买。仍佃户每家官给草屋三间，内住屋二间，牛屋一间，令就本屯官兵计置起盖。一、与免佃户本名下丁身差科，及免充本都内烟火保甲差使。一、招置到佃户，每名欲权借谷三五石以至十石应副食用，候至秋成日拘收。一、开垦之初，与免初年分收课谷一料，至次年除留官种外，将收到子课官客均分。」故有是诏。

《钦定续文献通考·卷二·田赋考·历代田赋之制》：

三年三月命计民授田

郑州知州苏琦言：“自辛卯河南兵起，天下骚然，兼以元政衰微，将帅凌暴，十年之间，耕桑变为草莽，若不设法招徕耕种以实中原，恐日久国用虚竭。为今之计，莫若计复业之民垦田外，其余荒芜土田，宜责之守，令召诱流移未入籍之民，官给牛种，及时播种，除官种

外与之，置仓中分收。受守令正官召诱，户口有增开田有成者从”。

巡歷御史申：“举若田不加辟民不加多，则覈其罪”。帝是其言，遂命省臣议，计民授田，设司农司，开治河南掌其事。

六月，谕中书省曰：“苏、松、嘉、湖、杭五郡，地狭民众，无田以耕，往往逐末利而食不给。临濠，朕故乡也，田多未辟，土有遗利，宜令五郡民无田者往开种，就以所种田为己业，给资粮、牛、种，复三年验其丁力，计畝给之，毋许兼并。又北方近城，地多不治召民耕，人给十五畝，蔬地二畝，免租三年。有余力者，不限顷畝，自是，每歲中书省奏天下垦田数，少者，畝以千计；多者，至二十余万；官给牛及农具者，乃收其税；额外垦荒者，永不起科”。】

【原文】宽减屯租

问屯租欲议宽减，仍听以夏麦折纳分数：官牛种者，与减二分；私牛种者，与减四分。

每岁租谷，以三分之一许夏折二麦内，四分大，六分小；

折色：每大麦三石折小麦二石；小麦二石折谷三石五斗。

屯租旧额：官种一石，纳租五石；私种一石，纳租三石；

今某州屯田去年计官私种共九千七百八十二石，共合收租谷三万九千五百八十六石。

欲知官私种各数原额今减合催成年夏麦秋谷租各几何。

第 41 题：合理分配宽免的户税款

问题：州郡体恤民情，近日决定：将某县下的三等税户的秋季纳税所欠的剩余钱，米，一概免除，共计：钱 1355706 文，米 527219 升；该县下三等税户物力合计：37658500 文。今天，该县官员陈述：“本县有许多按时纳税的“乐输户”，现在州郡免除剩余的税款尾数，似乎是在鼓励那些不按时纳税的“顽输户”，这很不公平”。于是州郡决定：将三等“乐输户”明年的两税按照昨天的体例一并减免。统计表明：三等“无欠户”物力 220815321 文。请问：每百文物力应该减免的钱数、米数，以及明年两税一共减免的数额各是多少。

【编者注：蠲 (juān)，除去、驱出、去掉。同“捐” [eliminate]】

【原文】户税均宽

问州郡宽恤，近将某县下三等税户秋科余欠钱米，已与蠲放，共钱一千三百五十五贯七百六文，米五千二百七十二石一斗九升；某本县下三等物力计三万七千六百五十八贯五百文。今来官员陈述本县多有乐输无欠之户，今蒙蠲放税尾，似反宽润顽输之户，于理未均。遂议将乐输三等户于明年两税与照昨来体例减免。契勘得三等无欠户物力二十二万八百一十五贯三百二十一文。欲知每百文合减免钱米，及共减各几何。

第 42 题：平均分配绵税

问题：某县缴纳绵税，绵户有五等，共 11033 户；共应缴纳绵税 88337 两 6 钱；上等户 12 户，副等户 87 户，中等户 464 户，次等户 2035 户，下等户 8435 户。要求：上等户，副等户，中等户，依次取前等户的 5 折；中等户，次等户，下等户依次取前等户的 4 折。请问：各等户每户纳税，以及各等户合计纳税数，各是多少。

【编者注：“下二等比中等六四折差”应修改为“下二等四折差”。】

【原文】均科绵税

问县科绵，有五等户，共一万一千三十三户；共科绵八万八千三百三十七两六钱；上等一十二户，副等八十七户，中等四百六十四户，次等二千三十五户，下等八千四百三十五户。欲令上三等折半差，下二等比中等六四折差，科率求之。各户纳及各等几何。

第 43 题：出售田和地的户税移割

问题：据某县农户甲称：甲本来有田和地，原来的纳税合计为：

苗米：35 石 7 斗；

和买：本色 11 匹 2 丈 2 尺 9 寸 4 分 8 厘 7 毫 5 丝，折帛 27 匹 2 寸 1 分 3 厘 7 毫 5 丝；

紬绢：折帛 8 匹 3 丈 9 尺 7 寸 3 分 9 厘，紬绢本色 20 匹 2 丈 8 尺 9 寸 3 分 9 厘；

现在，甲已将田 407 亩出让给乙，516 亩出让给丙，并移割完毕。

甲要求将本户出让田上相应的税赋，移割归并给乙，丙两户缴纳；

已知乙原有田 375 亩，丙原有田 463 亩，并且是与甲为相同的乡，相同的纳税等级：

纳税按每亩为标准收取：苗米：3 升 5 合；

税：1 尺 1 寸 5 分，折合物力：1 贯 200 文；

本等田紬为：1 尺 3 寸 4 分，折合物力：900 文；

物力每 32 贯，征收和买 1 匹：其中，本色占 3 分，折帛占 7 分；

夏税：本色占 7 分，折帛占 3 分；

紬：本色占 5 分，折帛（并绢紬）占 5 分。

请问：甲的田，地，各是多少；及甲，乙，丙分割；合纳：苗米，和买，夏税折帛、本色、畸零，各是多少。

[馆按：此题科税，分田地二项，田有科米、税绢、物力三色；地只有税紬、物力二色；绢与紬，折色不同；物力，和买，合田地总计之；又甲户有田、地者，乙、丙二户有田无地，此等皆不可不明言者，题中殊未分晰。]

【编者注：帛（bó）<名>形声。从巾，白声。甲骨文字形，上面是“白”字，下面是“巾”字。本义：丝织品的总称。

绸（绸 chóu）<名>按：古代汉语“绸”字不当绸缎讲。作丝织品的“绸”本写作“紬”，丝织品的总称[silk]。如：绸衣；绸伞；绸绢（绸与绢。泛指丝织物）。

紬（chóu）形声。从糸，由声。本义：粗绸。

敷（fū）<动>形声。从支(pū)，表示与动作有关。“搏”是“布列”的意思，在字中也具有表意作用。本义：施予；给予[grant; carry out]。本文应该是解作“征收，征召 [levy; collect; call up]”。铺展，铺开 [spread out; unfold]。宣布，公布[make public to]。足，够[be sufficient for]。

端（duān），古代布帛的长度单位。一端有一丈六尺，二丈，六丈之说。

在宋代，四丈为一匹，一端应该等于六丈。现代，通常，一端就指一匹。

宋时的“和买”，大多是官府向民间购买丝麻产品，以保证庞大常备军的军装供应。为此，官府需在丝麻产区置场和买各种产品。宋太宗赵炅到宋真宗赵恒时，经马元方、王旭、李士衡等人创议，开始实行预买，即：**向民间预支和买本钱，而以丝、麻产品随两税（苗米，夏税）纳还官府**。预买推行於河北、京东、京西、淮南、两浙、江南、荆湖、川峡等路，逐渐成为和买的主要形式，故宋人或将预买与和买混称，或合称和预买。大致自宋仁宗赵祜时，各地已用不同方式减克和买本钱。景佑时，和买紬绢一百九十万匹；庆历时，增至三百万匹；和买成为民间沉重的负担。北宋晚期，和买已部分演变为定额税；南宋初期，更完全演变为定额税，官府不再支付和买本钱。和买一般按人户家业钱额、税钱额摊派，某些地区还适当参照户等。如四川自宋神宗赵顼时，规定乡村上三等户摊派和买，四、五等户不敷和买。南康军（今江西星子）每税钱四百三十文，起敷和买一匹。婺州（今浙江金华）某些县人户自三十贯家业钱以上，起敷和买。官户和乡村上户往往采取诡名子户的办法，即将一户分成数户以至数十户，以降低户等，向乡村下户转嫁和买负担。在不少地区，和买额超过夏税额，成为南宋的重赋。

（宋元）马端临《文献通考·田赋考◎畸零》

淳熙六年，临安府守臣吴渊言：“准乾道令：人户纳二税，每贯收朱墨钱二十文足，不成贯者收十五文，不成百者免收。今自九百九十文至一百文例取十五文足，显有不均。乞一百文收二文足，每一百增二文，至七百元省，即收十五文足，委是利民，且不冲改条令。”上曰：“畸零税赋纳钱不及一贯者，皆贫民下户，所当矜恤。”乃从之。

《宋史·志第一百二十八·食货上三（布帛和杂漕运）》：

十一年，臣僚言两浙、江东西四路和买不均之弊，送户部、给舍等官详议。郑丙、丘密议，亩头均科之说至公至平，诏施行之。十六年，知绍兴府王希吕言：“均敷和买，曩者亟于集事，不暇核实，一切以为诡户而科之，于是物力自百文以上皆不免于和买，贫民始不胜其困。乞将创科和买二万五十七匹有奇尽放，则民被实惠矣。于是诏下户和买二万五十匹住催一年，又减元额四万四千匹有奇；均敷一节，令知绍兴府洪迈从长施行。绍熙元年，迈定其法上之，诏依所措置推行，于是绍兴贫民下户稍宽矣。”】

【原文】户税移割

问某县，据甲称：本户田地，原纳苗三十五石七斗，和买本色一十一匹二丈二尺九寸四分八厘七毫五丝，折帛二十七匹二寸一分三厘七毫五丝，绸绢折帛八匹三丈九寸七寸三分九厘，绸绢本色二十四匹二丈八尺九寸三分九厘，已将田四百七亩出与乙，五百十六亩出与丙，乞移割本户所出田上税赋，归并乙丙两户纳税；会到乙原有田三百七十五亩，丙原有田四百六十三亩，并系本乡本等，每亩苗三升五合；税一尺一寸五分；物力一贯二百；本等地绸一尺三寸四分，物力九百；物力三十二贯，敷和买一匹，内三分本色，七分折帛；夏税：七分本色，三分折帛；绸：五分本色，五分折帛。并绢绸，欲知甲田地及甲乙丙分割合纳苗米和买夏税折帛本色畸零各几何。

第 44 题：各县移运粮饷的劳力安排

问题：现今，要安排人力移运各县粮饷，向某郡交纳，合计起用 12000 人；

甲州有三个县：

上县力 573259 贯 500 文，至目的地 925 里；

中县力 504983 贯 780 文，至目的地 652 里；

下县力 498760 贯 950 文，至目的地 465 里；

乙军所属地的县有五个乡：

仁乡力 1028371 贯 980 文，至目的地 706 里；

义乡力 119472 贯 600 文，至目的地 795 里；

礼乡力 108463 贯 50 文，至目的地 790 里；

智乡力 84236 贯 285 文，至目的地 719 里；

信乡力 9345 贯 160 文，至目的地 804 里；

请问：以物力多寡，道里远近，平均运费，劳务等项而论，应该如何分配人数。

【编者注：军，宋代行政区划名，与府、州、监同属于路[prefecture in the Sung dynasty]。一般是军事重镇或军事要冲；“乙军”中的军，应该是领县军，比如说：湖北省汉阳的汉阳军，安徽省寿县的安丰军，广西省桂林的桂林军。】

【原文】移运均劳

问今起夫移运县饷，于某郡交纳，合起一万二千夫：甲州有三县：上县力五十七万三千二百五十九贯五百文，至输所九百二十五里；中县力五十万四千九百八十三贯七百八十文，至输所六百五十二里；下县力四十九万八千七百六十贯九百五十文，至输所四百六十五里；乙军倚郭，一县五乡：仁乡力一百二万八千三百七十一贯九百八十文，至输所七百六里；义乡力一十一万九千四百七十二贯六百文，至输所七百九十五里；礼乡力一十万八千四百六十三贯五十文，至输所七百九十里；智乡力八万四千二百三十六贯二百八十五文，至输所七百十九里；信乡力九千三百四十五贯一百六十文，至输所八百四里；欲知以物力多寡道里远近均运之，令费劳等，各合科夫几何。

第 45 题：劝说农户向政府出售谷物

问题：说服农户向政府卖出谷物：根据申报资料，农户共计 162 户，按照农户的物力，亩步情况，可分作九等：

上等 3 户，第二等 5 户，第三等 7 户，第四等 8 户，第五等 13 户，第六等 21 户，第七等 26 户，第八等 34 户，第九等 45 户。

今先说服第一等上户，愿意卖出谷物 5000 石；第九等户，愿意卖出谷物 200 石。

请问：各等户石数的抛差，各等户合计的认米数，各是多少。

【编者注：“据甲”应该是“据申”。抛差，就是等差数列的公差。】

【原文】均定劝分

问欲劝糶赈济。据甲民户物力亩步排定，共计一百六十二户，作九等：上等三户，第二等五户，第三等七户，第四等八户，第五等十三户，第六等二十一户，第七等二十六户，第八等三十四户，第九等四十五户。今先劝谕第一等上户，愿糶五千石；第九等户，愿糶二百石。欲知各等石数抛差，并总认米数并数各几何。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

钱谷第六

46 折解轻赍，47 算回运费，48 课余贵贱，49 推本求息，50 积仓知数
51 推知余数，52 分定纲解，53 累收库本，54 米谷粒分

第46题：折解轻赍

问：有甲乙丙丁四郡，各合起上供银、绢，元里程，每担里佣钱如次：

甲郡银三千二百两，每两二贯二百文足，十六界旧会；绢六万四千匹，每匹二贯文足，十六界旧会；去京一千里，每担一里，佣钱六文足，十六界旧会；其时十六界旧会每文价为十七界五十四文足；

乙郡银二千七百两，每两二贯三百文足，十五界旧会；绢四万九千二百匹，每匹二贯四百二十文足，十五界旧会；去京九百八十里，每担一里，佣钱四文二分足，十五界旧会；十五界旧会每文价为十七界五十九文足；

丙郡银四千两，每两十八界新会九贯三百文；绢七万三千六百匹，每匹十八界新会一十贯三百文；去京二千里，每担一里，佣钱八十文，十七界旧会；

丁郡银二千六百两，每两五十一贯文，十七界旧会；绢三万二千三十五匹，每匹五十八贯文，十七界旧会；去京一千五里，每担一里，佣钱一百文，十七界旧会；

诸郡银率每五百两，绢率每六十四匹；轻赍银十八界新会每五千贯为担；

其时十七界旧会数为十八界新会数之五倍。

欲并折十八界新会，均作三限起解，求各郡每限，及本色元里折解实用佣钱，宽余佣钱，各十八界新会几何。

答曰：甲郡：

合解，五十万一百四十八贯一百四十八文；

初限，一十六万六千七百一十六贯四十九文；

次限，一十六万六千七百一十六贯四十九文；

末限，一十六万六千七百一十六贯五十文；

佣钱原理，二万三千八百四十五贯九百二十五文二十七分文之二十五；

实用，二千二百二十二贯八百七十七文二十七分文之二十一；

宽余，二万一千六百二十三贯四十八文二十七分文之四；

乙郡：

合解，四十二万四千六百五十七贯六百二十七文；

初限，一十四万一千五百五十二贯五百四十二文；

次限，一十四万一千五百五十二贯五百四十二文；

末限，一十四万一千五百五十二贯五百四十三文；

佣钱原理，一万一千五百一十六贯四百二十八文五十九分文之二十八；

实用，一千一百八十五贯一十文二百九十五分文之五；

宽余，一万三百三十一贯四百一十八文五十九分文之一十八；

丙郡：

合解，七十九万五千二百八十贯文；

初限，二十六万五千九十三贯三百三十三文；

次限，二十六万五千九十三贯三百三十三文；
 末限，二十六万五千九十三贯三百三十四文；
 佣钱原理，三万九千五百九贯三百三十三文三分文之一；
 实用，五千八十九贯七百九十二文；
 宽余，三万四千四百一十九贯五百四十一文三分文之一

丁郡：

合解，三十九万八千一百二十六贯文；
 初限，一十三万二千七百八贯六百六十六文；
 次限，一十三万二千七百八贯六百六十六文；
 末限，一十三万二千七百八贯六百六十八文；

佣钱原理，一万四千一百七十三贯五百文；

实用，二千三百八十八贯七百五十六文；

宽余，一万三千七百八十四贯七百四十四文；

术曰：以均输求之。

置各郡银绢，乘各价，并之，归足原，展足为旧会；

次以五约旧会为新会，各得合解钱；

以限数除之，得每限钱，不尽，并归末限；

次置里数，乘每里佣价为率，以率乘原银，及原绢，各为佣实；

以每担银、绢率，各为法，实如法而一，不满者，亦为担，并之，为原理佣钱；

次以率，乘合解钱，为实；乃以钱物每担率为法，实如法而一，各得实用佣钱；

以减原理佣钱，余为宽余佣钱。合问。

问数图

	甲郡十六界	乙郡十五界	丙郡十七界	丁郡十七界
银	3200 两	2700 两	4000 两	2600 两
每两	2200 文	2300 文	9300 文（新会）	51000 文（旧会）
绢	64000 匹	49200 匹	73600 匹	32035 匹
每匹	2000 文	2420 文	10300 文（新会）	58000 文（旧会）
去京	1000 里	980 里	2000 里	1500 里
每担一里佣钱	6 文	4.2 文	80 文（旧会）	100 文（旧会）
每文	54 文十七界	59 文十七界	5 文十八界	5 文十八界

草曰：置各郡银绢：乘各价，甲郡银 3200 两，乙郡银 2700 两，丙郡银 4000 两，丁郡银 2600 两，于右行；甲郡银两价 2 贯 200 足，乙郡银两价 2 贯 300 足，丙郡银两价 9 贯 300 新会，丁郡银两价 51 贯旧会，于左行；对乘之，甲得 7040 贯足，乙得 6210 贯足，丙得 37200 贯新会，丁得 132600 贯旧会；

	左行	右行	对乘
甲	2200 文	3200 两	7040 贯
乙	2300 文	2700 两	6210 贯
丙	9300 文新会	4000 两	37200 贯新会
丁	51000 文旧会	2600 两	132600 贯旧会

又列置各郡绢：甲 64000 匹，乙 49200 匹，丙 73600 匹，丁 32035 匹，于右行；各郡绢匹价：甲 2 贯足，乙 2 贯 420 足，丙新会 10 贯 300，丁 58 贯旧会，于左行；亦对乘之，甲得 128000 贯足，乙得 119064 贯足，丙得 758080 贯新会，丁得 1858030 贯旧会；

	左行	右行	对乘
甲	2 贯	64000 匹	128000 贯

乙	2贯420	49200匹	119064贯
丙	10贯300	73600匹	758080贯新会
丁	58贯	32035匹	1858030贯旧会

乃并各郡银绢价，甲共135040贯足，乙共125274贯足，丙共795280贯新会，丁共1990630贯旧会；甲以旧会价54文展足钱得2500740贯740文，乙以旧会价59文展足钱得2123288贯136文，丙系新会，丁系旧会；

	银价	绢价	银+绢	
甲	7040	128000	135040贯	$135040000 \div 54 = 2500740.741$ 贯
乙	6210	119064	125274贯	$125274000 \div 59 = 2123288.136$ 贯
丙	37200	758080	795280贯新会	
丁	132600	1858030	1990630贯旧会	

今甲、乙、丁俱以5除之，皆为新会，甲得500148贯148文，乙得424657贯627文，丙得795280贯文，丁得398126贯，各为合解钱；

以限数3除之，甲得166716贯49文，为初限，次限数不尽1文，增入次限数内，共得166716贯50文，为末限数；乙得141552贯542文，为初限，次限数不尽1文，增入，得141552贯543文，为末限数；丙得265093贯333文，为初限，次限数不尽1文，增入，得265093贯334文，为末限数；丁得132708贯666文，为初限，次限数不尽2文，增入，得132708贯668文，为末限数；

	银+绢	$\div 5$ 合解钱	$\div 3$ 每限钱	末限数
甲	2500740.741	500148.1482贯	166716.0494	166716.050贯
乙	2123288.136	424657.6272贯	141552.5424	141552.543贯
丙	795280	795280贯	265093.3333	265093.334贯
丁	1990630	398126贯	132708.6667	132708.668贯

各以里数乘佣钱，各为率；置甲郡1000里，乙郡980里，丙郡2000里，丁郡1500里，于右行；次置甲郡佣钱6文足，乙郡佣钱4文2分足，丙郡佣钱80文旧会，丁郡佣钱100旧会，于左行，与右行对乘之，甲得率6贯足，乙得率4贯116文足，丙得率160贯旧，丁得率150贯旧，于右行；

	左行	右行	率
甲	6文	1000里	6贯
乙	4.2文	980里	4贯116文
丙	80文	2000里	160贯旧
丁	100文	1500里	150贯旧

以率乘原银数，各为佣实；次置甲原银3200两，乙银2700两，丙银4000两，丁银2600两，于左行；与右行对乘之，甲得19200贯，乙得11113贯200文，丙得64万贯旧，丁得39万贯旧，皆银佣，置于右行；

次置甲乙丙丁，每担率银500两为法，遍除左行：甲得38贯400足，乙得22贯226文4分足，丙得1280贯旧，丁得780贯旧，为各郡银佣钱，列寄别行；

	左行	右行	银佣	银佣钱
甲	3200两	6贯	19200贯	38贯400
乙	2700两	4贯116文	11113贯200文	22贯226文4分
丙	4000两	160贯旧	64万贯旧	1280贯旧
丁	2600两	150贯旧	39万贯旧	780贯旧

次置甲原绢64000匹，乙绢49200匹，丙绢73600匹，丁绢32035匹，为左行，与右行

各率对乘之，甲得 384000 贯足，乙得 202507 贯 200 足，丙得 11776000 贯旧，丁得 4805250 贯旧，各为绢佣实；

次以四郡每担绢率 60 匹为法，除之，甲得 6400 贯足，乙得 3375 贯 120 足，丙得 196266 贯 666 文 3 分文之 2 旧，丁得 80087 贯 500 旧，为各郡绢佣钱；

	左行	右行	绢佣实	绢佣钱
甲	64000 匹	6 贯	384000 贯	6400 贯
乙	49200 匹	4 贯 116 文	202507 贯 200	3375 贯 120
丙	73600 匹	160 贯旧	11776000 贯旧	196266 贯 666 文 3 分文之 2 旧
丁	32035 匹	150 贯旧	4805250 贯旧	80087 贯 500 旧

并入，寄别行，甲得 6438 贯 400 足，乙得 3397 贯 346 文 4 分足，丙得 197546 贯 666 文 3 分文之 2 旧，丁得 80867 贯 500 旧，列右行；

	银佣钱	绢佣钱	并入
甲	38 贯 400	6400 贯	6438 贯 400
乙	22 贯 226 文 4 分	3375 贯 120	3397 贯 346 文 4 分
丙	1280 贯旧	196266 贯 666 文 3 分文之 2 旧	197546 贯 666 文 3 分文之 2 旧
丁	780 贯旧	80087 贯 500 旧	80867 贯 500 旧

其甲旧会价 54 文，5 因之，得 270 文足，乙旧会价 59 文，亦 5 因之，得 295 文，丙以 5，丁亦以 5，于左行，以对约右行，皆为新会，甲得 23845 贯 925 文 27 分文之 25，乙得 11516 贯 428 文 59 分文之 28，丙得 39509 贯 333 文 3 分文之 1，丁得 16173 贯 500 文，并新会，系四郡原佣价钱；今欲变右行足钱旧会，皆为新会，故以 5 遍乘甲陌 54，得 270；乙陌 59，得 295；

	左行	右行	对约右行(原理佣钱)
甲	$54 \times 5 = 270$	6438 贯 400	$23845925 + 25/27$ 文
乙	$59 \times 5 = 295$	3397 贯 346 文 4 分	$11516428 + 28/59$ 文
丙	5	197546 贯 666 文 3 分文之 2 旧	$39509333 + 1/3$ 文
丁	5	80867 贯 500 旧	16173500 文

次以原四郡率，对乘四郡合解新会，各为实，其甲率 6 贯足，乘甲合解钱 500148 贯 148 文，得 3000888888 贯，其乙率 4 贯 116 文足，乘乙合解钱 424657 贯 627 文，得 1747890792 贯 732 文足，其丙率 160 贯旧，乘丙合解钱 795280 贯，得 12724480 万贯旧，其丁率 150 贯旧，乘丁合解钱 398126 贯，得 5971890 万贯旧，各为实；乃以每担率 5000 贯为法，而一，甲得 600 贯 177 文足，不尽 3888 贯文；乙得 349 贯 578 文足，不尽 792 贯 732 文；丙得 25448 贯 960 文旧会；丁得 11943 贯 780 文旧会，为各郡实用；

	率	合解新会	实	$\div 5000000$
甲	6000	500148.1482 贯	3000888889.2	600.1777778
乙	4116	424657.6272 贯	1747890794	349.5781587
丙	160000	795280 贯	127244800000	25448.96
丁	150000	398126 贯	59718900000	11943.78

甲以 270 文约，乙以 295 文约，丙、丁皆 5 约，为新会；甲 2222 贯 877 文，不尽 210 文；乙 1185 贯 10 文，不尽 50 文；丙 5089 贯 792 文；丁 2388 贯 756 文；

	实	法	实用佣钱
甲	600.1777778 贯	270	$2222877 + 7/9$ 文
乙	349.5781587 贯	295	$1185010 + 10/59$ 文
丙	25448.96 贯	5	5089792 文

丁	11943.78 贯	5	2388756 文
---	------------	---	-----------

各减原理：甲余 21623 贯 48 文；乙余 10331 贯 418 文；丙余 34419 贯 541 文；丁余 13784 贯 744 文，合问。

	本色原理	实用佣钱	宽余佣钱
甲	23845 贯 $925 + 25/27$ 文	2222 贯 $877 + 7/9$ 文	21623 贯 $48 + 4/27$ 文
乙	11516 贯 $428 + 28/59$ 文	1185 贯 $10 + 10/59$ 文	10331 贯 $418 + 18/59$ 文
丙	39509 贯 $333 + 1/3$ 文	5089 贯 792 文	34419 贯 $541 + 1/3$ 文
丁	16173 贯 500 文	2388 贯 756 文	13784 贯 744 文

《数书九章新释》406 页注释：

【注 1】原术称“不满者亦为担”，与原草图中所述“不满担不计”，稍有出入。

【注 2】原草图中最后有“宽余合并合解，为共解钱”。其中宽余部分的运费并未计算。原文题目确实未提出“求共解钱”的要求，但是，原草图中有，故补充如下：

	合解新会	宽余佣钱	共解钱
甲	500148 贯 $+ 4/27$ 文	21623 贯 $48 + 4/27$ 文	521771 贯 $196 + 4/27$ 文
乙	424657 贯 $+ 37/59$ 文	10331 贯 $418 + 18/59$ 文	434989 贯 $45 + 18/59$ 文
丙	795280 贯	34419 贯 $541 + 1/3$ 文	829699 贯 $541 + 1/3$ 文
丁	398126 贯	13784 贯 744 文	411910 贯 744 文

《文渊阁四库全书·子部·天文算法类·数学九章》原草图中则无此内容。

第 47 题：算回运费

问：有江西和余到米一十二万三千四百石，原系水运镇江交卸，计水程二千一百三十里，每石水脚钱一贯二百文十七界会子；今接令，截上件米就池州安顿；时逢十八界会子行用，且知：十八界会子一贯兑换铜钱二百五十文，十七界会子一贯兑换铜钱五十文；池州至镇江八百八十里；欲收回不该水脚钱几何，合十八界会子几何。

答曰：收回钱，六万一千一百七十八贯五百九十一文。

合十八界会子，一万二千二百三十五贯七百一十八文。

术曰：以粟米，互易求之。

置池州至镇江里数，乘水脚钱，得数，又乘运米为实；

以原至镇江水程为法，除实，得收回钱。

两界会子为五倍数，除之即得。

草曰：置池州至镇江 880 里，乘每石水脚钱 1 贯 200 文，得 1056 贯文；又乘运米 123400 石，得 130310400 贯文为实，以原至镇江水程 2130 里为法，除实得 61178 贯 591 文，为收回十七界会子钱数。

十八界会子一贯兑换铜钱二百五十文，十七界会子一贯兑换铜钱五十文；故十八界会子一贯兑十七界会子五贯；置十七界会子 61178 贯 591 文，以 5 除之，得十八界会子 12235 贯 718 文，合问。

米	123400 石	
每石水脚钱	1200 文	
镇江水程	2130 里	为法
未行水程	880 里	
实		$880 \times 1200 \times 123400 = 130310400000$ 文
收回钱数		$130310400 \div 2130 = 61178591$ 文（十七界会子）
十七界会子	50 文铜钱	
十八界会子	250 文铜钱	$250 \div 50 = 5$ ，倍率，为法
合		$61178591 \div 5 = 12235718$ 文（十八界会子）

第 48 题：课余贵贱

问：差人五路和余。据申：

安吉州石价二十九贯五百文，一百一十合，至镇江水脚钱每石一贯二百文；
浙西平江府石价三十五贯文，一百三十五合，至镇江水脚钱每石九百文；
江西隆兴府石价二十八贯一百文，一百一十五合，至建康水脚钱每石一贯七百元；
湖南潭州石价二十七贯三百文，一百二十合，至鄂州水脚钱每石二贯一百文；
吉州石价二十五贯八百五十文，一百一十八合，至建康水脚钱每石二贯九百文；
其钱，并十七界官会；其米，并用文思院斛交量细数，文思院斛每斗八十三合；
欲皆以官斛计石、钱，相比贵贱几何。

答曰：文思院斛石钱：安吉州二十三贯一百六十四文一十一分文之六；

平江府二十二贯七十一文二十七分文之二十三；

隆兴府二十一贯五百七十七文三分文之一十九；

潭州二十贯六百七十九文五十九分文之三十九；

吉州一十九贯八百八十五文十二分文之五；

术曰：以粟米互换求之。

置石价并水脚乘石数，又乘官斗合数，为实，各如本州合数而一，各得官斛石钱，以课贵贱。

草曰：置安吉州石价 29 贯 500 文，平江石价 35 贯文，隆兴石价 28 贯 100 文，潭州石价 27 贯 300 文，吉州石价 25 贯 850 文，列右行；

次置水脚：安吉 1 贯 200 文，平江 900 文，隆兴 1 贯 700 文，吉州 2 贯 900 文，潭州 2 贯 100 文，列左行，各对本州石价；以两行数并之，得数：安吉 30 贯 700 文，平江 35 贯 900 文，隆兴 29 贯 800 文，潭州 29 贯 400 文，吉州 28 贯 750 文，仍于右行；

	水脚	石价	合计
安吉州	1200	29500	30700
平江府	900	35000	35900
江西隆兴	1700	28100	29800
湖南潭州	2100	27300	29400
江南吉州	2900	25850	28750

次以文思院官斗 83 合遍乘之：安吉州得 2548 贯 100 文，平江府得 2979 贯 700 文，江西隆兴得 2473 贯 400 文，湖南潭州得 2440 贯 200 文，江南吉州得 2386 贯 250 文，各为实；于右得；

次列安吉斗 110 合，平江斗 135 合，隆兴斗 115 合，潭州斗 120 合，吉州斗 118 合，于左行，为法，以对除右行之实，安吉得 23 贯 164 文 11 分之 6；平江得 23 贯 71 文 27 分文之 23；隆兴得 21 贯 507 文 23 分文之 19；潭州得 19 贯 885 文 12 分文之 5；吉州得 20 贯 679 文 59 分文之 39；

相课石价，其安吉州最贵，平江次之，隆兴又次之，吉州又次之，潭州最贱。

	乘 83	斗	余	斗余之等
安吉州	2548100	110	23164	60 10
平江府	2979700	135	22071	115 5
江西隆兴	2473400	115	21507	95 5
湖南潭州	2440200	120	19885	50 10
江南吉州	2386250	118	20679	78 2

第 49 题：推求本息

问：三典库息例：万贯以上，每文息一厘；千贯以上，每文息二厘五毫；百贯以上，每文息三厘。

甲库本：四十九万三千八百贯；

乙库本：三十七万三百贯；

丙库本：二十四万六千八百贯；

今三库一期后，共纳到息钱二万五千六百四十四贯二百文。

其典率：甲反锥差，乙方锥差，丙蒺藜差。

欲知：原典三例，本、息各几何？

馆按：此即衰分题也。其差有：反锥，方锥，蒺藜之名，盖以一、二、三递减如立锥为反锥；以一、四、九平方递加为方锥；以一、三、六三数递加为蒺藜；是必古有其名也。至以各差求各本，则因各本原依各差入之也。

答曰：甲库共纳息九千五十三贯文；

一厘息二千四百六十九贯文；

二厘半息四千一百一十五贯文；

三厘息二千四百六十九贯文；

乙库共纳息一万五十一贯文；

一厘息二百六十四贯五百文；

二厘半息二千六百四十五贯文；

三厘息七千一百四十一贯五百文；

丙库共纳息六千五百四十贯二百文；

一厘息二百四十六贯八百文；

二厘半息一千八百五十一贯文；

三厘息四千四百四十二贯四百文；

术曰：置诸库诸色之差，照厘率为三行，纵并之为约率，横命之为乘率；以约率各约自库之本，各得以遍乘未并乘率，然后各以厘率横乘之，次以纵并之，为各库共息。

草曰：置甲库反锥差，自下置 3, 2, 1 于右行；

次置乙库方锥差，自上置 1, 4, 9 于中行；

次置丙库蒺藜差，自上置 1, 3, 6 于左行；

各为三库上、中、下三等乘率。

乃纵并甲差 3, 2, 1 得 6, 为甲约率；

纵并乙差 1, 4, 9 得 14, 为乙约率；

纵并丙差 1, 3, 6 得 10, 为丙约率；

直命九位数各为上中下乘率。

	甲库反锥差	乙库方锥差	丙库蒺藜差
上乘率	3	1	1
中乘率	2	4	3
下乘率	1	9	6
约率	6	14	10

乃先以约率，各约自库之本：乃以甲约率 6 约甲本 493800 贯得 82300 贯为甲得；

次以乙约率 14 约乙本 370300 贯得 26450 贯为乙得；

次以丙约率 10 约丙本 246800 贯得 24680 贯为丙得；

以各得乘未并乘率：

其甲所得 82300 贯乘反锥乘率 3, 2, 1 得 246900 贯为上率；得 164600 贯为中率；得

82300 贯为下率；

其乙所得 26450 贯以乘方锥差 1,4,9 得 26450 贯为上率；得 105800 贯为中率；得 238050 贯为下率；

其丙所得 24680 贯以乘蒺藜差 1,3,6 得 24680 贯为上率；得 74040 贯为中率；得 148080 贯为下率；

	甲	乙	丙
库之本	493800	370300	246800
约率	6	14	10
所得	82300	26450	24680
上率	246900	26450	24680
中率	164600	105800	74040
下率	82300	238050	148080

然后，各以息厘数乘各库三率[此是变文为库]：

其甲以一厘乘上率 246900 贯得 2469 贯为上息；以二厘五毫乘中率 164600 贯得 4115 贯为中息以三厘乘下率 82300 贯得 2469 贯为下息；并上、中、下三息得 9053 贯文，为甲库共息。

	率		息
上	246900	1 厘	2469 贯
中	164600	2.5 厘	4115 贯
下	82300	3 厘	2469 贯
甲库共息			9053 贯

其乙库以一厘乘上率 26450 贯得 264 贯 500 文为上息；以二厘五毫乘中率 105800 贯得 2645 贯为中息；以三厘乘下率 238050 贯得 7141 贯 500 文为下息；并上、中、下三息得 10051 贯文为乙库共息。

	率		息
上	26450	1 厘	264 贯 500 文
中	105800	2.5 厘	2645 贯
下	238050	3 厘	7141 贯 500 文
乙库共息			10051 贯文

其丙库以一厘乘上率 24680 贯得 246 贯 800 文为上息；以二厘五毫乘中率 74040 贯得 1851 贯为中息；以三厘乘下率 148080 贯得 4442 贯 400 文为下息；并上、中、下三息得 6540 贯 200 文为丙库共息。

	率		息
上	24680	1 厘	246 贯 800 文
中	74040	2.5 厘	1851 贯
下	148080	3 厘	4442 贯 400 文
丙库共息			6540 贯 200 文

并三库共息得 25644 贯 200 文为总息。

第 50 题：积仓知数

问：和余米运，借仓权顿；

计五十廩，每廩阔一丈五尺，深三丈，米高一丈二尺；

又借寺屋四十间：内二十五间：阔一丈二尺，深二丈五尺，米高一丈；

内十五间：各阔一丈三尺，深三丈，米高一丈二尺；

欲知寺屋，及仓，容米共计几何。

答曰：共计米：一十六万六千八十石；

仓五十廩，米一十万八千石；寺屋四十间，米五万八千八十石；

术曰：商功求之。

置廩并屋深，阔，米，高相乘，并之，为实，如斛法而一；

草曰：先以廩深 3 丈通为 30 尺，乘阔 15 尺，得 450 尺；又乘高 12 尺，得 5400 尺；以乘 50 廩，得 270000 尺，为实；以斛法 2 尺 5 寸除之，得 108000 石，为仓 50 廩共容米；

廩深	30 尺	
50 廩共积为实		$30 \times 15 \times 12 \times 50 = 270000$ 尺
斛法	2.5 尺	
50 廩共容米		$270000 \div 2.5 = 108000$ 石

次置寺屋深 25 尺，乘阔 12 尺，得 300 尺，乘米高 10 尺，得 3000 尺；以 25 间乘之，得 75000 尺，于上；

次置深 30 尺，乘阔 13 尺，得 390 尺；又乘米高 12 尺，得 4680 尺，以乘 15 间，得 70200 尺，加上，共得 145200 尺，以斛法 2 尺 5 寸除之，得 58080 石，为寺屋 40 间共容米；

以并廩米，共得 166080 石，为共和余到米。

25 间寺屋共积		$25 \times 12 \times 10 \times 25 = 75000$ 尺
15 间寺屋共积		$30 \times 13 \times 12 \times 15 = 70200$ 尺
40 间屋共积为实		$75000 + 70200 = 145200$ 尺
斛法	2.5 尺	
40 间寺屋共容米		$145200 \div 2.5 = 58080$ 石
共和余到米		$108000 + 58080 = 166080$ 石

第 51 题：推知余数

问：和余米三百万贯。闻每石牙钱三十，余场量米折支牙人所得。每石出牵钱八百，牙人量米四石六斗八合折与牵头。欲知：米石数，米石价，牙钱，牙米，牵钱，各几何？

答曰：余到米一十二万石。

石价，二十五贯文；

牙钱，三千六百贯文；

折米，一百四十四石；

牵钱，一百一十五贯二百文。

术曰：以商功求之，率变入之。置余米，牙钱，牵钱，相乘为实，以牵米为隅，开连枝立方，得石价；以价除本，得余到米；以牙钱乘米，得总牙钱；以价除之，得牙米；以牵钱乘牙米，得共牵钱。

草曰：置余米 300 万贯，乘牙钱 30 文，得 9000 万贯；又乘牵钱 800 文，得 720 亿万贯，为价实。置牵米 4 石 6 斗 8 合，于实数零文之下，为立方从隅。

余米	3000000000 文	
牙钱	30 文	
乘牵钱	800 文	
价实		$3000000000 \times 30 \times 800 = 72000000000000$ 文
立方从隅	4.608	

起步，步法常超二位，每超一度，商进之。

今隅凡超四度，当于实上约定首商 20 贯。

乃以商生隅 4 石 6 斗 8 合，得 92 贯 160 文，乃以为廉。

又以商生廉，得 1843200 贯为方。

乃以方命上商 20 贯，除实讫，实余 3513600 万贯。

复以商生隅 4 石 6 斗 8 合，入廉，得 184 贯 320 文。

又以商生廉，加入方内，得 5529600 贯，为方法。

复以商又生隅 4 石 6 斗 8 合，加入廉，得 276 贯 480 文，为廉法。

其方法一退，廉法二退，从隅三退。

【秦九韶算法解】依题意得到方程： $4.608x^3 = 72 \times 10^{12}$

取 $x = 20000$ ，以 $\{a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{4.608, 0, 0, 72 \times 10^{12}\}$ 进行一变

一变	首商 $x = 20000$
实	$((4.608x + 0)x + 0)x + 72 \times 10^{12} = -35136 \times 10^9$
方	$(4.608x + 0)x + 0 = 18432 \times 10^5$
廉	$4.608x + 0 = 92160$
隅	4.608

一变结束。以 $\{a_3, a_2, a_1\} = \{4.608, 92160, 18432 \times 10^5\}$ 进行二变：

二变	首商 $x = 20000$
实	-35136×10^9

方	$(4.608x + 92160)x + 18432 \times 10^5 = 55296 \times 10^5$
廉	$4.608x + 92160 = 184320$
隅	4.608

二变结束。以 $\{a_3, a_2\} = \{4.608, 184320\}$ 进行三变：

三变	首商 $x = 20000$
实	-35136×10^9
方	55296×10^5
廉	$4.608x + 184320 = 276480$
隅	4.608

三变结束。

乃于首商之次，约实续商 5 贯。

以续商生隅 4 石 6 斗 8 合，入廉，得 299 贯 520 文。

又以续商生廉，入方，得 7027200 贯。

乃命续商 5 贯，除实适尽。

取 $x = 5000$ ，以 $\{a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{4.608, 276480, 55296 \times 10^5, -35136 \times 10^9\}$ 进行一变：

一变	次商 $x = 5000$
实	$((4.608x + 276480)x + 55296 \times 10^5)x - 35136 \times 10^9 = 0$
方	$(4.608x + 276480)x + 55296 \times 10^5 = 70272 \times 10^5$
廉	$4.608x + 276480 = 299520$
隅	4.608

实为 0，故 $x = 25000$ 为所求。

所得 25 贯，为每石米价，以为法。

以余本 300 万贯为实，如法而一，得 12 万石，为余到米数。

以米数乘牙钱 30 得 3600 贯，为总牙钱。

以石价 25 贯除牙钱 3600 贯文，得 144 石，为余场量米折牙钱。

以牵钱 800 文乘牙米 144 石，得 115 贯 200 文，为牵头得牙人所与牵钱之数。

今乃以石价 25 贯文，约牵钱 115 贯 200 文，得 4 石 6 斗 8 合，为牵钱折米，合问。

每石米价	25000 文	为法
余米	3000000000 文	
余到米数		$3000000000 \div 25000 = 120000$ 石
总牙钱		$120000 \times 30 = 3600000$ 文
牙米		$3600000 \div 25000 = 144$ 石
牵钱	800 文	
总牵钱		$800 \times 144 = 115200$ 文
牵钱折米		$115200 \div 25000 = 4.608$ 石

第 52 题：分定纲解

问：州郡合解诸司窠名钱，户部九十六万五千四百二十一贯文，总所六十四万三千六百一十四贯文，运司一万六千九十贯三百五十文。今诸窠名，先催到九千二百五十三贯六百二十文，欲照原额分数，均定桩收候解，合各几何。

答曰：户部，五千四百九十七贯二百文；

总所，三千六百六十四贯八百文；

运司，九十一贯六百二十文。

术曰：以衰分求之。

置诸原率，可约约之，副并为法，以催到钱乘未并者，各为实，实如法而一。

草曰：列户部 965421 贯，总所 643614 贯，运司 16090 贯 350 文，各为原率。

今原率可约，求等，得 16090 贯 350 为等数，俱约之，户部得 60，总所得 40，运司得 1，各为率，副并，得 101 为法；

次置催到钱 9253 贯 620 文，乘未并数 60，40 及 1，毕；得 555217 贯 200 文为户部之实，370144 贯 800 文为总所之实，9253 贯 620 文为运司之实；三实皆如法 101 而一，其户部得 5497 贯 200 文，总所得 3664 贯 800 文，运司得 91 贯 620，各为候解钱。合问。

	户部	总所	运司
原率	965421000	643614000	16090350
约等	60	40	1
×9253620	555217200	370144800	9253620
实如法 101 而一	5497200	3664800	91620

馆按：此法今名“和数比列”，即用合解为率，亦可增一约分，取其数简也。

禁止制作为
商品销售！

第 53 题：累收库本

问：有库本钱五十万贯，一文月息六厘半；今令掌事每月带本纳息，共还一十万，欲知几何月而纳足，并未复畸钱多少。

答曰：本息纳足，共七个月；

末后一月畸钱，二万四千七百六贯二百七十九文三分四厘八毫四丝六忽七微七沙三莽一轻二清五烟。

术曰：以盈朒变法求之。

置原本，以息数退位，乘归本位，每出共纳，累得月数；以末后不及数，为足月钱数。

草曰：置本 500000 贯，以 6 厘 5 毫乘之，入共本内，得 5325000 贯文，内减初月 100000，余 4325000 贯文；

又以 6 厘 5 毫乘之，入余本内，得 460612 贯 500 文，又减次月 100000 贯余 360612 贯 500 文；

又以 6 厘 5 毫乘之，入余本内，得 384052 贯 312 文 5 分；又减第 3 月钱 100000 贯文，余 284052 贯 312 文 5 分；

又以 6 厘 5 毫乘之，入余本内，得 302515 贯 712 文 8 分 1 厘 2 毫 5 丝，内减第 4 月钱 100000 贯，余 202515 贯 712 文 8 分 1 厘 2 毫 5 丝；

又以 6 厘 5 毫乘之，入余本内，得 215679 贯 234 文 1 分 4 厘 5 毫 3 丝 1 忽 2 微 5 尘，内减第 5 月钱 100000 贯，余 115679 贯 234 文 1 分 4 厘 5 毫 3 丝 1 忽 2 微 5 尘；

又以 6 厘 5 毫乘之，入余本内，得 123198 贯 384 文 3 分 6 厘 4 毫 7 丝 5 忽 7 微 8 尘 1 沙 2 渺 5 莽，减第 6 月钱 100000 贯，余 23198 贯 384 文 3 分 6 厘 4 毫 7 丝 5 忽 7 微 8 尘 1 沙 2 渺 5 莽；

又以 6 厘 5 毫乘之，入余本内，得 24706 贯 279 文 3 分 4 厘 8 毫 4 丝 6 忽 7 微 0 尘 7 沙 0 渺 3 莽 1 轻 2 清 5 烟，为第 7 月纳足本息畸钱。

	运算	内减 100000 余
初月	$500000 \times (1 + 0.065) = 5325000$	4325000
第 2 月	$4325000 \times (1 + 0.065) = 460612.5$	360612.5
第 3 月	$360612.5 \times (1 + 0.065) = 384052.3125$	284052.3125
第 4 月	$284052.3125 \times (1 + 0.065)$ $= 302515.7128125$	202515.7128125
第 5 月	$202515.7128125 \times (1 + 0.065)$ $= 215679.2341453125$	115679.2341453125
第 6 月	$115679.2341453125 \times (1 + 0.065)$ $= 123198.3843647578125$	23198.3843647578125
第 7 月	$23198.3843647578125 \times (1 + 0.065)$ $= 24706.2793484670703125$	-75293.7206515329296875

第 54 题：米谷粒分

问：开仓受纳，有甲户米一千五百三十四石到廊，验得米内夹谷，乃于样内取米一捻，数计二百五十四粒内有谷二十八颗；凡米率：每勺三百粒；今欲知米，及内杂谷各多少，共米计米粒几何。

答曰：米：一千三百六十四石八斗九升七合六勺一百二十七分勺之四十八；

谷：一百六十九石一斗二合三勺一百二十七分勺之七十九；

谷合折米：八十四石五斗五升一合一勺一百二十七分勺之一百三；

原米、折米共计：四十三亿四千八百三十四万六千四百五十七粒。

术曰：以粟米求之，衰分入之。

置样米粒数为法，以常谷颗数减之，余与谷为列衰，可约者约之；

以共米乘列衰为各实，实如法而一，各得米数，谷数；

置谷数，以粟率折之，为谷所折米；次以勺率遍乘米数，折米得粒数。

草曰：[求米谷数]置一捻样粒数 254 为法，以带谷 28 颗为谷衰，以减法，余 226 为米衰；此二衰与法皆可约，求等，得 2，俱以约之，法得 127，米衰得 113，谷衰得 14；以共米 1534 石，遍乘二衰，得 173342 石，为米实；得 21476 石，为谷实；皆如法 127 而一，米得 1364 石 8 斗 9 升 7 合 6 勺 127 分勺之 48；谷得 169 石 1 斗 2 合 3 勺 127 分勺之 79；

		约等 2	× 1534	÷ 127
样粒数	254 粒	127		
米衰	226 粒	113	173342	1364.897638
谷衰	28 粒	14	21476	169.1023622
谷米合计				1534 石

[求谷折纳米数]以粟率 50 折之，得 84 石 5 斗 5 升 1 合 1 勺 127 分勺之 103 为谷折纳米数；

[求米粒数] 并二米得 1449 石 4 斗 4 升 8 合 8 勺 127 分勺之 24；先通分纳于 184800 石，以勺率 300 粒乘之，得 55224000 万粒为实，以母 127 除之，得 4348346457 粒，合问。

		勺率 300 粒
原米数	1364.897638 石	
谷折纳米数	$169.1023622 \times 50\% = 84.5511811$ 石	
谷米合计米粒数	1449.448819 石 = 14494488.19 勺	$\times 300 = 4348346457$ 粒

“钱谷第六”现代文翻译

第46题：折算轻赍银

问题：现有甲、乙、丙、丁四个郡，各郡应该上缴的银数，绢数，里程数；银率，绢率，佣钱率，旧会折算率，列表如下：

	甲郡十六界	乙郡十五界	丙郡十七界	丁郡十七界
银	3200 两	2700 两	4000 两	2600 两
每两	2200 文	2300 文	9300 文新会	51000 文
绢	64000 匹	49200 匹	73600 匹	32035 匹
每匹	2000 文	2420 文	10300 文新会	58000 文
去京	1000 里	980 里	2000 里	1500 里
每担里佣钱	6 文	4.2 文	80 文	100 文
每文	54 文十七界	59 文十七界	5 文十八界	5 文十八界

各郡一担的：银率 500 两，绢率 60 匹；轻赍银折算为十八界新会是每担 5000 贯；当时，十五界为十七界的 59 倍，十六界为十七界的 54 倍，十七界为十八界的 5 倍。如果全部折算为十八界新会，平均分作三等份起解。

请问：以新会计算，各郡应缴的数额，分作三份的数额，及各郡按照里程折解的佣钱预算，实际使用的佣钱，剩余的佣钱，各是多少。

【编者注：赍（賫、繼 jī）<动>：拿东西给人，送给[give]；携带，持[bring; hold]；

轻赍：应该是指“轻赍银”。参考资料：浙江五十两阴刻字银锭，极为罕见，上刻字云：“绍兴府萧山县 万历十五年分 三六轻赍银五十两 万历十六年三月知县刘会史臣杜邦 银匠吴正”；介绍说：“轻赍银是百姓在缴纳漕米时，须按比例加缴耗米的那部分折银。所谓三六轻赍是指在江西、湖广、浙江等地征收正米一石需加耗米六斗六升，又加尖米一斗，共七斗六升，以四斗随船作耗，余下三斗六折银，称三六轻赍。”虽然这是明朝的实物，依然可以参考。

折解：地方政府将钱、粮等物解送上级政府。

“本色元里”应该是原里程数；

馆按：此题贯数分三项，其一足数，每千文为一贯，其一旧会数，如甲以五十四文为一贯，乙以五十九文为一贯是也。其一新会数为旧会数之五倍，如甲以二百七十文为一贯，乙以二百九十五文为一贯是也。四郡或言足数，或言旧会数，新会数，并折新会数，佣钱原以银五百两，或绢六十匹，各为一担，今皆折新会数，以五千贯为一担，故有宽余钱数。题语多未详，而并为一担句尤混，略为分析，而术草之意大概可见矣。

计算公式：

合解新会数 = (银数 × 银单价 + 数绢 × 绢单价) ÷ 新会汇率；

本色元里佣钱 = 佣钱单价 × 元里 × (银/银率 + 绢/绢率)；

实用佣钱 = 合解新会数 × 担里佣钱 × 元里 ÷ 轻赍率；

宽余佣钱 = 本色元里佣钱 - 实用佣钱；】

【原文】折解轻赍

问有甲乙丙丁四郡，各合起上供银绢。甲郡银三千二百两，每两二贯二百文足；绢六万四千匹，每匹二贯文足；去京一千里，每担一里，佣钱六文足；其时旧会，每贯五十四文足；乙郡银二千七百两，每两二贯三百文足；绢四万九千二百匹，每匹二贯四百二十文足；去京九百八十里，每担一里，佣钱四文二分足；旧会价，五十九文足；丙郡银四千两，每两新会九贯三百文；绢七万三千六百匹，每匹新会一十贯三百文；去京二千里，每担一里，佣钱八十文，旧会；丁郡银二千六百两，每两五十一贯文，旧会；绢三万二千三十五匹，每匹五十

八贯文，旧会；去京一千五百里，每担一里，佣钱一百文，旧会；诸郡银每五百两，绢每六十匹，新会每五千贯为担；其时旧会数为新会数之五倍。欲并折新会，均作三限起解，求各郡每限及本色元里折解实用佣钱宽余佣钱各新会几何。

第 47 题：计算应收回的运费

问题：在江西和采到米 123400 石，原来是要走水路运到镇江，合计水运路程 2130 里，每石的运费是十七界会子 1 贯 200 文；如今接到命令，要求将这些米运到池州；当时正好十八界会子行用，并且：十八界会子 1 贯兑换铜钱 250 文，十七界会子 1 贯兑换铜钱 50 文；池州至镇江 880 里；请问：应收回的运费是多少，折合十八界会子是多少。

【编者注：镇江：今江苏省镇江市；池州：今安徽省池州市；本题我作了部分修改。】

【原文】算回运费

问有江西水运米一十二万三千四百石，元系至镇江交卸，计水程二千一百三十里，每石水脚钱一贯二百文，十七界会子；今截上件米就池州安顿；池州至镇江八百八十里；欲收回不该水脚钱几何。

第 48 题：比较各地方采米的贵贱

问题：派遣 5 路人马到五路（相当于现在的省）去和采。根据下级部门的呈报：
两浙西路安吉州：石价 29 贯 500 文，110 合，至两浙西路镇江水脚钱每石 1 贯 200 文；
两浙西路平江府：石价 35 贯文，135 合，至两浙西路镇江水脚钱每石 900 文；
江南西路隆兴府：石价 28 贯 100 文，115 合，至江南东路建康水脚钱每石 1 贯 700 文；
荆湖南路潭州：石价 27 贯 300 文，120 合，至荆湖北路鄂州水脚钱每石 2 贯 100 文；
江南西路吉州：石价 25 贯 850 文，118 合，至江南东路建康水脚钱每石 2 贯 900 文；
其中，钱，按十七界会子官方汇率计算；米，用文思院官方斛计量细数；文思院官方斛是每斗 83 合；

如果全部以官斛计算石数，钱数，请问：这五个地方的米哪个贵，哪个便宜。

【编者注：

“据甲”不知所云，应该是“据悉”或者“据申”。根据题意，选择“据申（申报）”。

安吉州：今浙江省湖州市，宋宝庆元年（1225 年）改称为安吉州；

浙西平江府：今浙江省苏州市；江西隆兴府：今江西省南昌市；

湖南潭州：今湖南省长沙市；吉州：今江西省吉安市；

浙西路镇江：今江苏省镇江市；建康：今江苏省南京市；鄂州：今湖北省武汉市；

原文题目中各地方的顺序，与草曰中各地方的顺序不一致，我调整了题目中的顺序。】

【原文】课采贵贱

问差人五路和采。据甲浙西平江府石价三十五贯文，一百三十五合，至镇江水脚钱每石九百文；安吉州石价二十九贯五百文，一百一十合，至镇江水脚钱每石一贯二百文；江西隆兴府石价二十八贯一百文，一百一十五合，至建康水脚钱每石一贯七百元；吉州石价二十五贯八百五十文，一百一十八合，至建康水脚钱每石二贯九百元；湖广潭州石价二十七贯三百文，一百二十合，至鄂州水脚钱每石二贯一百文；其钱并十七界官会；其米，并用文思院斛，交量细数；欲皆以官斛计石钱，相比贵贱几何[文思院解每斗八十三合]。

第 49 题：推求典库本息

问题：甲、乙、丙三间当铺的利息按照三个计息区间分为：

万贯以上，每文息 1 厘；千贯以上，每文息 2 厘 5 毫；百贯以上，每文息 3 厘。

甲库本：493800 贯；乙库本：370300 贯；丙库本：246800 贯；

如今，三间当铺在期满之后得到的利息共为：2564 贯 200 文。

三间当铺各自的出典率是：甲为反锥差 3:2:1，乙为方锥差 1:4:9，丙为蒺藜差 1:3:6。

请问：三间当铺，按照各自的典率获得的利息，总息，各是多少。

【编者注：原文未对三库命名，这里加入“甲、乙、丙”名称；利息是以每文计息的，这里加入“每文息”的说明。

原文之库为何库？据“其典率”知，应该是典库。典率，也就是按照三个计息区间支出的典本的比率。

此外，本越多息越薄，似乎也只有典库才会这么干，以吸引高品质的典质物，或是以大宗商品作为典质物，比如说，宋朝就很流行的“谷典”（“积仓知数”即与此相关）。

根据“推求典本”的做法，这里的利率应该是月息。但是，题目的意思应该是计算一个计息时间段内获得的利息，就无需强调是月息还是年息了，这也符合典库对时效性的规定。故当修改为“今三库一期后”。】

【原文】推求本息

问三库利息例：万贯以上，一厘；千贯以上，二厘五毫；百贯以上，三厘。甲库本四十九万三千八百贯；乙库本三十七万三百贯；丙库本二十四万六千八百贯；今三库共纳到息钱二万五千六百四十四贯二百文。其典率：甲反锥差，乙方锥差，丙彘藜差。欲知原典三例本、息各几何？

第 50 题：借用仓库存储粮食

问题：和余到米，临时借用仓库存储，仓库合计 50 廩，每廩宽 1 丈 5 尺，深 3 丈，米高 1 丈 2 尺；又借寺屋 40 间：其中 25 五间：宽 1 丈 2 尺，深 2 丈 5 尺，米高 1 丈；另外 15 间：各宽 1 丈 3 尺，深 3 丈，米高 1 丈 2 尺；请问：寺屋，及仓库，各自的容米数量，合计的容米数量，各是多少。

【原文】积仓知数

问：和余米运，借仓权顿；计五十廩，每廩阔一丈五尺，深三丈，米高一丈二尺；又借寺屋四十间：内二十五间：阔一丈二尺，深二丈五尺，米高一丈；内一十五间：各阔一丈三尺，深三丈，米高一丈二尺；欲知寺屋，及仓，容米共计几何。

第 51 题：推出余米数量

问题：和余到米，花费 300 万贯。其中：每石米的牙钱为 30，在余场折算为米给牙人；每石米的牵钱为 800，由牙人折合成米 4 石 6 斗 8 合给牵头。请问：米数是多少石，每石米的价格是多少，以及：牙钱，牙米，牵钱，各是多少。

【编者注：计算公式： $4.608 = (300 \text{ 万贯} \div \text{石价}) \times (30 \div \text{石价}) \times (800 \div \text{石价})$ ；

牙人，牙钱，牙米：牙人就是经纪人，牙钱是经纪人的提成，折合成米数就是牙米；

牵头，牵钱：牵头是运输承包商，牵钱是运输费；】

【原文】推知余数

问和余三百万贯，求米石数。闻每石牙钱三十，余场量米折支牙人所得。每石出牵钱八百，牙人量米四石六斗八合折与牵头。欲知米数石价牙钱牙米牵钱各几何？

第 52 题：平均分配上缴税款

问题：某州郡应该向上级部门缴纳的欠缴纳税款为：户部，965421 贯文；总所 643614 贯文；运司 16090 贯 350 文。如今，各种欠缴纳税款中，该州郡只催缴到 9253 贯 620 文；请问：按照原来的应缴分额数平均分配，应向各上级部门分别缴纳多少欠缴纳税款。

【编者注：窠 (kē) 〈名〉本义：筑在地洞里的鸟窝 [bird's nest in cave]；这里应该是：空缺 [vacancy]。如：窠阙(空缺，特指官吏职位空缺)；

所谓“窠名钱”，应该是指“未能回笼的纳税款”；《秦九韶与数书九章》460 页理解为“某项目的税收”，似乎是一种新的纳税，应该不合理。

户部，朝廷分掌户口、财政的中央级官署；总所，应该是总领所；运司，不知是转运司（车运），还是发运司（漕运）。总所和运司，都是宋朝完成中央政府征调财赋工作的路（相当于现在的省）级部门。

桩 (Zhuāng), 椿; 椿, 榷也。——《说文新附》;

储物备用的内库 [storage]。宋代有“封桩库”。

本题显示: 南宋政府苛捐杂税太多, 太重, 老百姓拖欠的纳税款数额巨大, 难以收纳。】

【原文】分定纲解 (均定合解)

问州郡合解诸司窠名钱, 户部九十六万五千四百二十一贯文, 总所六十四万三千六百一十四贯文, 运司一万六千九十贯三百五十文。今诸窠名, 先催到九千二百五十三贯六百二十文, 欲照原额分数, 均定桩收侯解, 合各几何。

第 53 题: 连本带利收回本钱

问题: 酒肆的有本钱 50 万贯, 每文月息 6.5 厘; 要求掌事连本带息, 每月共还 10 万贯; 请问: 几个月可以还完, 最后一个月还钱是多少。

【编者注: 此“库”作“酒肆”理解。

计息公式: 余本息 = 本息 $\times (1 + 0.065)^n - 10$ 万贯】

【原文】累收库本

问有库本钱五十万贯, 月息六厘半, 令今掌事每月带本纳息, 共还一十万。欲知几何月而纳足, 并未后畸钱多少?

第 54 题: 抽样检查米、谷的数目

问题: 开仓接纳农户纳粮, 甲户有米 1534 石到了走廊, 经检验, 发现米内夹杂稻谷, 从中取一捻米为检测样本, 合计 254 粒内有稻谷 28 颗; 已知的米率是: 每勺 300 粒; 请问: 米, 谷, 各是多少, 谷米合计为米粒数是多少。

【编者注: 此为抽样检查问题。

捻 (niǎn), 本义: 用手指搓转。一般是形容小或纤细。

秦九韶所谓的“取米一捻”, 是指: 将五指并拢, 窝起, 米放在手掌心内, 平齐即可, 将米一粒一粒赶向四指处, 以计算米粒数目。】

【原文】米谷粒分

问开仓受纳, 有甲户米一千五百三十四石到廊, 验得米内夹谷, 乃于样内取米一捻, 数计二百五十四粒, 内有谷二十八颗; 凡粒米率, 每勺三百; 今欲知米内杂谷多少, 以折米数科责及粒, 各几何。

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

营建第七

55 计定城筑，56 楼榭功料，57 计造石坝，58 计浚河渠，59 计作清台
60 堂皇程筑，61 砌砖计积，62 囤积量容，63 古池推元

第 55 题：计定城筑

问：淮南东路一郡，筑一方城，围长一千五百一十丈；城外脚下，去城二丈，环城筑羊马墙；羊马墙外，环城开濠取土，以为城墙、羊马墙之坯；为使计算简单易行，仍视羊马墙围长为二千五百一十丈；

城墙：身高三丈，面阔三丈，下阔七丈五尺；仅外立面用砖包砌；

羊马墙：身高一丈，面阔五尺，下阔一丈；仅外立面用砖包砌；

开濠：面阔三十丈，下阔二十五丈；

女头墙用砖砌，由鹊台，座子，肩子，帽子构成，帽子上开箭窗三眼；共高五尺五寸，共阔三尺六寸；女头墙每长一丈，其鹊台：长一丈，高五寸，阔五尺四寸；其座子：长一丈，高二尺二寸五分，阔三尺六寸；其肩子：高一尺二寸五分，阔三尺六寸，长八尺四寸；其帽子：高一尺五寸，阔三尺六寸，长六尺六寸；箭窗：各阔六寸，长七寸五分，外眼比内眼斜低三寸；

取土：用穿四竖三为率；

石版每片：长五尺，阔二尺，厚五寸；砖每片：长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分；

周回石版铺城脚三层，为基，入地一尺五寸；

以基起，城墙身分三层，每层高一丈：下层一丈，进伸砖九幅；中层一丈，进伸砖七幅；上层一丈，进伸砖五幅；每幅之阔，为砖之阔数；

城墙下脚，用砖加砌护峻墙，长与城同；护峻墙：高三尺，下脚高一尺五寸，进伸铺砖三幅；余高一尺五寸，进伸铺砖二幅；每幅之阔，为砖之长数；

每长一丈，用木料、物料：

永定柱：二十条，长三丈五尺，径一尺；每条：栽埋工七分，串凿工三分；

爬头拽后木：共八十条，长二丈，径七寸；每条：作工三分，串凿工二分；

转子木：二百条，长一丈，径三寸；每条：作工二分，搬扛工二分；

红檑木：二千个，每个长一尺，方一寸；每个：工七毫；

红索：二千条，长一丈，径五分；每条：工九毫；

石版：一十片，匠一工，搬一工；每片：灰一十斤；

搬灰：千斤，用一工；

砖匠：每工砌七百片；

石灰：每砖一斤；

芦蓆：一百五十领；

青茅：五百束；

丝竿篁竹：五十条；

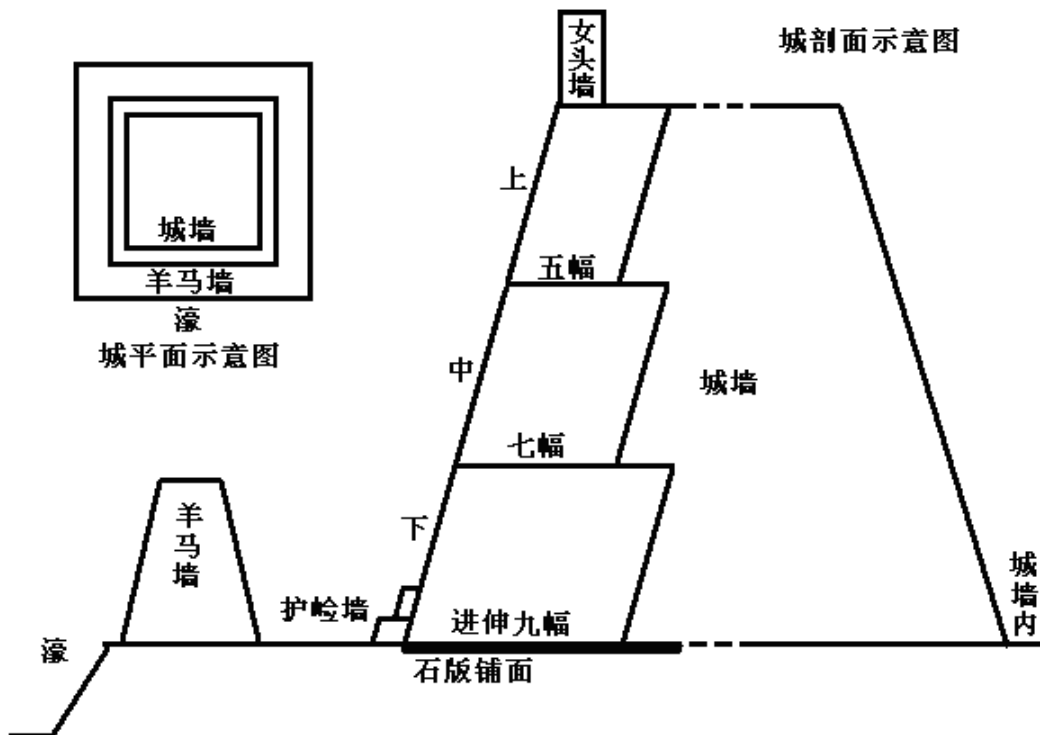
笥子水竹：一十把，每把二尺围；

镢手，锹手，担土，杵手，每工：各六十尺；

火头，一名，受六十工；

部押濠寨，一名，管一百二十工；
 每工日支：新会，一百文，米，二升五合；
 欲知：城墙竖积，羊马墙积，濠积，濠深，共用木，竹，橛，索，砖，石，灰，芦，茅，人工钱，米数，各几何。

答曰：城墙竖积，二千三百七十八万二千五百尺，竖积；
 羊马墙积，一百一十三万二千五百尺，竖积；
 濠积，三千三百二十二万尺，穿积；
 濠深，八尺；
 永定柱，三万二百条；
 爬头拽后木，一十二万八百条；
 转子木，三十万二千条；
 红橛子木，三百二万个；
 红索，三百二万条；
 芦蓆，二十二万六千五百领；
 丝竿笔竹，七万五千五百竿；
 笏子水竹，一万五千一百把；
 青茅，七十五万五千束；
 城砖，一千二百八十万六千三百一十片；
 石版，一万五千一百片；
 石灰，一千二百九十五万七千三百一十斤；
 总用工，二百万三千七百七十工；
 总支钱，新会二十万三百七十七贯文；
 总支米，五万九十四石二斗五升；



术曰：以商工求之。

置城及墙上、下广，各并之，乘高，进位，半之，各得每丈积率，并之，为共率；
 先以每工尺除之，又以诸色工各数乘之，为土工丈率；
 次置柱、木、椽、索，乘其每条段工，得各共工；
 次置城方一丈，自之，乘用砖总幅数，为实，以砖长乘厚，为侧法，除实，得城身用砖；
 次置鹊台座子、肩子、防子、各高、阔、长相乘，为寄，并之于上，次以箭窗眼高低差寸，以乘眼数，求斜深，虚积，减寄，余为女头墙砖实；以侧法乘砖阔，为砖积法；除之，得女头墙鹊台用砖；

又置护险墙高，以丈乘而半之，又乘上下幅共数，为实，以砖阔、厚相乘为法，除之，得护险墙用砖，并三项用砖，为都实；

以每工片为法，除之，得砖匠工；

以每丈用石段数，求石匠工；

以搬每丈石，求搬石工；

以片用灰数，乘都砖，得砖用灰；

以每丈石版数，乘片用灰，得石用灰；并之，为砖石共灰；

以每工搬灰数除之，得搬灰工；

并诸作为实，以火头濠寨每管人数，各为法，除之，得各数；

又并之，为都工，然后以城围通长，遍乘诸项每丈率，积灰，各工料，得共数，女头墙围。

章曰：[求土积]置城上广3丈，并城下广7丈5尺，得10丈5尺，乘高3丈，得3150尺，进位[馆按：即十尺乘之]，得31500尺，半之，得15750尺，为每丈城积率；

次置羊马墙阔5尺，并羊马墙下阔1丈，得15尺，乘羊马墙高1丈，得150尺，进位，得1500尺，以半之，得750尺，为羊马墙每丈积率；

丈，尺，寸，分，厘，毫，丝，忽，绸，尘，沙；十进制；		
城上广	30尺	
城下广	75尺	尺
城高	30尺	尺
每丈	10尺	
城每丈积率		$(30+75) \times 30 \times 10 \div 2 = 15750$ 尺
羊马墙阔	5尺	
羊马墙下阔	10尺	
羊马墙高	10尺	
羊马墙每丈积率		$(5+10) \times 10 \times 10 \div 2 = 750$ 尺

置城墙长1510丈，乘城率15750尺，得237825000尺，为城墙竖积；又以城墙长乘羊马墙率750尺，得113250000尺，为羊马墙竖积；

并羊马墙，城墙二积，得249150000尺；又以墟率4因之，得996600000尺，为濠实；以竖率3，约得332200000尺，为濠积，以为实；以濠阔30丈，并下阔25丈，得55丈，以半之，得275尺，乘1丈，又乘濠长1510丈，得415250000尺，为濠法；除实，得8尺，为濠深；

城墙长	15100尺	
城每丈积率	15750尺	
城墙竖积		$15100 \times 15750 = 237825000$ 尺
羊马墙长	15100尺	
羊马墙每丈积率	750尺	
羊马墙竖积		$15100 \times 750 = 11325000$ 尺

墟率	4	
濠实		$4 \times (237825000 + 11325000) = 996600000$ 尺
坚率	3	
濠积		$996600000 \div 3 = 332200000$ 尺，实
濠阔	300 尺	
濠下阔	250 尺	
濠长	15100 尺	
濠法		$15100 \times 10 \times (300 + 250) \div 2 = 41525000$ 尺
濠深		$332200000 \div 41525000 = 8$ 尺

[求土积各用工]并城墙二率，得 16500 尺，为共率，以为实；

以斨手，锹手，担工，杵手，各 60 尺，为法，除实，得 275 工，以 4 色因之，得 1100 工，为斨手，锹手，担土，杵手之共工；

城每丈积率	15750 尺	
羊马墙每丈积率	750 尺	
实		$15750 + 750 = 16500$ 尺，为共率
斨手	60 尺	$16500 \div 60 = 275$ 工
锹手	60 尺	$16500 \div 60 = 275$ 工
担土	60 尺	$16500 \div 60 = 275$ 工
杵手	60 尺	$16500 \div 60 = 275$ 工
斨锹担杵共工		$275 \times 4 = 1100$ 工

置永定柱 20 条，乘每条栽埋工 7 分，得 14 工；又乘永定柱串凿工 3 分，得 6 工，计 20 工，为永定柱工；

置爬头拽后木 80 条，乘爬头拽后木作工 3 分，得 24 工；又乘爬头拽后木串凿工 2 分，得 16 工，计 40 工，为爬头拽后木工；

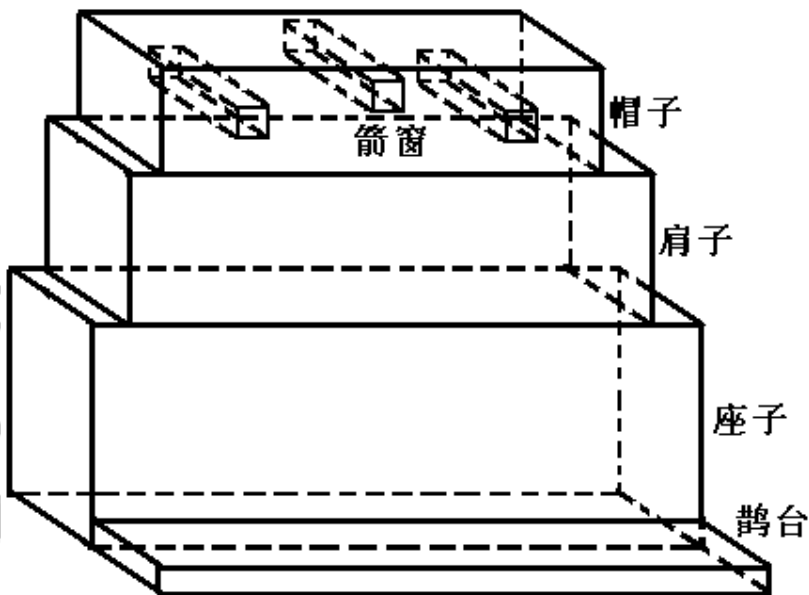
置转子木 200 条，乘转子木作工 2 分，得 40 工；又乘转子木搬扛工 2 分，得 40 工，计 80 工，为转子木工；

置经檄木 2000 个，乘经檄木作工 7 毫，得 14 工；经索 2000 条，乘经索作工 9 毫，得 18 工，计 32 工，为经檄木、经索共工；

丈，尺，寸，分，厘，毫，丝，忽，绸，尘，沙；十进制；		
永定柱	20 条	
每条栽埋工	7 分	$20 \times 7 \div 10 = 14$ 工
每柱串凿工	3 分	$20 \times 3 \div 10 = 6$ 工
永定柱共工		$14 + 6 = 20$ 工
爬头拽后木	80 条	
爬头拽后木作工	3 分	$80 \times 3 \div 10 = 24$ 工
爬头拽后木串凿工	2 分	$80 \times 2 \div 10 = 16$ 工
爬头拽后木共工		$24 + 16 = 40$ 工
转子木	200 条	
转子木作工	2 分	$200 \times 2 \div 10 = 40$ 工
转子木搬扛工	2 分	$200 \times 2 \div 10 = 40$ 工
转子木共工		$40 + 40 = 80$ 工
经檄木	2000 个	
经檄木作工	7 毫	$2000 \times 7 \div 1000 = 14$ 工

纆索	2000 条	
纆索作工	9 毫	$2000 \times 9 \div 1000 = 18$ 工
纆橛木、纆索共工		$14 + 18 = 32$ 工

[求砖积]



乃以城墙女头墙砖积，求砖匠工：置城身方1丈，自乘，得100尺，于上；次置下9幅，中7幅，上5幅，并之，得21幅，乘上，得2100尺，为实；以砖长12寸，乘厚2寸5分，得30寸，为砖侧法[馆按：则法即砖立长面数，盖论幅数，则不用求积也]，除实，得7000片，为城身砖数；

城身(方)	10 尺	$10^2 = 100$ 尺，上
实		$(9 + 7 + 5) \times 100 = 2100$ 尺
砖长	1.2 尺	
砖厚	0.25 尺	
砖侧法		$1.2 \times 0.25 = 0.3$ 尺
城身砖数		$2100 \div 0.3 = 7000$ 片

又置鹊台高5寸，乘阔5尺4寸，得270寸；又乘长1丈，得27000寸，寄上；又置座子高2尺2寸5分，乘阔3尺6寸，得810寸；又乘长1丈，得81000寸，加寄；又置肩子高1尺2寸5分，乘阔3尺6寸，得450寸；又乘长8尺4寸，得37800寸；又加寄；

又置帽子高1尺5寸，乘阔3尺6寸；又乘长6尺6寸，得35640寸；又加寄；共得181440寸，共为寄；

鹊台高	0.5 尺	
鹊台阔	5.4 尺	
鹊台长	10 尺	$0.5 \times 5.4 \times 10 = 27$ 尺
座子高	2.25 尺	
座子阔	3.6 尺	
座子长	10 尺	$2.25 \times 3.6 \times 10 = 81$ 尺
肩子高	1.25 尺	
肩子阔	3.6 尺	

肩子长	8.4 尺	$1.25 \times 3.6 \times 8.4 = 37.8$ 尺
帽子高	1.5 尺	
帽子阔	3.6 尺	
帽子长	6.6 尺	$1.5 \times 3.6 \times 6.6 = 35.64$ 尺
寄		$27 + 81 + 37.8 + 35.64 = 181.44$ 尺

其箭窗，虽外眼比内眼斜低 3 寸，于斜深虚积，将盈补亏，与直深等；

以窗阔 6 寸，乘长 7 寸 5 分，得 45 寸；又乘座子阔 3 尺 6 寸，得 1620 寸；以 3 眼乘之，得 4860 寸，为窗虚积；以减寄，余 176580 寸，为实；

置砖侧法 3 寸，乘砖阔 6 寸，得 18 寸，为砖积侧法；除实，得 981 片，为女头墙鹊台共砖；

箭窗	3 眼	
箭窗阔	0.6 尺	
箭窗长	0.75 尺	
座子阔	3.6 尺	
窗虚积		$0.6 \times 0.75 \times 3.6 \times 3 = 4.86$ 尺
实		$181.44 - 4.86 = 176.58$ 尺
砖侧法	0.3 尺	
砖阔	0.6 尺	
砖积侧法		$0.3 \times 0.6 = 0.18$ 尺
女头墙鹊台共砖		$176.58 \div 0.18 = 981$ 片

又置护险墙下脚高 1 尺 5 寸，铺砖 3 幅，乘得 45 寸；上脚高 1 尺 5 寸，铺砖 2 幅，乘得 30 寸；合，得 75 寸；又乘每丈，得 750 寸，为实；次以砖厚 2 寸 5 分，乘阔 6 寸，得 15 寸，为砖平法，除实，得 500 片，为护险墙砖；

每丈	10 尺	
护险墙高	3 尺	
下脚高 1 尺 5 寸	3 幅	$3 \times 1.5 = 4.5$ 尺
上脚高 1 尺 5 寸	2 幅	$2 \times 1.5 = 3$ 尺
实		$(4.5 + 3) \times 10 = 75$ 尺
砖厚	0.25 尺	
砖阔	0.6 尺	
砖平法		$0.25 \times 0.6 = 0.15$ 尺
护险墙砖		$75 \div 0.15 = 500$ 片

[求各砌砖用料，用工]

次并三项砖，得 8481 片，为每丈用砖都实；以砖匠每工砌 700 片为法，除实，得 12 工 700 分工之 81，为砖工；

每丈用石版 10 片，计 1 工；搬石 10 片，计 1 工；砖每片用灰 1 斤，乘每丈用砖都实，得 8481 斤，即每丈砖用灰之数；又置每丈用石版 10 片，每片用灰 10 斤，相乘之，得 100 斤，为每丈石版用灰；并砖用灰 8481 斤，得 8581 斤，为每丈砖、石用灰数，为实；以每工搬 1000 斤，为法，除之，得 8 工 1000 分工之 581，为搬灰工；

城身砖数	7000 片	
女头墙鹊台共砖	981 片	
护险墙砖	500 片	
每丈用砖都实		$7000 + 981 + 500 = 8481$ 片

砖匠每工砌	700 片	为法
每丈砖工		$8481 \div 700 = 12 + 81/700$ 工
石版长	5 尺	
石版阔	2 尺	
每丈用石版	计 1 工	$(10 \times 10) \div (5 \times 2) = 10$ 片
搬石 10 片	计 1 工	
砖每片用灰	1 斤	
每丈砖用灰		$8481 \times 1 = 8481$ 斤
每片石版用灰	10 斤	
每丈石版用灰		$10 \times 10 = 100$ 斤
每丈砖、石用灰		$8481 + 100 = 8581$ 斤，实
每工搬灰	1000 斤	
每丈搬灰工		$8581 \div 1000 = 8 + 581/1000$ 工

前列：土共工 1100 工，定柱共工 20 工，爬头拽后木共工 40 工，转子木共工 80 工，经概木、经索共工 32 工，砖工 12 工 700 分工之 81，搬灰 8 工 1000 分工之 581，石匠、搬石共 2 工；通并诸作工，余不同者，合分术入之，共得 1294 工 7000 分工之 4877；通分内子，得 9062877，为众工实；

每丈搬灰担杵共工	1100 工	
每丈永定柱共工	20 工	
每丈爬头拽后木共工	40 工	
每丈转子木共工	80 工	
每丈经概木、经索共工	32 工	
每丈砖工	$12 + 81/700$ 工	
每丈搬灰工	$8 + 581/1000$ 工	
每丈石匠、搬石	2 工	
每丈众工		$1294 + 4877/7000$ 工 = $9062877/7000$ 工

置火头每管 60 工，每丈众工分母 7000 乘之，得 42 万，为法；除都工实 9062877，得火头 21 工 42 万分工之 242877；濠寨每部 120 工，就倍火头法 42 万为 84 万，亦除众工实，得濠寨 10 工 84 万分工之 662877；

列两余分，及前诸作工余 7000 分之 4877 三项，以合分术入之，得 2 工，不尽 84 万分之 46371，在半以下，弃之，共定得 1327 工，为每丈都工；

每丈众工实	9062877	
每丈众工母	7000	
火头每管	60 工	
法		$60 \times 7000 = 420000$
每丈火头管工		$9062877 \div 420000$ $= 21 + 242877/420000 = 21 + 80959/140000$ 工
部押濠寨每管	120 工	
每丈部押管工		$9062877 \div (2 \times 420000)$ $= 10 + 662877/840000 = 10 + 220959/280000$ 工
每丈众工		$1294 + 4877/7000$ 工
每丈共用工		$(1294 + 4877/7000) + (21 + 80959/140000) + (10 + 220959/280000)$ $= 1327 + 46371/840000 = 1327 + 17957/280000$

每丈都工	1327 工	
------	--------	--

[求各工用料，用工]

求：如术，以城通长，遍乘：永定柱，爬头拽后木，捩子木，橛子木，纆索，芦蓆，篁竹，水竹，青茅，城砖，石版，石灰，丈率工，各得；

以共工乘日支钱、米，得共钱，共米，更不立草。

城墙，护险墙长	1510 丈	
永定柱	每丈 20 条	$1510 \times 20 = 30200$ 条
爬头拽后木	每丈 80 条	$1510 \times 80 = 120800$ 条
捩子木	每丈 200 条	$1510 \times 200 = 302000$ 条
纆索	每丈 2000 个	$1510 \times 2000 = 3020000$ 个
纆索	每丈 2000 条	$1510 \times 2000 = 3020000$ 条
芦蓆	每丈 150 领	$1510 \times 150 = 226500$ 领
丝竿笙竹	每丈 50 条	$1510 \times 50 = 75500$ 条
箴子水竹	每丈 10 把	$1510 \times 10 = 15100$ 把
青茅	每丈 500 束	$1510 \times 500 = 755000$ 束
城砖	每丈 8481 片	$1510 \times 8481 = 12806310$ 片
石版	每丈 10 片	$1510 \times 10 = 15100$ 片
石灰	每丈 8581 斤	$1510 \times 8581 = 12957310$ 斤
总用工	每丈 1327 工	$1510 \times 1327 = 2003770$ 工
每工日支钱	新会 100 文	$2003770 \times 100 = 200377000$ 文
每工日支米	2.5 升	$2003770 \times 2.5 = 5009425$ 升

【编者注：秦九韶采用的方法是：先计算一单位长度“一丈”的相关数据，然后乘以总长度，即可得到答案。此方法，很多细节都被忽略了，计算量倒是节省了不少，精确度却是乏善可陈，产生的错误自然也不少。

比如说：城墙砌砖时，进伸砖占有的城墙土积空间 $(5+7+9)/3 \times 0.6 \times 10 \times 1510 = 63420$ 尺，所产生的土积出入，与未计入的羊马墙土积 $(5+10)/2 \times 10 \times 16 = 1200$ 无法相抵。若再考虑基入地一尺五寸所产生的土积 $1.5 \times 10 \times 1510 = 22650$ ，那就更不得了了。若无基入地一尺五寸的要求，则后面的计算仍不正确。

这，只能理解为“为使计算简单易行”而为之了。考虑到这是工程预算，这，应该是可以容忍的处理方法吧。

从官场情况考虑，也许，秦九韶是故意留下一段未计入的羊马墙土积，显得这项工程预算是偏少了，以便说服上级领导，而实际上，却是有利于施工方的工程预算。

虽历经诸多行家里手修正，此题之草，仍与题问不符。本人绞尽脑汁，亦无回天之力，只能置阙，以俟高明。】

第 56 题：楼槽功料

问：筑城，合盖楼槽六十处，每处一十间；楼槽一处用料，用工如次：

防险墙高四尺，长三丈，厚随砖长；

卧牛木一十一条，长一丈六尺，径一尺一寸；

搭脑木一十一条，长二丈，径一尺；

防壕柱一十一条，长一丈六尺，径一尺二寸；

副壕柱一十一条，长一丈五尺，径一尺二寸；

挂甲柱一十一条，长一丈三尺，径一尺一寸；

虎蹲柱一十一条，长七尺五寸，径一尺；

仰艘板木四十五条，长一丈，径一尺二寸；

平面板木三十五条，长一丈，径一尺二寸；

串挂枋木七十三条，长五尺，径一尺；

仰板四八砖，结砌三层，计六千片，每片用灰半斤，共用纸觔一百斤；

防险墙砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸半，每片用灰一斤；

中板瓦七千五百片，一尺钉八个，八寸钉二百七十个，五寸钉一百个，四寸钉五十个；丁环二十个；用工三百九十六工。欲知：共用料，共用工，各几何。

答曰：卧牛木六百六十条；搭脑木六百六十条；

防壕柱六百六十条；副壕柱六百六十条；

挂甲柱六百六十条；虎蹲柱六百六十条；

串挂枋四千三百八十条；仰板木二千七百条；

平板木二千一百条；城砖四万八千片；

四八砖三十六万片；石灰二十万八千斤；

纸觔六千斤；中板瓦四十五万片；

丁环一千二百个；一尺钉四百八十个；

八寸钉一万六千二百个；五寸钉六千个；

四寸钉三千个；用工二万三千七百六十工。

术曰：以商功求之。

置墙高乘长得寸为实，以砖阔乘厚为法，除之，得用砖，及用灰；以处数并乘诸工料，得总用工料。

草曰：置墙高 4 尺，通为 40 寸，置长 3 丈，通为 300 寸，相乘，得 12000 寸，为实；以砖阔 6 寸，乘厚 2 寸 5 分，得 15 寸，为法，除之，得 800 片，为墙砖；又为灰 800 斤；并四八砖灰 3000 斤，为楼槽一处用料；

墙高	40 寸	
墙长	300 寸	$40 \times 300 = 12000$ 寸，为实
砖阔	6 寸	
砖厚	2 寸 5 分	$6 \times 2.5 = 15$ 寸，为法
墙砖		$12000 \div 15 = 800$ 片
每片用灰	1 斤	
墙砖用灰		$800 \times 1 = 800$ 斤
四八砖砌三层	6000 片	
纸觔共用	100 斤	
每片四八砖用灰	0.5 斤	
四八砖用灰		$6000 \times 0.5 = 3000$ 斤

乃以楼槽 60 处遍乘一处用料，用工，得：卧牛木，搭脑木，防壕柱，副壕柱，挂甲柱，

虎蹲柱，仰板木，平板木，串挂枋木，四八砖，城砖，石灰，纸觔，中板瓦，一尺钉，八寸钉，五寸钉，四寸钉，钉环，工数，各项总数，在前。

楼槽	60 处	
城墙共用砖		$60 \times 800 = 48000$ 片
四八砖		$60 \times 3000 = 180000$ 片
墙砖共用灰		$48000 \times 1 = 48000$ 斤
四八砖共用灰		$60 \times 3000 = 180000$ 斤
共用石灰		$48000 + 180000 = 2280000$ 斤
卧牛木	11 条	$60 \times 11 = 660$ 条
搭脑木	11 条	$60 \times 11 = 660$ 条
防壕柱	11 条	$60 \times 11 = 660$ 条
副壕柱	11 条	$60 \times 11 = 660$ 条
挂甲柱	11 条	$60 \times 11 = 660$ 条
虎蹲柱	11 条	$60 \times 11 = 660$ 条
仰板木	45 条	$60 \times 45 = 2700$ 条
平板木	35 条	$60 \times 35 = 2100$ 条
串挂枋木	73 条	$60 \times 73 = 4380$ 条
纸觔	100 斤	$60 \times 100 = 6000$ 斤
中板瓦	7500 片	$60 \times 7500 = 450000$ 片
一尺钉	8 个	$60 \times 8 = 480$ 个
八寸钉	270 个	$60 \times 270 = 16200$ 个
五寸钉	100 个	$60 \times 100 = 6000$ 个
四寸钉	50 个	$60 \times 50 = 3000$ 个
钉环	20 个	$60 \times 20 = 1200$ 个
工数	396 工	$60 \times 396 = 23760$ 工

【编者注：“每处一十间”应该是多余的条件。】

第 57 题：计造石坝

问：创石坝一座，长三十丈，水深四丈二尺，令面阔三丈，石版每片长五尺，阔二尺，厚五寸，用灰一十斤；每层高二尺，层阔差一尺；石匠每工九片，搬扛五片，用工四人，搬灰兼用，每工一百一十斤；火头每名管六十人，部押每名管一百二十人；所用石须依原段，不许凿动。欲知坝下阔，及用石，并灰，共工各几何。

答曰：坝下阔：五丈；石版一十万八千片；石灰一百万八千斤；

用夫一十万三千五百二十八工十一分工之八；

术曰：以商功求之，招法入之。

置层高尺数，乘面阔，及长，为初率；次以差阔尺数，乘高，又乘长，为次率；却以石版长、阔、厚相乘，为法，以除二率，各得石版，为上积，及次积；置深，以层高尺数约之，得层数；

对二积列之一行，各添一拨天、地数，各以累乘，对约之，得乘率；

以对上、次积并之，为石版；

以每斤用灰，乘石，为灰数；

以匠工片数约版，得石匠；

以搬夫数乘石版，为实，以扛片数为法，除之，得人数；

以搬用灰数除灰，得人数；

并诸工，以火头管数约之，为火头；半之为部。

章曰：置层高 2 尺，面阔 3 丈，相乘，得 60 尺，又乘长 30 丈，得 18000 尺，为初率；次以差阔 1 尺，乘高 2 尺，又乘长 30 丈，得 600 尺，为次率；却以石版长 5 尺，阔 2 尺，厚 5 寸，相乘，得 5 尺为法；以除二率，得 3600 片为初积，120 片为次积，列右行；

层高	2 尺	
面阔	30 尺	
长	300 尺	
初率		$2 \times 30 \times 30 = 18000$ 尺
差阔	1 尺	
次率		$1 \times 2 \times 300 = 600$ 尺
石版长	5 尺	
石版阔	2 尺	
石版厚	0.5 尺	
法		$5 \times 2 \times 0.5 = 5$ 尺
初积		$18000 \div 5 = 3600$ 片
次积		$600 \div 5 = 120$ 片

置深 4 丈 2 尺，以每层 2 尺约之，得 21 层，乘初积 3600 片，得 75600 片于上；

次置 21 层，减 1，余 20，以乘 21 层，得 420，半之，得 210，乘次积 120 片，得 25200 片，加入上，共得 100800 片，为石版数；

次置 21 层，减去一，余 20，以差阔 1 尺乘之，得 2 丈，并上阔 3 丈，共得 5 丈，为下阔之数；

深	42 尺	
每层	2 尺	
初积	3600 片	
上		$42 \div 2 \times 3600 = 75600$ 片
次积	120 片	$(21 - 1) \times 21 \div 2 \times 120 = 25200$ 片
石版数		$75600 + 25200 = 100800$ 片

下阔	$(21-1) \times 1 + 30 = 50$ 尺
----	-------------------------------

又置石版 100800 片，以每工 9 约，得 11200 工；

置石版数，以般扛 4 人乘之，得 403200，为实，以 5 片为法，除之，得 80640 工；

又置石版数，以每片用灰 10 斤乘之，得 1008000 斤，为灰实；以每人担用 110 斤约之，得 9163 工 11 分工之 7，为灰工，于上；

又并石版工 11200，及并般扛工 80640 工，加上，共得 101003 工 11 分工之 7，通分纳子，得 1111040，为实；

置火头每名管 60 名工，以乘分母 11，得 660，为法；除实，得 1683 工，不尽 260，与法约之，为 33 分工之 13，为火头工数；半之，得 841 工 33 分工之 23，为部押濠寨数；

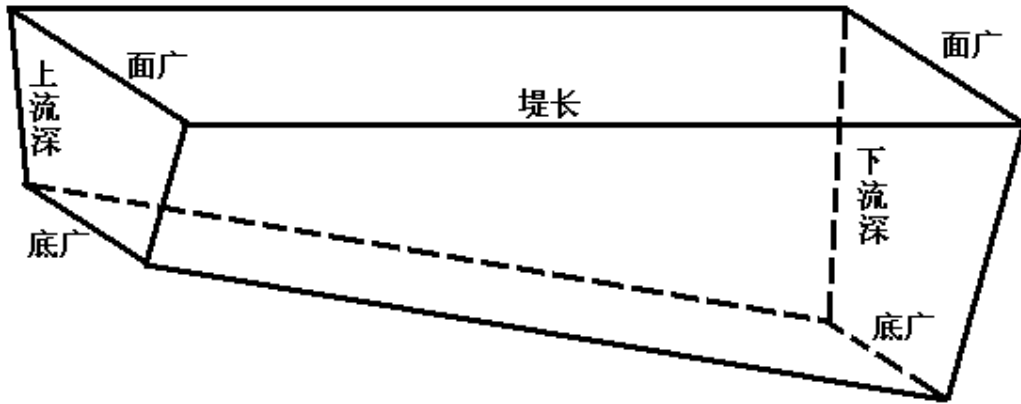
石版数	100800 片	
石匠每工	9	
石匠工数		$100800 \div 9 = 11200$ 工
搬扛五片	4 人	$100800 \times 4 = 403200$
搬扛工数		$403200 \div 5 = 80640$ 工
每片用灰	10 斤	$100800 \times 10 = 1008000$
搬灰每工	110 斤	
搬灰工数		$1008000 \div 110 = 9163.636363$ 工 = $9163 + 7/11$
共工		$11200 + 80640 + 9163 + 7/11 = 101003 + 7/11$
搬灰工分子		7
搬灰工分母		11
通分纳子		$101003 \times 11 + 7 = 1111040$ ，实
火头工数		$1111040 \div (60 \times 11) = 1683.3939 = 1683 + 260/660$
部押濠寨数		$1683.3939 \div 2 = 841.6969 = 841 + 23/33$

今众工下 11 分之 7，以母 11 除火头分母 33，得 3，以 3 因众工下母子，为 101003 工 33 分工之 21；并三项母子，得 103527 工，分子 57，满母 33，收 1 工，余 24，与母各 3 约为 11 分工之 8，为共用 103528 工 11 分工之 8。

灰工分子	7	$7 \times 3 = 21$
灰工分母	11	$11 \times 3 = 33$
火头分子	13	
火头分母	33	
部押分子	23	
部押分母	33	
共用工		$(101003 + 7/11) + (1683 + 13/33) + (841 + 23/33)$ $= 103527 + 21/33 + 13/33 + 23/33$ $= 103528 + 8/11$

第 58 题：计浚河渠

问：开通运河，就土筑堤。令渠面广六丈，渠底广四丈；渠上流深八尺，渠下流深一丈六尺；堤长四十八里，其堤下广二丈四尺，上广一丈八尺，堤长与河等，未知高；以“墟四竖三”为率；秋程人功，每名自开，运积，筑墟竖，共积常六十尺；筑堤至半，为棚道取土，上、下工减五分之一，限一月毕。取步法六十寸，里法三百六十步。欲知河积，及堤积尺，共用工，并日役工数，及堤高各几何。



答曰：河积：六千二百二十万八千尺；

堤积：四千六百六十五万六千尺；

堤高：二丈一尺七分尺之三；

共用工：二百四万一千二百；

日役工：六万八千四十；

术曰：以商功求之。

并渠上、下、广于上，并渠上、下流深，乘之；又以长乘，为实，以四为法，除得河积；以竖率乘河积为实，以墟率为法，除得堤积；并堤上、下广，乘堤长，半之为法；除堤积，得堤高；并河堤二积，半之，为寄；以子减母，余乘秋程人功常尺，为增子；以母乘常尺，为增分，并增分，增子，乘寄，为用工实；以增分乘增子，以母除之，又乘限月日为法，除实，得用人工数。

草曰：置渠上广 6 丈，并底广 4 丈，通之，折半，得 50 尺，于上；

又置渠上流深 8 尺，并下流深 1 丈 6 尺，并之，折半，得 12 尺，以乘上数，得 600 尺，为次；

置堤长 48 里，以尺里法 2160 通之，得 103680 尺，得河堤长，以乘次，得 62208000 尺，为河积；以竖率 3 因河积，得 186624000 尺为实，以穿率 4 为法，除之，得 46656000 尺，为堤积；

上广	60 尺	
底广	4 尺	
上流深	8 尺	
下流深	16 尺	
尺里法	2160 尺	
堤长		$48 \times 2160 = 103680$ 尺
河积		$103680 \times 50 \times (8 + 16) \div 2 = 62208000$ 尺
堤积		$3 \times 62208000 \div 4 = 46656000$ 尺

置上广 1 丈 8 尺，下广 2 丈 4 尺，并之，为 42 尺，以乘堤长 103680 尺，得 4354560 尺，以半之，得 2177280 尺，为法，除堤积，得 21 尺，为堤高，不尽 933120 与法求等，得

311040, 俱约之, 为 7 分寸之 3;

上广	18 尺	
下广	24 尺	
堤长		$48 \times 2160 = 103680$ 尺
堤积		$3 \times 103680 \times 50 \times 12 \div 4 = 46656000$ 尺
法		$103680 \times (18 + 24) \div 2 = 2177280$ 尺
堤高		$46656000 \div 2177280 = 21.42857143$ 尺, 不尽 933120

次置河积 62208000 尺, 并堤积 46656000 尺, 得 108864000 尺, 以棚道筑至半, 是 2 除之, 得 54432000 尺, 为寄; 以折减工 5 分之 1, 以子 1 减母 5, 余 4, 以乘常尺 60, 得 240 尺为增子; 以母 5 乘秋程人功常尺 60 得 300 尺为增分; 以二增并之, 得 540, 乘寄, 得 29393280000 尺, 为用工实;

以增分 300 乘增子 240 得 7200 尺, 以母 5 约之, 得 14400 尺, 以限月日 30 日乘之, 得 432000, 为法, 除用工实, 得 68040, 为每日人工数, 以乘 30 日, 得 2041200 工为共用工。合问。

河积	62208000 尺	
堤积	46656000 尺	
寄		$(62208000 + 46656000) \div 2 = 54432000$ 尺
秋程人功常尺	60 尺	
增子		$(5 - 1) \times 60 = 240$ 尺
增分		$5 \times 60 = 300$ 尺
用工实		$(240 + 300) \times 54432000 = 29393280000$ 尺
法		$(240 \times 300 \div 5) \times 30 = 432000$
每日人工		$29393280000 \div 432000 = 68040$
共用工		$68040 \times 30 = 2041200$

【编者注：原文有错误，根据《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992。）修改。】

第 59 题：计作清台

问：创筑清台一所。土积正高一十二丈；上广五丈，袤七丈；下广一十五丈，袤一十七丈；其袤当东西，广当南北。

秋程人功，人日行六十里，里法三百六十步。

斲土，锹土，每工各二百尺；筑土：每工九十尺；

每担土壤一尺三寸，往来一百六十步，内，棚道四十步；上下棚道：筑高至少半[三分之一]，其棚道三当平道五；至中半[二分之一]，其棚道三当平道七；至太半[三分之二]，其棚道二当平道五；踟蹰之间，十加一；载输之间，二十步；定一返。

今甲、乙、丙三县差夫：

甲县附郭，税力一十三万三千八百六十六；

乙县去台所一百二十里，税力二十三万七千九百八十四；

丙县去台所一百八十里，税力三十一万二千三百五十四；

俱以道里远近，税力多少，均科之。

台下铺石脚七层，先用砖砌台身；次用砖叠砌转道，周围五带，并阔六尺；须令南、北二平道，东、西三峻道相间；始自台之艮隅，于东外峻道向南顺升，由巽隅以西右转，周回历北复东，再升东里峻道，至巽隅乃登台顶。

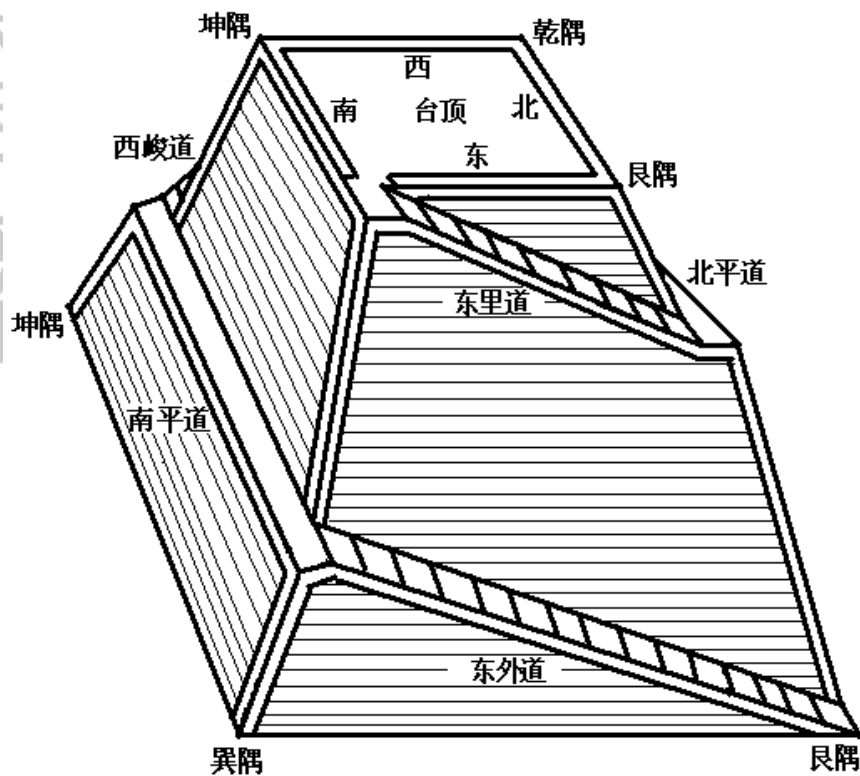
其东里峻道艮隅，与北平道两隅，及西峻道乾隅之高，皆以强半[四分之三]；

其西峻道坤隅，与南平道两隅，东外峻道巽隅之高，皆以五分之二；

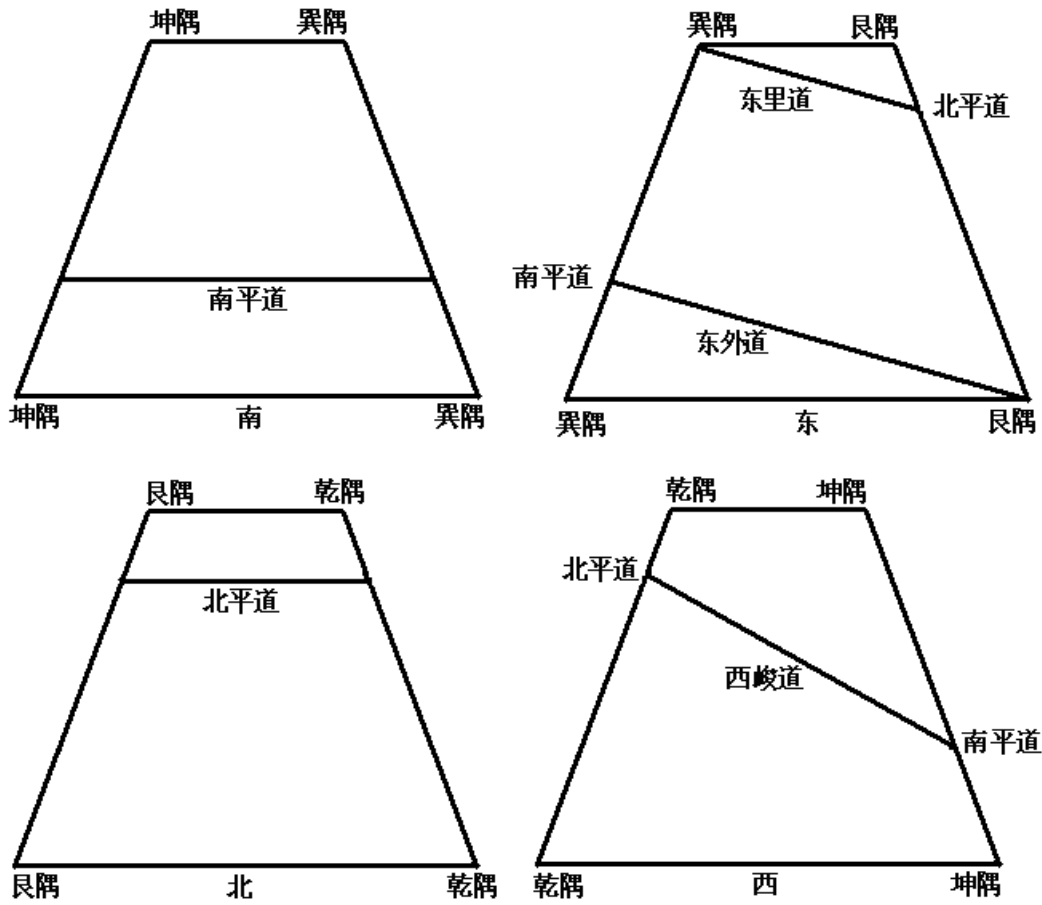
峻道每级履高六寸；其东里峻道级数，取弱半[四分之一]；东外峻道级数，取五分之二；余为西峻道级数；

石长五尺，阔二尺，厚五寸；砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分；

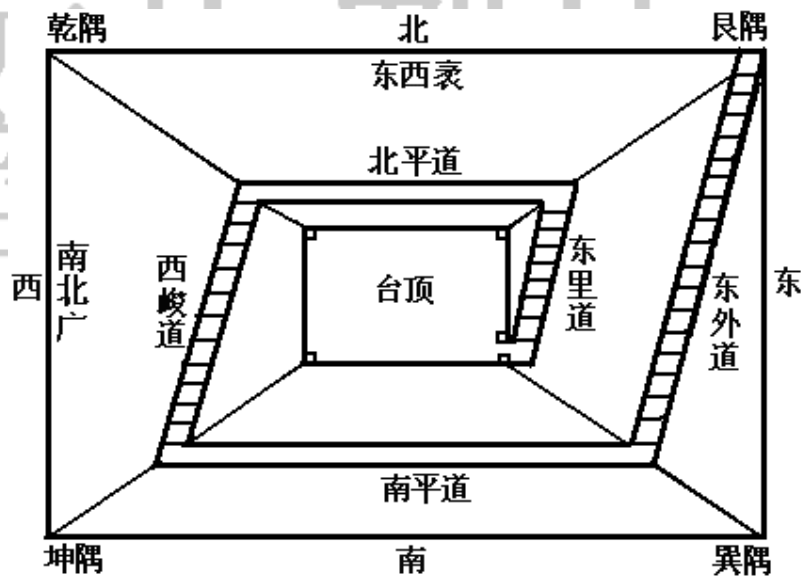
欲知：土积，定一返步，每工人到土，及总用功，各县起夫；砖、石、峻、平道高，长，级数，踏踪，各几何。



清台示意图



清台侧视图



清台俯视图

答曰：土积，一百五十四万尺；
定一返，二百三十二步三分步之二；

每功人到土，一百二十尺三百四十九分尺之百二十四；

总用功，五万八千九百一十二功；

甲县差，二万二千九十二功；乙县差，一万九千六百三十七功；丙县差，一万七千一百八十三功；

石，三千四十片；

砖，三百四十四万七千二百八十一片；

东里峻道：艮隅高，九丈；巽隅高，一十二丈六寸；级，五十一踏；踏纵，一尺四寸三十四分寸之一十九；

东外峻道：艮隅高，六寸；巽隅高，四丈八尺；级，八十踏；踏纵，一尺七寸四分之二；

西峻道：坤隅高，四丈八尺；乾隅高，九丈；级，七十踏；踏纵，一尺四寸一十四分寸之一十三；

南平道：高，四丈八尺；

北平道：高，九丈；

术曰：以商功求之，均输入之。

倍台上袤，加下袤，乘上广，为寄；倍下袤，加上袤，乘下广，并寄，乘高，为土率；如六而一，得坚积；以筑工尺为法，除坚积，得筑工；

以穿率乘坚积为实，以坚率乘镢锹工尺，半之，为镢法，除实，得镢锹共工；

以壤率因坚积，如坚率而一，为壤积；

求负土者：先列筑至高诸母子，后列全分，递次以下减上，得次；以母互乘诸子，为寄左行；以诸母相乘，为寄母；

次列棚道全分，及所当鲜母衍子，以鲜母互乘衍子，为左行；以鲜母相乘，以乘寄母，为总母；以左右两行诸子对乘之，并之，为总子；其总母子求等，约之，为定母子；以定子乘棚道，为次；以定母乘平道，加次，又以踟蹰之数，身下加之；又以载输步乘定母，并次，为统数；以定母除统数，得定一返步，亦为列土法[有分复通为法]；

置秋程人功里，通步，乘担土尺，有步母，则又以步母乘之，为到实；实如法而一，得每工人到土，亦为壤法；以除壤积，得负土工；并前锹、筑二工，为总用工；

以各县日程数，约税力，各得力率；副并为科法；以共用工乘未并者，各为科实；实如法而一，各得县夫；

求砖者：倍转道并阔，遍加台上、下广袤，变名上、下阔长；以台面铺砌砖厚，加台高，为台直；

次列砖、石长、阔、厚，各相乘，为砖、石积法；通广、袤如法，乃倍上长，加下长，乘上阔，为寄；次倍下长，加上长，乘下阔，并寄，共乘台直，得数，减土率，余如六而一，为泛；

置南北道高子，各乘台高，为实，如各母而一，得五道诸隅高；

以北道高，减台高，余并铺砌砖厚，为上停高；以南道高，减北道高，余为中停高；命南道高，为下停高；以履高寸除诸高，得级数；

以上阔减下阔，余半之，为勾；以勾乘南道高，为实；如台高而一，得底率；以底率减下阔，余为底股；

以外道级数约底股，得外道踏踪；以勾乘中停高，为实，如台高而一，得中率；

以勾乘上停高，为实；如台高而一，得中率，以中率减中股，余为上股；以西道级除上股，得西道踏级；

以勾乘上停高，为实，如台高而一，得上率；乃以中率并底率，减底股，余为中股；以西道级数约之，得西道踏踪；

又以上率并中率，减中股，余为上股，以为实；如里道级而一，得里道踏纵；
次以上停高乘中停高，并中停高乘下停高，又加下停高乘上停高，以上阔减下阔，乘之，
为实；

如台高而一，得数，减下阔乘台直，为补；

三因道阔，并下长，又加下阔于上，倍底率，减上，余乘南道高，倍之，为需；

倍道阔，并下长，又加下阔于次；上阔减下阔，余乘北道高，为实；如台高而一，得数，
减次，余乘北道高，又倍之，为寄；

倍道阔，以北道高减台直，乘之，得数，并补，加需，又并寄；复以半道阔乘之，为叠
砌积；并泛，为砖石共率；

以基脚层数，乘石版厚，为基高；次以三因道阔，并下长，以下阔并倍道阔，乘之，为
基率；次以下长并道阔，乘下阔，减基率，余乘基高，为石率；

以石率减共率，余为砖率；以砖积法，除砖率，得砖数；

以石级积法除石率，得石版数。

草曰：倍上袤 7 丈，得 14，加下袤 17 丈，得 31，乘上广 5 丈，得 155 丈，为寄；

次倍下袤，得 34 丈，加上袤 7 丈，得 41，乘下广 15 丈，得 615，并寄，得 770，乘高
12 丈，得 9240 丈，为土率；

以 6 除，得 1540；以千尺通之，为 154 万尺，为竖积；

以筑功 90 尺，除之，得 17111 功 9 分功之 1，为筑功；

次以穿率 4，因竖积，得 616 万尺，为实；以竖率 3，因镢锹功 200 尺，得 600 尺，半
之，得 300 尺，为法；除实，得 20533 功 3 分功之 1，为穿功；

次以壤率 5，因竖积，得 770 万尺，为壤积，以 3 为母；具图如后：

上袤	7 丈	
下袤	17 丈	
上广	5 丈	
寄		$(2 \times 7 + 17) \times 5 = 155$ 丈
下广	15 丈	
台高	12 丈	
土率		$((2 \times 17 + 7) \times 15 + 155) \times 12 = 9240$ 丈
竖积		$9240 \div 6 = 1540$ 丈， $1540 \times 1000 = 1540000$ 尺
筑功	90 尺	$1540000 \div 90 = 17111 + 1/9$ 功
穿率	4	
实		$4 \times 1540000 = 6160000$ 尺
竖率	3	
镢锹功	200 尺	
法		$3 \times 200 \div 2 = 300$ 尺
穿功		$6160000 \div 300 = 20533 + 1/3$ 功
壤率	5	
壤积		$5 \times 1540000 = 7700000$ 尺

求负土者：先列筑土至高：少半，系 3 分之 1；中半，系 2 分之 1；太半，系 3 分之 2，
后列全分 1 分之 1，作两行；仍以 3 分之 1 为下，其余递次，以下减次，以次减副，以副减
上，得次图：

筑土	左行分子	右行分母	递次相减得筑土差
上：全分	1	1	$1 - 2/3 = 1/3$
副：太半	2	3	$2/3 - 1/2 = 1/6$

次：中半	1	2	$1/2 - 1/3 = 1/6$
下：少半	1	3	$1/3$

乃以诸母相乘，得 324，为寄母；以右行母，俱约寄母，为定：左上位得 108；副位得 54；次位得 54；下位得 108；乃变左行，名为寄子；

筑土差齐同	左行寄子	右行寄母
上：全分	108	324
副：太半	54	324
次：中半	54	324
下：少半	108	324

次列棚道全分，及所当鲜母衍子，3 当 5，及 3 当 7，并 2 当 5；以鲜母相乘，得 18；乃以右行约鲜母，互乘左行衍子，为定：上得 18，副得 30，次得 42，下得 45，为右行，乃对寄左行列之；

棚道	左行衍子	右行鲜母	齐同	左行衍子	右行鲜母
上：全分	1	1		18	18
副：太半	5	3		30	18
次：中半	7	3		42	18
下：少半	5	2		45	18

乃以筑土差与棚道左右两行母子对乘之，上得 1944，副得 1620，次得 2268，下得 4860；母得 5832，为总母；并四子，得 10692，为总子；

	左行分子	右行分母
上：全分	$108 \times 18 = 1944$	$324 \times 18 = 5832$
副：太半	$54 \times 30 = 1620$	$324 \times 18 = 5832$
次：中半	$54 \times 42 = 2268$	$324 \times 18 = 5832$
下：少半	$108 \times 45 = 4860$	$324 \times 18 = 5832$

乃以总母、子求等，得 972，俱约之，总子得 11，为定子；总母得 6，为定母；以定子 11，乘棚道 40 步，得 440，于次；以棚道 40 步，减往来 160 步，余 120，为平道；

以乘定母 6，得 720，加次，共得 1160；又以踟蹰 10 加 1，于身下加 1，得 1276，仍于次；又以载输 20 步，乘定母 6，得 120，并次，得 1396，为统数；

以定母 6 除统数，得 232 步，不尽约为 3 分步之 2，为定一返步；

总子	10692	$10692 = 11 \times 972$
总母	5832	$5832 = 6 \times 972$
定子	11	
定母	6	
棚道	40 步	
次		$11 \times 40 = 440$
往来	160 步	
平道		$160 - 40 = 120$ 步
踟蹰	10 加 1	即 $(1 + 1/10)$ 倍
次		$(6 \times 120 + 440) \times (1 + 1/10) = 1276$
载输	20 步	
统数		$20 \times 6 + 1276 = 1396$
定一返		$1396 \div 6 = 232 + 2/3 = 698/3$

乃复通分内子，得 698，为副法；乃置秋程人功 60 里，以 360 通之，得 21600 步，乘

担土 1 尺 3 寸，得 28080 尺，以到母 3 乘之，得 84240 尺，为到实；实如法而一，除得 120 尺，不尽 480，与法求等，得 2，约之，为 349 分寸之 240，为到土；

复通分内子，得 42120，又以壤母 3，因得 126360 尺，为壤法；次以到土母 349，乘壤积 770 万尺，得 268730 万尺，为壤实；实如法而一，得 21267 功，不尽 1880，与法求等，得 40，俱约之，为 21267 功 3159 分功之 47，为担土功；

次列前土功图之：筑功 17111 功 9 分功之 1，及穿功 20583 功 3 分功之 1，具图如后：

副法	698	
秋程人功	60 里	$60 \times 360 = 21600$ 步
担土	1.3 尺	
到实		$21600 \times 1.3 \times 3 = 84240$ 尺
到土		$84240 \div 698 = 120 + 480/698 = 120 + 240/349 = 42120/349$
壤母	3	
壤法		$3 \times 42120 = 126360$ 尺
到土母	349	
壤积	7700000 尺	
壤实		$349 \times 7700000 = 2687300000$ 尺
担土功		$2687300000 \div 126360 = 21267 + 1880/126360 = 21267 + 47/3159 = 67182500/3159$ ，担率
筑功	17111 + 1/9 功	154000/9，筑率
穿功	20533 + 1/3 功	61600/3，穿率

列三行动，各通分内子，筑率得 154000，穿率得 61600，担率得 67182500；按术当以通率图诸母互乘诸率，今验担母 3159，可用筑母 9 约，亦可穿母 3 约，故从省；以筑母 9 约担母 3159，得 351，为筑率乘数；又以穿母 3，约担母 3159，得 1053，为穿率乘数，各以乘数，乘本率，名曰就母图；乃以 3159，变名曰就母；先以筑率 154000，乘乘数 351，得 54054000，为筑分；次以穿率 61600，乘乘率 1053，得 64864800，为穿分，就以担率 67182500，为担分；并三分，共得 186101300，为总功分实；以就母 3159 除之，得 58911 功 3159 分功之 1451，余分收为 1，得 58912，为总用功；具图如后：

就母	3159	
筑率乘数	351	$154000 \times 351 = 54054000$ ，筑分
穿率乘数	1053	$61600 \times 1053 = 64864800$ ，穿分
担分		67182500
总功分实		$54054000 + 64864800 + 67182500 = 186101300$
总用功		$186101300 \div 3159 = 58911 + 1451/3159$

置各县日程，约税力，得力率，副并为科法；上置甲县力 133866，以 1 日程约之，只得此数，为甲率；又置乙县力 237984，以 2 日约，得 118992，为乙率；又置丙县力 312354，以 3 日约，得 104118，为丙率；列三率，求等，得 14874，俱约之，甲得 9，乙得 8，丙得 7，各为定率；副并得 24，具图如后：

甲县力	133866	$133866 \div 1 = 133866 = 9 \times 14874$ ，甲率
乙县力	237984	$237984 \div 2 = 118992 = 8 \times 14874$ ，乙率
丙县力	312354	$312354 \div 3 = 104118 = 7 \times 14874$ ，丙率
甲定率	9	
乙定率	8	

丙定率	7	
-----	---	--

乃以总分 186101300，遍乘三县定率，甲得 1674911700，乙得 1488810400，丙得 1302709100，为各实；以就母 3159，乘并率 24 得 75816，为科法；除各实，为各县差夫，乃以科法除各实，甲得 22091 功，不尽 60444，为甲县功；乙得 19637，不尽 11608，为乙县功；丙得 17182，不尽 38688，为丙县功；甲丙二县不尽，皆辈为 1 功；甲合科 22092 功，乙合科 19637 功，丙合科 17183 功；具图如后：

甲实	$9 \times 186101300 = 1674911700$	
乙实	$8 \times 186101300 = 1488810400$	
丙实	$7 \times 186101300 = 1302709100$	
科法	$3159 \times 24 = 75816$	
甲县差夫	$1674911700 \div 75816 = 22091.79725$	甲县：22092 功
乙县差夫	$1488810400 \div 75816 = 19637.15311$	乙县：19637 功
丙县差夫	$1302709100 \div 75816 = 17182.50897$	丙县：17183 功

求砖者：倍转道并阔 6 尺，得 1 丈 2 尺；遍加台上、下广，变名为上、下阔；遍加台上、下袤，变名为上、下长；从台面铺砌砖厚 6 寸，加台高，为台直；

先列砖长 1 尺 2 寸，阔 6 寸，厚 2 寸 5 分，相乘之，得 180 寸，为砖积法；

次列石版长 5 尺，阔 2 尺，厚 5 寸，相乘，得 5000 寸，为石积法；

验得诸法，皆变寸，具图如后：

转道并阔	60 寸	倍转道并阔为 120 寸
上广	500 寸	$500 + 120 = 620$ 寸，上阔
下广	1500 寸	$1500 + 120 = 1620$ 寸，下阔
上袤	700 寸	$700 + 120 = 820$ 寸，上长
下袤	1700 寸	$1700 + 120 = 1820$ 寸，下长
台高	1200 寸	$1200 + 6 = 1206$ 寸，台直
砖长	12 寸	
砖阔	6 寸	
砖厚	2.5 寸	
砖积法		$12 \times 6 \times 2.5 = 180$ 寸
石版长	50 寸	
石版阔	2 寸	
石版厚	5 寸	
石积法		$50 \times 20 \times 5 = 5000$ 寸

乃以各图上、下、长、阔、直，按术求率：

倍上长 820，得 1640，加下长 1820，得 3460，乘上阔 620，得 2145200，为上阔寄；

次倍下长 1820，得 3640，加上长 820，得 4460，乘下阔 1620，得 7225200，为下阔寄；

并上、下阔寄，得 9370400，乘台直 1206 寸，得 113000702400 寸，仍为寄；

乃验土积图，土率 9240 丈，以 100 万寸通之，得 924000 万寸；以减寄，余 2060702400 寸，如 6 而一，得 343450400 寸，为泛；具图如后：

上阔	620 寸	
下阔	1620 寸	
上长	820 寸	$(2 \times 820 + 1820) \times 620 = 2145200$ ，上阔寄
下长	1820 寸	$(2 \times 1820 + 820) \times 1620 = 7225200$ ，下阔寄
台直	1206 寸	

寄		$(7225200+2145200) \times 1206 = 113000702400$ 寸
土率	9240000000 寸	
泛		$(113000702400 - 9240000000) \div 6 = 343450400$ 寸

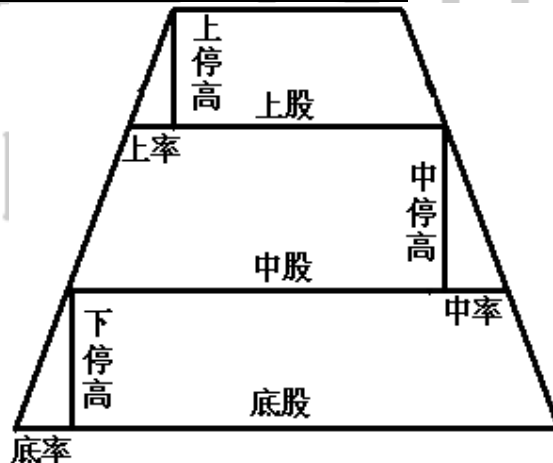
次置南道高，5 分之 2；北高道，强半，系 4 分之 3；及台元高 1200 寸；

乃以南道高子 2，乘元台高，得 2400 寸，为南实；以北道高子 3，乘元台高，得 3600 寸，为北实；各如本母而一，得 480 寸，约为 4 丈 8 尺，为南道两隅，又为东外道巽隅高，又为西道坤隅高；所得 900 寸，约为 9 丈，为北道两隅高，又为西道乾隅高，又为东里道艮隅高，具图如后：

台元高	1200 寸	
南道高子	2	$2 \times 1200 = 2400$ 寸，南实
南道高母	5	$2400 \div 5 = 480$ 寸，南道高
北道高子	3	$3 \times 1200 = 3600$ 寸，北实
北道高母	4	$3600 \div 4 = 900$ 寸，北道高

以北道高 9 丈，减台高 12 丈，余 3 丈，并铺砌砖厚 6 寸，得 3 丈 6 寸，为上停高；以南道高 4 丈 8 尺，减北道高 9 丈，余 4 丈 2 尺，为中停高；命南道高 4 丈 8 尺，为下停高；三停高，皆如履级寸而一，得 51，为东里道级数；得 70，为西道级数；得 80，为东外道级数；

台元高	1200 寸	
南道高	480 寸	
北道高	900 寸	
上停高		$(1200 - 900) + 6 = 306$ 寸
中停高		$900 - 480 = 420$ 寸
下停高	480 寸	
履级	6 寸	
东里道级数		$306 \div 6 = 51$
西道级数		$420 \div 6 = 70$
东外道级数		$480 \div 6 = 80$



次以上阔 620 寸，减下阔 1620 寸，余 1000 寸，以半之，得 500 寸，为句；以乘南道高 480 寸，得 24 万寸，为底实；如台高 1200 寸而一，得 200 寸，为底率；以率减下阔 1620，余 1420 寸，为底股；以外道级 80 约之，得 1 尺 7 寸 4 分寸之 3，为外道踏纵；

乃以句 500 寸，乘中停高 4 丈 2 尺，得 21 万寸，为中实；如台高 1200 寸而一，得 175 寸，为中率；次以中率并底率，得 375 寸，减底股 1420 寸，余 1045 寸，为中股；以西道级

70 除之，得 1 尺 4 寸 14 分寸之 13，为西道踏纵；

又以句 500 寸，乘上停高 306 寸，得 153000 寸，为上实。如台高 1200 寸而一，得 127 寸 5 分，为上率；又以上率并中率，得 302 寸 5 分，减中股 1045 寸，余 742 寸 5 分，为上股；如里道级 51 而一，得 1 尺 4 寸 34 分寸之 19，为里道踏纵；各得具图如后：

台元高	1200 寸	
上阔	620 寸	
下阔	1620 寸	
台直	1206 寸	
句		$(1620 - 620) \div 2 = 500$ 寸
底实		$500 \times 480 = 240000$ 寸
底率		$240000 \div 1200 = 200$ 寸
底股		$1620 - 200 = 1420$ 寸
外道踏纵		$1420 \div 80 = 17 + 3/4$
上停高	306 寸	
中停高	420 寸	
下停高	480 寸	
中实		$500 \times 420 = 210000$ 寸
中率		$210000 \div 1200 = 175$ 寸
中股		$1420 - (175 + 200) = 1045$ 寸
西道踏纵		$1045 \div 70 = 14 + 13/14$
上实		$500 \times 306 = 153000$ 寸
上率		$153000 \div 1200 = 127.5$ 寸
上股		$1045 - (127.5 + 175) = 742.5$ 寸
里道踏纵		$742.5 \div 51 = 14 + 19/34$

次以下阔 1620 寸，乘台直 1206 寸，得 1953720 寸，于上；以上停高 306 寸，乘中停高 420 寸，得 128520 寸，于次；以中停高 420 寸，乘下停高 480 寸，得 201600 寸，并次，仍于次；以下停高 480 寸，乘上停高 306 寸，得 146880 寸，又并次，共得 477000 寸；以上阔减下阔，得 1000 寸，乘之，得 477000 寸，为实；如台高 1200 寸而一，得 397500 寸，减上，余 1556220 寸，为补；

台元高	1200 寸	
上阔	620 寸	
下阔	1620 寸	$1620 - 620 = 1000$ 寸
台直	1206 寸	
上停高	306 寸	$306 \times 420 = 128520$ 寸
中停高	420 寸	$420 \times 480 = 201600$ 寸
下停高	480 寸	$480 \times 306 = 146880$ 寸
上		$1620 \times 1206 = 1953720$ 寸
次		$128520 + 201600 + 146880 = 477000$ 寸
实		$1000 \times 477000 = 477000000$ 寸
补		$1953720 - 477000000 \div 1200 = 1556220$ 寸

3 因道阔，并下长，得 2000 寸，又加下阔 1620 寸，得 3620 寸，于上；倍底率，得 400 寸，减上，余 3220 寸，以乘南道高 480 寸，得 1545600 寸，倍之，得 3091200 寸，为需；倍道阔，并下长，得 1940 寸，加下阔 1620 寸，得 3560 寸，于次；上阔减下阔，得 1000

寸，乘北道高 900 寸，得 90 万寸，为实；如台高 1200 而一，得 750 寸，减次，余 2810 寸，乘北道高 900 寸，得 2529000 寸，倍之，得 5058000 寸，为寄；

北道高减台直，得 306 寸，以倍道阔 120 寸乘之，得 36720 寸，并补 1556220 寸，加需 3091200 寸，又并寄 5058000 寸，共得 9742140 寸；复以半道阔 30 寸乘之，得 292264200 寸，为叠砌积；并泛，得 635714600 寸，为砖石共率；

道阔	60 寸	
上阔	620 寸	
下阔	1620 寸	$1620 - 620 = 1000$ 寸
上长	820 寸	
下长	1820 寸	
台直	1206 寸	
上		$(3 \times 60 + 1820) + 1620 = 3620$ 寸
底率	200 寸	
南道高	480 寸	
需		$(3620 - 2 \times 200) \times 480 \times 2 = 3091200$ 寸
次		$(2 \times 60 + 1820) + 1620 = 3560$ 寸
北道高	900 寸	
台高	1200 寸	
实		$1000 \times 900 = 900000$ 寸
寄		$(3560 - 900000 \div 1200) \times 900 \times 2 = 5058000$ 寸
补	1556220 寸	
		$(1206 - 900) \times 2 \times 60 + 1556220 + 3091200 + 5058000 = 9742140$ 寸
叠砌积		$9742140 \times 60 \div 2 = 292264200$ 寸
泛	343450400 寸	
砖石共率		$292264200 + 343450400 = 635714600$ 寸

次以基脚 7 层，乘石版厚 5 寸，得 35 寸，为基高；次以 3 因道阔，并下长 1820 寸，得 2000 寸；以下阔 1620 寸，并倍道阔 120 寸，得 1740，乘之，得 348 万寸，为基率；

次以下长 1820 寸，并道阔 60 寸，得 1880 寸，乘下阔 1620 寸，得 3045600 寸，减基率，余 434400 寸，乘基高 35 寸，得 15204000 寸，为石率；

以石率，减砖石共率 635714600 寸，余 620510600 寸，为砖率；

以砖积法 180 寸除之，得 3447281 片 9 分片之 1，为砖数；

乃以石积法 5000 寸，除石率 15204000 寸，得 3040 片，为石版数；不尽 4000 寸，弃之，不俾，合问；

石版长	50 寸	
石版阔	2 寸	
石版厚	5 寸	
基脚	7 层	
基高		$7 \times 5 = 35$ 寸
道阔	60 寸	
上阔	620 寸	
下阔	1620 寸	$1620 - 620 = 1000$ 寸
上长	820 寸	

下长	1820 寸	
基率		$(3 \times 60 + 1820) \times (1620 + 2 \times 60) = 3480000$ 寸
石率		$(3480000 - (1820 + 60) \times 1620) \times 35 = 15204000$ 寸
砖石共率	635714600 寸	
砖率		$635714600 - 15204000 = 620510600$ 寸
砖积法	180 寸	
砖数		$620510600 \div 180 = 3447281 + 1/9$ 片
石积法	5000 寸	
石版数		$15204000 \div 5000 = 3040 + 4000/5000$ 片

【编者注：本题存在的问题不少，虽历经修正，仍不尽人意。

原文题图牛头不对马嘴，这里予以更换。主要参考了：

《文渊阁四库全书·子部·天文算法类·数学九章》797—522 页“台图”；

刘敦桢“河南省北部古建筑调查记——河南省登封县告成镇周公庙”中的绘制图（《中国营造学社汇刊》第 6 卷第 4 期 30—129 页）；

《秦九韶与数书九章》383 页“图 7 清台示意图”；

Ulrich Libbrecht: *Chinese mathematics in the thirteenth century* 在 457 页的图形 Figure 61 亦可参考，只是与 458 页的 Figure 63 风马牛不相及而已；】

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 60 题：堂隍程筑

问：有营，造地，基长二十一丈，阔一十七丈；先令七人筑坚三丈，计功二日；今涓吉立木有日，欲限三日筑了，每日合收杵手几何。

答曰：日收五百五十五工三分工之一。

术曰：以长乘阔，又乘原日，原人，为实，以限日乘筑丈数，为法，除之，得人夫。

草曰：以长 21 丈，乘阔 17 丈，得 357 丈；又乘原 2 日，得 714；又乘原 7 人得 4098 为工实；以限 3 日，乘原筑 3 丈，得 9，为法，除实，得 555 工，不尽 3 与法俱 3 约之，为 3 分工之 1，为日收 555 工 3 分工之 1，合问。

基长	21 丈	
基阔	17 丈	
原筑	3 丈	
原日	2 日	
原人	7 人	
原 2 日工实		$21 \times 17 \times 2 \times 7 = 4098$
限日	3 日	
法		$3 \times 3 = 9$
日收工		$4098 \div 9 = 555 + 1/3$

版权所有！
欢迎传播！

禁止制作为
商品销售！

第 61 题：砌砖计积

问：有交到六门砖一十五垛，每垛高五尺，阔八尺，长一丈；
 其砖每片长八寸，阔四寸，厚一寸；
 今砌地面用去：堂屋三间，各深三丈，共阔五丈二尺；
 书院六间，各深一丈五尺，各阔一丈二尺；
 后阁四间，各深一丈三尺，内二间阔一丈，次二间阔一丈五尺；
 亭子地面一十所，各方一丈四尺；
 欲知见有，今用，外余砖各几何。

答曰：见有一十八万七千五百片；
 今用一万六千四百六片四分片之一；
 外余一十七万一千九十三片四分片之三；

术曰：以少广求之。

置各地面深，阔相乘，以间数若干所数乘之，共为实；砖长，阔相乘，为砖平法，除得今用砖数；

次以砖垛高，长，阔相乘为实，却以砖法乘厚，得数为砖积法，除之，得每垛砖数；
 次以垛数乘之，得见有砖；以减今用砖，得余砖。

草曰：置堂阔 5 丈 2 尺，乘堂深 3 丈，得 156000 寸，于上；

又置书院深 1 丈 5 尺，乘书院阔 1 丈 2 尺，得 18000 寸，又以 6 间乘之，得 108000 寸，并上，共得 264000 寸，为书院上；

又置后阁内二间阔 1 丈，并次二间阔 1 丈 5 尺，得 2 丈 5 尺；又以各 2 间乘之，得 500 寸，以乘后阁各深 1 丈 3 尺，得 65000 寸，为后阁上；

次置亭基 1 丈 4 尺，自乘得 19600 寸，以 10 所乘之，得 196000 寸，为亭上；

又并书院上，后阁上，亭上，共得 525000 寸，为实；

堂阔	520 寸	
堂深	300 寸	$520 \times 300 = 156000$ 寸，上
书院	6 间	
书院深	150 寸	
书院阔	120 寸	$6 \times 150 \times 120 = 108000$ 寸，上
书院上		$156000 + 108000 = 264000$ 寸
后阁内二间阔	100 寸	
后阁次二间阔	150 寸	
后阁深	130 寸	
后阁上		$(100 + 150) \times 2 \times 130 = 65000$ 寸
亭基	140 寸	
亭上		$140^2 \times 10 = 196000$ 寸
实		$264000 + 65000 + 196000 = 525000$ 寸

以砖长 8 寸，乘砖阔 4 寸，得 32 寸，为砖平法；除之，得 16406 片 4 分片之 1，为今用砖数；

次置每垛高 5 尺，乘垛阔 8 尺，得 4000 寸，又乘垛长 1 丈，得 40 万寸，为每垛实；
 却以砖平法 32 寸，乘砖厚 1 寸，只得 32 寸，为砖积法；

除之，得 12500 片；又以 15 垛乘之，得 187500 片，为现有砖数；

内减今用砖数，余有 171093 片 4 分片之 3，为外余砖数。合问

实	525000 寸	
砖长	8 寸	

砖阔	4 寸	
砖厚	1 寸	
砖平法		$8 \times 4 = 32$ 寸
今用砖数		$525000 \div 32 = 16406 + 1/4$ 片
堞高	50 寸	
堞阔	80 寸	
堞长	100 寸	
堞数	15	
每堞实		$50 \times 80 \times 100 = 400000$ 寸
砖积法		$32 \times 1 = 32$ 寸
现有砖数		$400000 \div 32 \times 15 = 187500$ 片
外余砖数		$187500 - (16406 + 1/4) = 171093 + 3/4$ 片

【编者注：閤（gé），门旁户也。——《说文》。通“阁”。楼阁[storey]。】

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

第 62 题：囤积量容

问：有圆囤米二十五个，内有：

大囤一十二个：上径一丈，下径九尺，高一丈二尺；

小囤一十三个：上径九尺，下径八尺，高一丈；

今出租斗一只，口方九寸六分，底方七寸，正深四寸，并裹（guǒ，携带[bring]）明准尺；令准数造五斗方斛，及圆斛各二只，须令二斛口径，正深，大小不同，各得多少，及囤积米几何。

答曰：方斛一只，口方六寸四分，底方一尺二寸，深一尺五寸九分二厘；

又一只，口方一尺，底方一尺二寸，深一尺一寸四分五厘；

圆斛一只，口径一尺二寸七分，底径一尺二寸，深一尺二寸一分四厘；

又一只，口径一尺三寸，底径一尺二寸，深一尺一寸八分五厘；

囤米计：六千五十石二斗八升五合五勺六抄三撮；

术曰：以商功，及少广求之。

置出斗上、下方，相乘之，又各自乘，并之，乘深；又以五斗乘之，为三倍斛积，于上；求方斛：先自如意立数，为斛深；又如意立数，为底方；置深为从隅，以底方乘隅为从方，又以底乘从方为减率，以减上积，余为实；开连枝平方，得方斛口方，不尽，以所得数为基，增损求之，以口底方相乘，又各自求，并之，为法，除前上积，得深，余分，收弃之；

求圆斛：圆法用“周三径一”之率。置四数，以因前积为寄，如意立数为斛深，别如意立数为底径；以三因深为从隅，以底径乘隅为从方，以底径乘从方为减率，以减寄，余为实；开连枝平方，得口径，不尽，以所得数为基，如意求差；以口、底径相乘，又各自乘，并之，复三因之，为法，除寄，得深，余分，收弃之；

求囤米：置各囤上径、下径相乘，又各自乘，并之，乘高，又乘囤数，所得之数，为积[囤有大小，以类并之，为共积]，如四而一，为实，以斛法求之，得米。

草曰：置出租斗口方 9 寸 6 分，与底方 7 寸相乘，得 67 寸 2 分，于上；又以口方 9 寸 6 分自乘之，得 92 寸 1 分 6 厘，加上；又以底方 7 寸自乘，得 49 寸，又加上；共得 208 寸 3 分 6 厘，乘深 4 寸，得 833 寸 4 分 4 厘；又以 5 斗乘之，得 4167 寸 2 分，为三倍斛积于上。

口方	9.6	$9.6^2=92.16$
底方	7	$7^2=49$
上		$9.6 \times 7=67.2$
深	4	
五斗/斛	5	
三倍斛积		$5 \times 4 \times (92.16 + 49 + 67.2) = 4167.2$ 寸

求方斛：如意立 1 尺 6 寸为斛深；又如意立 1 尺 2 寸，为斛底；以深 16 寸为从隅，以底 12 寸乘隅，得 192 寸为从方；又以底 12 寸，乘从方 192 寸，得 2304 寸，为减率；以减上积 4167 寸 2 分，余 1863 寸 2 分，为实；

如意立斛深	16 寸	从隅
如意立斛底	12 寸	
从方		$16 \times 12 = 192$ 寸
减率		$12 \times 192 = 2304$ 寸
三倍斛积	4167.2 寸	
实		$4167.2 - 2304 = 1863.2$ 寸

开连枝平方：

一变	首商 $x = 6$	二变	首商 $x = 6$
----	------------	----	------------

实	$(16x + 192)x - 1863.2 = -135.2$	实	-135.2
从方	$16x + 192 = 288$	从方	$16x + 288 = 384$
从隅	16	从隅	16

次位商 $x = 0.3$

一变	次商 $x = 0.3$	二变	次商 $x = 0.3$
实	$(16x + 384)x - 135.2 = -18.56$	实	-18.56
从方	$16x + 384 = 388.8$	从方	$16x + 388.8 = 393.6$
从隅	16	从隅	16

三位商 $x = 0.05$

一变	三商 $x = 0.05$	二变	三商 $x = 0.05$
实	$(16x + 393.6)x - 18.56 = 1.16$	实	1.16
从方	$16x + 393.6 = 394.4$	从方	$16x + 394.4 = 395.2$
从隅	16	从隅	16

得 6 寸 3 分 5 厘（精确值：6.347064428438042），为基，其积不及 1 寸 1 分 6 厘，系有亏数，其基数为未可用；须合损益基数；今益作 6 寸 4 分，为口方；以原立 1 尺 2 寸为底方，以口方乘底方，得 76 寸 8 分，于上；又以口方 6 寸 4 分自乘，得 40 寸 9 分 6 厘；又以底方 12 寸自乘，得 144 寸，并以上，共得 261 寸 7 分 6 厘，为法，以除前积 4167 寸 2 分，得 1 尺 5 寸 9 分 2 厘，为方斛深；其积不及 1 厘 9 毫 2 丝，收为闰；

基数	6.35 寸	
口方	6.4 寸	$6.4^2 = 40.96$ 寸
底方	12 寸	$12^2 = 144$ 寸
上		$6.4 \times 12 = 76.8$
法		$76.8 + 40.96 + 144 = 261.76$ 寸
三倍斛积	4167.2 寸	
方斛深		$4167.2 \div 261.76 = 15.91992665$ 寸

又累增至 10 寸，为口方；仍以 12 寸，为底方；乃以口方 10 寸，乘底方 12 寸，得 120 寸，于上；又以口方自乘，得 100 寸，加上；又以底方自乘，得 144 寸，又加上；共得 364 寸，为法；亦除前实积 4167 寸 2 分，得 11 寸 4 分 5 厘，为方斛深；其积不及 6 分，收为闰；此是求出两等斛数，在人择而用之；

口方基数	6.4 寸	$6.4 + 3.6 = 10$ 寸，口方累增
口方	10 寸	$10^2 = 100$ 寸
底方	12 寸	$12^2 = 144$ 寸
上		$10 \times 12 = 120$ 寸
法		$100 + 144 + 120 = 364$ 寸
三倍斛积	4167.2 寸	
方斛深		$4167.2 \div 364 = 11.44835165$ 寸

求圆斛：置 4 数，以因前积 4167 寸 2 分，得 16668 寸 8 分，为十二倍斛积，为寄；如意立 1 尺 2 寸，为圆斛深；又如意立 1 尺，为底径；圆法用“周三径一”之率，以 3 因深，得 36 寸，为从隅；乃以底 10 寸乘隅，得 360 寸，为从方；又以底 10 寸乘从方，得 3600 寸，为减率，以减寄 16668 寸 8 分，余 13068 寸 8 分，为实；

十二倍斛积		$4 \times 4167.2 = 16668.8$ 寸，寄
如意立斛深	12 寸	$3 \times 12 = 36$ ，从隅
如意立斛底径	10 寸	

从方		$10 \times 36 = 360$ 寸
减率		$10 \times 360 = 3600$ 寸
实		$16668.8 - 3600 = 13068.8$ 寸

开连枝平方：

一变	首商 $x = 10$	二变	首商 $x = 10$
实	$(36x + 360)x - 13068.8 = -5868.8$	实	-5868.8
从方	$36x + 360 = 720$	从方	$36x + 720 = 1080$
从隅	36	从隅	36

次位商 $x = 4$

一变	次商 $x = 4$	二变	次商 $x = 4$
实	$(36x + 1080)x - 5868.8 = -972.8$	实	-972.8
从方	$36x + 1080 = 1224$	从方	$36x + 1224 = 1368$
从隅	36	从隅	36

三位商 $x = 0.7$

一变	三商 $x = 0.7$	二变	三商 $x = 0.7$
实	$(36x + 1368)x - 972.8 = 2.44$	实	2.44
从方	$36x + 1368 = 1393.2$	从方	$36x + 1393.2 = 1418.4$
从隅	36	从隅	36

得 1 尺 4 寸 7 分（精确值：14.698279676718528），为基；其实不及 2 寸 4 分 4 厘，收为闰；次以原立底径 1 尺，并基 1 尺 4 寸 7 分，得 2 尺 4 寸 7 分，只减 7 分为差，余 2 尺 4 寸，以半之，得 1 尺 2 寸，为底径；以差 7 分，并底径，得 1 尺 2 寸 7 分，为口径；始以口径 1 尺 2 寸 7 分，乘底径 1 尺 2 寸，得 152 寸 4 分于上；次以口径自乘，得 161 寸 2 分 9 厘，加上；又以底径自乘，得 144 寸，又加上；共得 457 寸 6 分 9 厘；以 3 因之，得 1373 寸 7 厘，为法，除前圆寄 16668 寸 8 分，得 1 尺 2 寸 1 分 4 厘，为圆斛正深；其实不及 2 毫 6 丝 9 忽 8 微，收为闰；

原立底径	10 寸	
口径基数	14.7 寸	$(10 + 14.7) \div 2 = 12.35$ 寸，收为底径
口径	12.7 寸	$12.7^2 = 161.29$ 寸
底径	12 寸	$12^2 = 144$ 寸
上		$12.7 \times 12 = 152.4$ 寸
法		$3 \times (161.29 + 144 + 152.4) = 3 \times 457.69 = 1373.07$ 寸
十二倍斛积	16668.8 寸	
圆斛深		$16668.8 \div 1373.07 = 12.13980351$ 寸

又以基 1 尺 4 寸 7 分，增 3 分，得 1 尺 5 寸，并底径 1 尺，得 2 尺 5 寸，减 1 寸为差，余 2 尺 4 寸，以半之，得 1 尺 2 寸，为底径；以差 1 寸，并底径 1 尺 2 寸，得 1 尺 3 寸，为口径；始以口径 13 寸，乘底径 1 尺 2 寸，得 156 寸，于上；又以口径 13 寸自乘，得 169 寸，加上；又以底径 12 寸自乘，得 144 寸，又加上，共得 469 寸，以 3 因之，得 1407 寸，为法，除前圆寄 16668 寸 8 分，得 1 尺 1 寸 8 分 4 厘 7 毫，为圆斛深，寄余 7 厘 1 毫，却收深 7 毫作 1 厘，通得 1 尺 1 寸 8 分 5 厘为圆斛深；此是求出两等圆斛数，在人择而用之；

原立底径	10 寸	
口径基数	14.7 寸	$(10 + 14.7) \div 2 = 12.35$ 寸，收为底径
口径	13 寸	$13^2 = 169$ 寸
底径	12 寸	$12^2 = 144$ 寸

上		$13 \times 12 = 156$ 寸
法		$3 \times (169 + 144 + 156) = 3 \times 469 = 1407$ 寸
十二倍斛积	16668.8 寸	
圆斛深		$16668.8 \div 1407 = 11.84705046$ 寸

求囤米：置大囤上径 1 丈，通为 100 寸，乘下径 90 寸，得 9000，于上；又以上径自乘，得 10000 寸，加上；又以下径 90 寸自乘，得 8100 寸，加上，共得 27100 寸，乘高 120 寸，得 3252000 寸；又乘大囤 12 个，得 39024000 寸，为大囤寄；

次置小囤上径 90 寸，下径 80 寸，相乘，得 7200 寸，于次；又上径自乘，得 8100 寸，加次；又下径自乘，得 6400 寸，加次共得 21700 寸，又乘高 100 寸，得 2170000 寸，又乘小囤 13 个，得 28210000 寸，并大囤寄，共得 67234000 寸，为寄实；以 3 因之，以 4 除之，得 50425500 寸，为实；倍前三倍斛积 4167 寸 2 分，得 8334 寸 4 分，为法，除之，得 6050 石 2 斗 8 升 5 合 5 勺 6 抄 3 撮。

大囤上径	100 寸	$100^2 = 10000$ 寸
大囤下径	90 寸	$90^2 = 8100$ 寸
上		$100 \times 90 = 9000$ 寸
大囤高	120 寸	
大囤数目	12 个	
大囤寄		$(10000 + 8100 + 9000) \times 120 \times 12 = 39024000$ 寸
小囤上径	90 寸	$90^2 = 8100$ 寸
小囤下径	80 寸	$80^2 = 6400$ 寸
次		$90 \times 80 = 7200$ 寸
小囤高	100 寸	
小囤数目	13 个	
寄实		$(8100 + 6400 + 7200) \times 100 \times 13 + 39024000 = 67234000$ 寸
三倍斛积	4167.2 寸	
实		$67234000 \times 3 \div 4 = 50425500$ 寸
法		$2 \times 4167.2 = 8334.4$ 寸
囤米数		$50425500 \div 8334.4 = 6050.285563447878$ 石

【编者注：“裹（guǒ，携带[bring]）明准尺”意思是：在斛内标刻尺寸刻度。“令准数造”意思是：按照国家标准制作。】

第 63 题：古池推元

问：有方中圆古池，堙圯（yīnǐ，堵塞，毁坏），止余一角。从外方隅，斜至内圆边七尺六寸。欲就古迹修之，欲求圆，方面，方斜各几何？

答曰：池圆径三丈六尺六寸；方面三丈六尺六寸；方斜五丈一尺八寸；

术曰：以少广求之，投胎术入之。

斜自乘，倍之为实。倍斜为益方，以半为从隅，开投胎平方，得径；又为方面，以隅并之，共为方斜。

草曰：以斜 76 寸自乘得 5776，倍之得 11552 寸为实。倍斜 76 寸得 152 为益方。

斜	76 寸		取 10 倍
实		$76^2 \times 2 = 11552$ 寸	115520
益方		$2 \times 76 = 152$ 寸	1520
从隅	1/2		5

以半寸为从隅，开平方：

置实 115520 于上，益方 1520 于中，从隅 5 分于下。

超步，约得百，乃于实上，商置 300 寸；

以商、隅相生，得 1500，为正方，以消益方 1520，其益方余 20。

次与商相生，得 600，投入实，得 121520。

一变	首商 $x = 300$
实	$(5x - 1520)x - 115520 = -121520$ (投胎)
益方	$5x - 1520 = -20$
从隅	5

又商、隅相生，又得正方 1500，内消负方 20 讫，余 1480 为从方。

二变	首商 $x = 300$
实	-121520
益方	$5x - 20 = 1480$
从隅	5

乃于上商之次，续商，置 60 寸；

与隅相生，增入正方，得 1780。乃命验续商，除实讫，实余 14720。

一变	次商 $x = 60$
实	$(5x + 1480)x - 121520 = -14720$ (正常)
益方	$5x + 1480 = 1780$
从隅	5

次以商生隅，增入正方，为 2080。

二变	次商 $x = 60$
实	-14720
益方	$5x + 1780 = 2080$
从隅	5

乃于续商之次，又三商，置 6 寸；与隅相生，增入正方，为 2110。

一变	三商 $x = 6$
实	$(5x + 2080)x - 14720 = -2060$ (正常)
益方	$5x + 2080 = 2110$
从隅	5

乃以商生隅，增入正方，为 2140；

二变	三商 $x=6$
实	-2060
益方	$5x+2110=2140$
从隅	5

商除实，讫，实不尽 2060，不开，乃命为分子。又并隅，共得 2145，为分母，以分母、分子求等，得 5，为等数，皆以 5 约，其分子、分母之数，为 429 分寸之 412，通命之，得池圆径，及方面，皆 3 丈 6 尺 6 寸 429 分寸之 412。

又倍隅斜 7 尺 6 寸，得 1 丈 5 尺 2 寸，并池圆径 3 丈 6 尺 6 寸，共得 5 丈 1 尺 8 寸 429 分寸之 412，为方斜。

分子		$2060=5 \times 412$
分母		$2145=5 \times 429$
隅斜	76 寸	
池圆径	366 寸	
方面	366 寸	
方斜		$2 \times 76 + 366 = 518 + 412/429$ 寸

版权所有！

欢迎传播！

禁止制作为
商品销售！

“营建第七”现代文翻译

第 55 题：筑城的工程预算

问题：淮南东路某个郡，要建筑一座正方形城池，城墙周长 1510 丈；城墙外，离开城墙脚 2 丈的地方，环城筑建羊马墙；羊马墙外，环城开挖护城河，以取土作为城墙、羊马墙的土芯坯；为了使得计算简单易行，仍然取羊马墙的周长为 1510 丈；

城墙：身高 3 丈，上底面阔 3 丈，下底面阔 7 丈 5 尺；只是外立面用砖包砌；

羊马墙：身高 1 丈，上底面阔 5 尺，下底面阔 1 丈；只是外立面用砖包砌；

开濠：上面阔 30 丈，下底面阔 25 丈；

女头墙用砖砌，由鹊台，座子，肩子，帽子构成，帽子上开 3 眼箭窗；女头墙的总高度 5 尺 5 寸，总宽度 3 尺 6 寸；女头墙每长 1 丈，它上面的鹊台：长 1 丈，高 5 寸，宽 5 尺 4 寸；它上面的座子：长 1 丈，高 2 尺 2 寸 5 分，宽 3 尺 6 寸；它上面的肩子：高 1 尺 2 寸 5 分，宽 3 尺 6 寸，长 8 尺 4 寸；它上面的帽子：高 1 尺 5 寸，宽 3 尺 6 寸，长 6 尺 6 寸；箭窗：各宽 6 寸，长 7 寸 5 分，外眼比内眼斜低 3 寸；

挖出的土积与夯实后的土积的比率为 4 比 3；

石版每片：长 5 尺，宽 2 尺，厚 5 寸；砖每片：长 1 尺 2 寸，宽 6 寸，厚 2 寸 5 分；

城墙四周向下挖 1 尺 5 寸，铺回 3 层石版，作为基础；

从地基起，城墙身分 3 层，每层高 1 丈；下层 1 丈，进伸铺砌砖 9 幅；中层 1 丈，进伸铺砌砖 7 幅；上层 1 丈，进伸铺砌砖 5 幅；每幅的宽为 6 寸；

城墙脚，用砖加砌护城墙，长与城墙周长相同；护城墙：高 3 尺，靠近地面部分脚高 1 尺 5 寸，进伸铺砌砖 3 幅；剩余部分高 1 尺 5 寸，进伸铺砌砖 2 幅；每幅的宽为 1 尺 2 寸；每长 1 丈，所用木料、物料：

永定柱：20 条，长 3 丈 5 尺，径 1 尺；每条：栽埋工 7 分，串凿工 3 分；

爬头拽后木：共 80 条，长 2 丈，径 7 寸；每条：作工 3 分，串凿工 2 分；

转子木：200 条，长 1 丈，径 3 寸；每条：作工 2 分，搬扛工 2 分；

红檁木：2000 个，每个长 1 尺，方 1 寸；每个：工 7 毫；

红索：2000 条，长 1 丈，径 5 分；每条：工 9 毫；

石版：10 片，匠 1 工，搬 1 工；每片：灰 10 斤；

搬灰：1000 斤，用 1 工；

砖匠：每工砌 700 片；

石灰：每砖 1 斤；

芦苇：150 领；

青茅：500 束；

丝竿笙竹：50 条；

笥子水竹：10 把，每把 2 尺围；

锹手，锹手，担土，杵手，每工：各 60 尺；

火头，一名，负责 60 工；

部押濠寨，一名，管理 120 工；

每工每日开支：新会，100 文；米，2 升 5 合；

请问：城墙夯实后的土积，羊马墙夯实后的土积，开挖护城河的土积，护城河的深，总共用去的木，竹，檁，索，砖，石，灰，芦，茅的数量，人工钱数，米数，各是多少。

【编者注：此题问题颇多：

(1)“淮郡”不明，《秦九韶与数书九章》379 页称为河南省淮阳，这应该不正确；淮阳的纬度线比淮阴还要靠北一些；淮阳当时叫做陈州，属南京路（北宋时属京西北路），南

宋时已经是金国领土了。从秦九韶活动范围分析，这个“淮”应该是淮南东路，或者淮南西路；这个城，很可能是泰州城（淮南东路，1939年拆除），泗州城（淮南东路，1680年被彻底淹没），或者寿春城（淮南西路，目前保存较完善）中的某一个。从题中“每长一丈，用永定柱：二十条，爬头拽后木：共八十条，转子木：二百条，经檄木：二千个，”来看，筑城地点土质比较松软。而泗州城旧有东、西两座土城，中隔汴河，有汴河桥相连，明代初期始将二城合一，建成砖石城。因此估计该城应该是泰州城。

(2) 外筑羊马墙，开濠，均应该离开城墙一段距离才行，这可据《武经总要》和《守城机要》确定；

(3) 城墙身进伸砖，护险墙进伸砖，题目交代得不清楚；《秦九韶与〈数书九章〉》380页图4的理解正确。

(4) “通身用砖包砌”与“草曰”不符，应该是“仅外立面用砖包砌”。《文渊阁四库全书·数学九章》797-539页的理解正确。】

【原文】计定城筑

问淮郡筑一城，围长一千五百一十丈；外筑羊马墙，开濠，长与城同；城身高三丈，面阔三丈，下阔七丈五尺；羊马墙高一丈，面阔五尺，下阔一丈；开濠面阔三十丈，下阔二十五丈；女头鹊台共高五尺五寸，共阔三尺六寸，共长一丈；鹊台长一丈，高五寸，阔五尺四寸；座子长一丈，高二尺二寸五分，阔三尺六寸；肩子高一尺二寸五分，阔三尺六寸，长八尺四寸；帽子高一尺五寸，阔三尺六寸，长六尺六寸；箭窗各阔六寸，长七寸五分，外眼比内眼斜低三寸；取土用穿四竖三为率；周回石版，铺城脚三层，每片长五尺，阔二尺，厚五寸；通身用砖包砌，下一丈九幅；中一丈七幅；上一丈五幅；砖每片长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分；护险墙高三尺，阔一尺二寸，下一尺五寸，铺砖三幅；上一尺五寸，铺砖二幅；每幅之阔，为砖之长数；

每长一丈，用木物料：永定柱：二十条，长三丈五尺，径一尺；每条：栽埋工七分，串凿工三分；爬头拽后木：共八十条，长二丈，径七寸；每条：作工三分，串凿工二分；转子木：二百条，长一丈，径三寸；每条：作工二分，搬扛工二分；经檄木：二千个，每个长一尺，方一寸；每个：工七毫；经索：二千条，长一丈，径五分；每条：工九毫；石版：一十片，匠一工，搬一工；每片：灰一十斤；搬灰：千斤，用一工；砖匠：每工砌七百片；石灰：每砖一斤；芦蓆：一百五十领；青茅：五百束；丝竿篁竹：五十条；筒子水竹：一十把，每把二尺围；斨手，锹手，担土，杵手，每工：各六十尺；火头，一名，受六十工；部押濠寨，一名，管一百二十工；每工日支：新会，一百文；米，二升五合；欲知：城墙坚积，濠积，濠深，共用木，竹，檄，索，砖，石，灰，芦，茅，人工钱，米数，各几何。

第56题：建筑楼橹的功料预算

问题：筑城池，需要建筑楼橹60处，每处10间；建筑楼橹一处的用料，用工如下：

防险墙高4尺，长3丈，厚度由砖长决定；

卧牛木11条，长1丈6尺，径1尺1寸；

搭脑木11条，长2丈，径1尺；

防壕柱11条，长1丈6尺，径1尺2寸；

副壕柱11条，长1丈5尺，径1尺2寸；

挂甲柱11条，长1丈三尺，径1尺1寸；

虎蹲柱11条，长7尺5寸，径1尺；

仰艘板木45条，长1丈，径1尺2寸；

平面板木35条，长1丈，径1尺2寸；

串挂枋木73条，长5尺，径1尺；

仰板四八砖，结砌三层，计6千片，每片用灰半斤，共用纸觔100斤；

防险墙砖长 1 尺 2 寸，阔 6 寸，厚 2 寸半，每片用灰 1 斤；

中板瓦 7500 片，一尺钉 8 个，八寸钉 270 个，五寸钉 100 个，四寸钉 50 个；丁环 20 个；用工 396 工。请问：楼橹 60 处总共用料，总共用工，各是多少。

【编者注：楼橹 (lóulǚ) [a movable wooden watchtower] 守城或攻城用的高台战具。

筋 (jīn) 筋络。同“筋” [tendon]。如：筋骨(即“筋骨”)；筋力(筋骨之力)；筋脉(筋骨脉络)；筋节(筋腱骨节。比喻着力或事物的关键)；纸筋，用于做纸浆的废纸；

“每处一十间”没有用处；后面的数据实际上是楼橹一处的用料，用工，故增加“楼橹一处用料，用工如次：”字样。】

【原文】楼橹功料

问筑城，合盖楼橹六十处，每处一十间，防险墙高四尺，长三丈，厚随砖长；卧牛木一十一条，长一丈六尺，径一尺一寸；搭脑木一十一条，长二丈，径一尺；防壕柱一十一条，长一丈六尺，径一尺二寸；副壕柱一十一条，长一丈五尺，径一尺二寸；挂甲柱一十一条，长一丈三尺，径一尺一寸；虎蹲柱一十一条，长七尺五寸，径一尺；仰艘板木四十五条，长一丈，径一尺二寸；平面板木三十五条，长一丈，径一尺二寸；串挂枋木七十三条，长五尺，径一尺；仰板四八砖，结砌三层，计六千片，每片用灰半斤，共用纸筋一百斤；防险墙砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸半，每片用灰一斤；中板瓦七千五百片，一尺钉八个，八寸钉二百七十个，五寸钉一百个，四寸钉五十个；丁环二十个；用工三百九十六人。欲知共用工料各几何。

第 57 题：建造石坝的工程预算

问题：建造石坝一座，长 30 丈，水深 4 丈 2 尺，要求面阔 3 丈；石版每片长 5 尺，阔 2 尺，厚 5 寸，用灰 10 斤；每层高 2 尺，每层阔差 1 尺；石匠每工砌 9 片，搬扛每工搬 5 片，用工 4 人，搬灰兼用，每工搬灰 110 斤；火头每名管 60 人，部押每名管 120 人；所用石版必须保持原来尺寸，不许凿动。请问：石坝下阔，以及总用石版数量，并总用灰数量，总共用工人数，各是多少。

【编者注：火头：做饭的火夫，掌管炊事的人。部押：监管人员。】

【原文】建造石坝

问创石坝一座，长三十丈，水深四丈二尺，令面阔三丈，石版每片长五尺，阔二尺，厚五寸，用灰一十斤；每层高二尺，差阔一尺；石匠每工九片，搬扛五片，用工四人，搬灰兼用，每工一百一十斤；火头每名管六十人，部押每名管一百二十人；所用石须依原段，不许凿动。欲知坝下阔，及用石，并灰，共工各几何。

第 58 题：通浚河渠的工程预算

问题：开通运河，就挖出的土筑堤。要求河渠面宽 6 丈，底部宽 4 丈；河渠上端深 8 尺，河渠下端深 1 丈 6 尺；堤长 48 里，堤的下广 2 丈 4 尺，上广 1 丈 8 尺，堤长与河长相等，高未知；挖出的土积与夯实后的土积的比率为 4 比 3；秋程人功：每名役工自行开挖，自行运积土，自行夯实墟土，合计为一个常数值 60 尺；堤筑到一半以后，开始架设棚道取土，上、下棚道的人工减去 5 分之 1。限一个月完成。取：步法 60 寸，里法 360 步；请问：河中挖出的土的体积，及堤的体积尺寸，总共用的人工，以及每日的役工数，堤的高度，各是多少。

【编者注：本题中，应该取：步法 60 寸，里法 360 步；否则，无法解释草曰中的：尺里法 2160 尺；故增入。棚道：用竹、木搭成的脚手架；

河渠本身不是标准的棱柱体，而是拟柱体，恰好可看作是取渠深平均值为高的棱柱体，体积计算公式由秦九韶在术中给出。图形可参考 Ulrich_Libbrecht: Chinese mathematics in the thirteenth century 113 页 Figure 20;

《数书九章新释》468 页：【注 1】以常理论之，运河筑堤，应就两岸筑之。本问仅筑一

岸之堤，虽于常情未合，吾人“即同以明使用土方之理”可已。】

【原文】计浚河渠

问开通运河，就土筑堤。令面广六丈，底广四丈，上流深八尺，下流深一丈六尺，堤长四十八里；其堤下广二丈四尺，上广一丈八尺，长与河等，未知高；以“墟四坚三”为率，秋程人功，每名自开运积筑墟坚，共积常六十尺；筑堤至半，为棚道取土，上、下工减五分之一，限一月毕。欲知河积，及堤积尺，共用工，并日役工数，及堤高各几何。

第 59 题：建筑清台的工程预算

问题：创建清台一所。土坯体积正高 12 丈；上广 5 丈，袤 7 丈；下广 15 丈，袤 17 丈；其中的“袤”是东西走向，“广”是南北走向。

秋程人功：人日均行程数量为 60 里，里法 360 步。

斲土，锹土，每工各 200 尺；筑土：每工 90 尺；

每担土壤 1 尺 3 寸，往来 160 步，其中包含棚道 40 步；上下棚道：筑高至三分之一时，棚道 3 步相当于平道 5 步；至二分之一时，棚道 3 步相当于平道 7 步；至三分之二时，棚道 2 步相当于平道 5 步；途中小憩，每 10 步加 1 步；每次装卸，加 20 步；即可确定往返一次的工作量（步）。

如今，由甲、乙、丙三县差派劳动力：甲县靠近清台，税力 133866；乙县离开清台 120 里，税力 237984；丙县离开清台 180 里，税力 312354；全部按照距离的远近，税力的多少，平均分配任务。

清台下铺石脚 7 层，先用砖砌台身；然后用砖叠砌转道，环绕清台周围建 5 条转道，转道阔 6 尺；必须让南、北 2 条平道，东、西 3 条峻道相间；转道从清台的艮隅开始，于东外峻道向南顺势而升，再由巽隅以西右转，为南平道，自坤隅于西外峻道向北顺势而升，再由乾隅以东右转，为北平道，再回到东里峻道顺势而升，至巽隅处登上台顶。

其中，东里峻道艮隅，与北平道两隅，及西峻道乾隅之高，都取为清台高度的 4 分之 3；

西峻道坤隅，与南平道两隅，东外峻道巽隅之高，都取为清台高度的 5 分之 2；

峻道每级的高为 6 寸；其东里峻道级数，取清台高度的 4 分之 1；东外峻道级数，取清台高度的 5 分之 2；余下的是西峻道级数；

石长 5 尺，阔 2 尺，厚 5 寸；砖长 1 尺 2 寸，阔 6 寸，厚 2 寸 5 分；

请问：土坯的土积，往返一次的工作量（步），每工人到土，及总用功，各县劳动力人数；砖、石数量；峻道、平道的高，长，级数，踏踪（每一级的平距），各是多少。

【编者注：清台，即天文观测台；原文所配示意图错误；《文渊阁四库全书·数学九章》797-522 页已经更正；《秦九韶与〈数书九章〉》383 页图 7 正确。Ulrich_Libbrecht: Chinese mathematics in the thirteenth century 458 页 Figure 63 正确，457 页 Figure 61 错误。

“秋程，人日行六十里”应该是“秋程人功，人日行 60 里”，计算的是人日均行程数量；“03 推计土功”春程人功平方六十尺，“58 计浚河渠”秋程人功积常六十尺，计算的是人日均挖土方、运送、夯实墟土的合计数量；故此数值上差异颇大，而且与《九章算术·商功》中的数据也不相同，应该与各自的定义相关。

定一返步计算公式：[棚道步×棚当平比率+(往来步-棚道步)](1+1/脚踏)+载输步；

本章许多概念的定义都来自《九章算术·商功》，特别是第一题和第二一题。

本题与唐·王孝通《缉古算经》的第二题渊源颇深；复杂度则超越以往各题。

峻道，高而陡峭的斜道；

“西道级数，取强半。”是错误的，实际上不是 3/4，应该是 $3/4 - 2/5 = 7/20$ ；

“每工人到土”计算公式：(秋程×每担土壤)÷定一返步=每工人到土；】

【原文】计作清台

问创筑清台一所，正高一十二丈，上广五丈，袤七丈，下广一十五丈，袤一十七丈，其

袤当东西，广当南北。秋程，人日行六十里，里法三百六十步。镢土锹土，每工各二百尺，筑土，每功九十尺。每担土壤一尺三寸，往来一百六十步，内四十步，上下栅道，筑高至少半，其栅三当平道五，至中半，三当七，至大半，二当五，踟蹰之间，十加一，载输之间，二十步定一返。今甲乙丙三县差夫，甲县附郭，税力一十三万三千八百六十六。乙县去台所一百二十里，税力二十三万七千九百八十四。丙县去台一百八十里，税力三十一万二千三百五十四。俱以道里远近，税力多少，均科之。台下铺石脚七层，先用砖包砌台身，厚六尺，铺砌台面，厚六寸。次用砖叠砌转道，周围五带，并阔六尺，须令南北二平道，东西三峻道相间，始自台之良隅，于东外道向南顺升，由异隅以西右转，周回历北复东，再升东里道，至异隅乃登台顶，其东里道良隅，与北平道两隅及西道乾隅之高，皆以强半，其西道坤隅，与南道两隅，东外道异隅之高，皆以五分之二。峻道每级履高六寸，其东里道级数，取弱半，东外道级数，取五分之二，西道级数，取强半。石长五尺，阔二尺，厚五寸。砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分，欲知土积，定一返步，每功人到土，及总用功，各县起夫，砖石，峻平道，高长级数，踏纵，各几何？

第 60 题：气势盛大的建筑工程

问题：军营造地基，地基长 21 丈，阔 17 丈；先让 7 人夯实地基 3 丈，用去 2 日功夫；现在，离选定的大吉日子不多了，要求 3 日后完成地基工程，请问：每日应该收杵手多少。

【编者注：涓吉（Juānji）：选择大吉的日子；

堂皇（tánghuáng）[stately;grand;magnificent;dignified]：形容气势盛大。】

【原文】堂皇程筑

问有营造地基，长二十一丈，阔一十七丈；先令七人筑坚三丈，计功二日；今涓吉立木有日，欲限三日筑了，每日合收杵手几何。

第 61 题：计算铺砌砖的数量

问题：收到交来的六门砖 15 垛，每垛高 5 尺，阔 8 尺，长 1 丈；六门砖每片长 8 寸，阔 4 寸，厚 1 寸；现在，铺砌地面已经使用的数量是：

堂屋 3 间，各深 3 丈，总共阔 5 丈 2 尺；

书院 6 间，各深 1 丈 5 尺，各阔 1 丈 2 尺；

后阁 4 间，各深 1 丈 3 尺，内 2 间阔 1 丈，次 2 间阔 1 丈 5 尺；

亭子地面 11 所，各方 1 丈 4 尺；

请问：现有砖，已用砖，外余砖，各是多少。

【编者注：根据“草曰”：“欲砌地面，使用”实际上是“今砌地面用去：”，故改之。】

【原文】砌砖计积

问有交到六门砖一十五垛，每垛高五尺，阔八尺，长一丈；其砖每片长八寸，阔四寸，厚一寸；欲砌地面，使用堂屋三间，各深三丈，共阔五丈二尺；书院六间，各深一丈五尺，各阔一丈二尺；后阁四间，各深一丈三尺，内二间，阔一丈，次二间，阔一丈五尺；亭子地面一十所，各方一丈四尺；欲知见有今用外余砖各几何。

第 62 题：制作容量相同的方斛和圆斛

问题：有圆形囤米 25 个，其中：

大囤 12 个：上径 1 丈，下径 9 尺，高 1 丈 2 尺；

小囤 13 个：上径 9 尺，下径 8 尺，高 1 丈；

现有出租斗一只，口方 9 寸 6 分，底方 7 寸，正深 4 寸，内部刻有数量标准尺寸，是标准的一斗容器；现要求制作容积是五斗的方斛，及圆斛各 2 只，要求两个斛的口径，正深，大小都不相同；请问：每个斛的尺寸各是多少，以及囤积米的总数量是多少。

【编者注：

囤（dùn）：用竹篾垫子或荆条编织物或用席子等围成的盛粮食的围栏 [grain bin]。

“里明准尺”应该是“裹（guǒ，携带[bring]）明准尺；”】

【原文】圜积量容（方圆同积）

问有圆囤米二十五个，内有大囤一十二个，上径一丈，下径九尺，高一丈二尺；小囤一十三个：上径九尺，下径八尺，高一丈；今出租斗一只，口方九寸六分，底方七寸，正深四寸，并里明准尺；令准数造五斗方斛及圆斛各二只，先令二斛口径正深，大小不同，各得多少，及囤积米几何。

第 63 题：修复古池

问题：有一个古池，外面是正方形，里面内接圆池。现在毁坏了，只剩余一个角落，从正方形的顶点，沿对角线至内圆边的距离是 7 尺 6 寸。要求按照古迹尺寸修复，请问：圆的直径，正方形边长，正方形对角线长，各是多少。

【编者注：堙圯（yīn pǐ），堵塞，毁坏。**】**

【原文】古池推元

问有方中圆古池，堙圯止余一角。从外方隅，斜至内圆边七尺六寸。欲就古迹修之，欲求圆方面方斜各几何。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

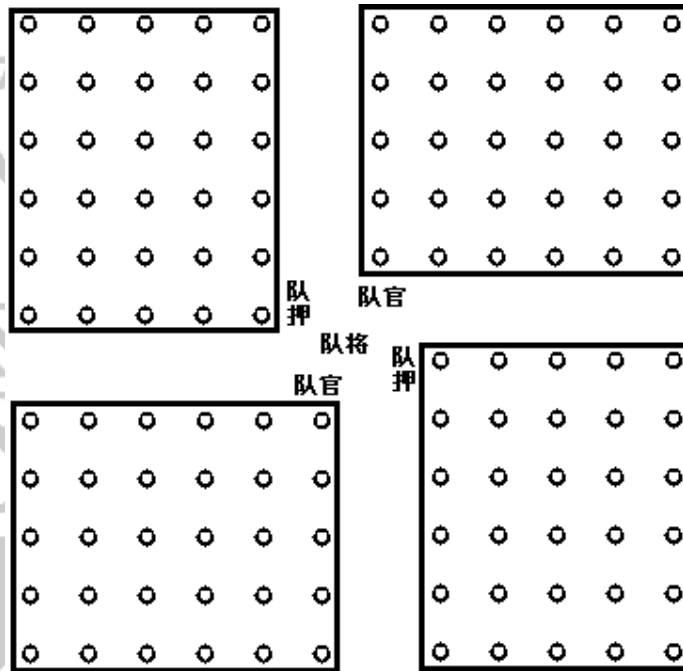
军旅第八

64 计立方营，65 方变锐阵，66 计布圆阵，67 圆营敷布，68 值推原
69 均敷徭役，70 军器功程，71 计造军衣，72 先计军程

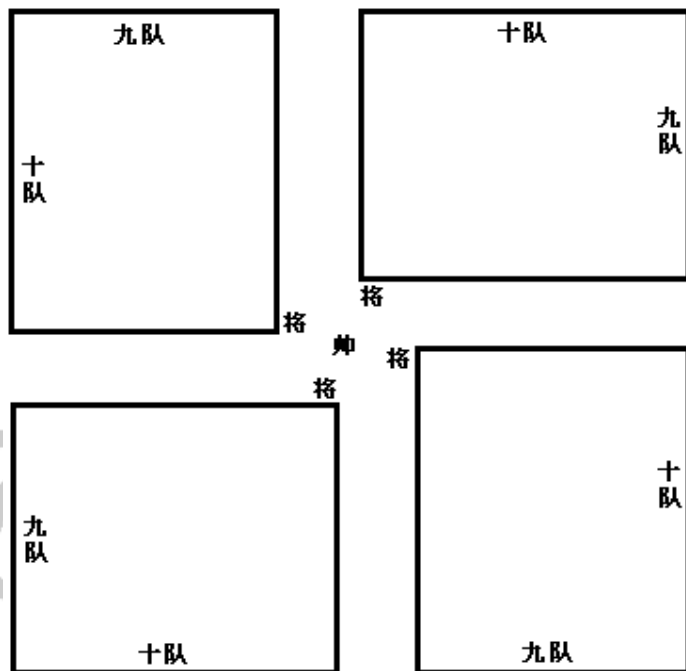
第 64 题：计立方营

问：一帅将四将，每将将九十九队；每队一百二十五人，含队将一人，队押二人，队官二人；遇暮，列队，立营；人占立地方八尺，须令队中间容一人之阔之通道，队将居中央，队押，队官环队将而立，称之为队阵；次以队阵为元，依队阵要求复立营阵，须令阵中间容一队阵之阔之通道，帅居中央，将环之；欲知队阵，营阵一边人数，阵方，各几何。

答曰：队阵一边一十一人，队阵方九十六尺；
营阵一边二百九人，营阵方一千九百二十尺。



方队阵图



方营阵总图

术曰：以少广求之。

置人占方幂，乘每队人，为队实；以一为隅，开平方，所得为队阵一边人数[或开不尽就为全尽]；

次置队阵数，四因之，增一帅四将，为实；以二为从隅，开平方，得率，以乘队阵方面，为营方面[开不尽弃之]。

草曰：置每队 125 人，为实；以 1 为隅，开平方；

步法：常超一位，今隅超一度，至实之百下，约实；

置商 10，以商 10 生隅 1，得 10，为方；乃命上商除实，讫，实余 25；

一变	首商 $x = 10$
实	$(x + 0)x - 125 = -25$
方	$x + 0 = 10$
隅	1

次以商生隅，入方，得 20，毕；

二变	首商 $x = 10$
实	-25
方	$x + 10 = 20$
隅	1

方一退，隅再退之，复于上商之次，续商 1；

乃以续商 1 生隅 1，入方，得 21；

一变	次商 $x = 1$
实	$(x + 20)x - 25 = -4$
上	$x + 20 = 21$
隅	1

乃命续商除实，讫，得 11 人，为队阵一边人数；

不尽 4 人，辈之，就为 1 人，为队中间容一人之通道之阔；

或曰：队阵方面站 12 人；以人立 8 尺因之，得 96 尺，为队阵方面数。

次置 99 队，乘 4，得 396；增 1 帅 4 将，得 401，为实；以 2 为从方，1 为从隅，开平方，步法：以从方进一位，至实之十下，隅超一位，至实之百下，乃约；实置商 20，生隅 1，入方，得 22，乃命上商除实，讫，余 39；不尽弃之；

一变	首商 $x = 20$
实	$(x + 2)x - 401 = -39$
从方	$x + 2 = 22$
从隅	1

所得商 20，即为营阵方面队阵数，以队阵方面数 96 因之，得 1920，为营阵方面数；

其中一队阵，为阵中间容一队阵之通道，则营阵方面队阵数实为 19；以队阵一边人数 11 因之，得 209 人，为营阵一边人数；

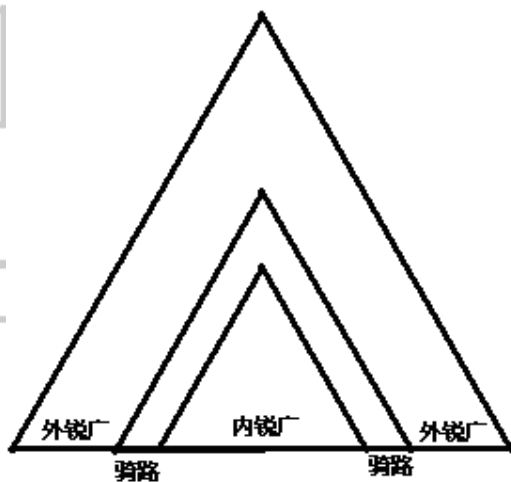
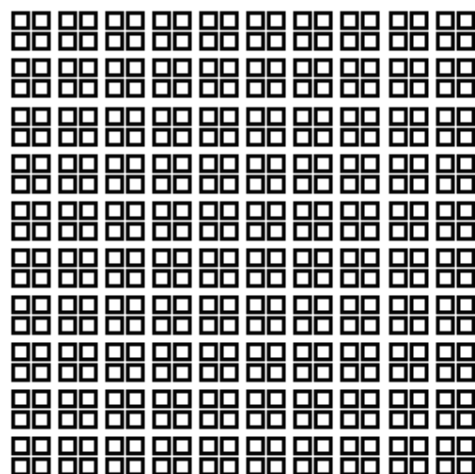
营阵方面队阵数	20
营阵方面数	96
营阵方面数	$20 \times 96 = 1920$
营阵方面队阵实数	19
队阵一边人数	11
营阵一边人数	$19 \times 11 = 209$

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 65 题：方变锐阵

问：步兵五军，军一万二千五百人，作方阵，人立地方八尺；欲变为前后锐阵，阵后阔，令：锐后阔约多原方面半倍；外锐两边广约与内锐广同；阵间仍容骑路五丈以上，顺锐形出入；内锐阵加骑路构成中锐阵，为虚；欲知方阵面阔，骑路阔，内锐阵广，外锐两广，及前后锐阵布兵，各几何。

答曰：方面二百丈；方面布兵二百五十人；
锐后广三百丈，列共三百七十五人；锐前广三百丈，列共三百三十三人；
骑路二条，锐前广各阔一十六丈八尺；
内锐阵广：一百三十五丈二尺；列共一百六十九人；
计布兵：一万四千三百六十五人；
外锐两广：各六十五丈六尺；各列八十二人；
计布兵：四万五千八百四十七人，余一人补兵；



术曰：以少广求之，堆积入之。
置兵，开平方，得方面人数[开不尽方为补队]，以人立尺数乘之，为原方面；
置原方面，以欲多数加之，为锐后阔，亦为通长；
反复以堆积验之，即可调得：内锐阵一边人数，锐后阔上骑路一边人数，外锐两广一边人数；

以人立地方八尺，乘各边人数，得各边丈尺数。

草曰：置一军 12500，以 5 军因之，得总兵数 62500 人，为实，开平方：

一变	首商 $x=200$	二变	首商 $x=200$
实	$(x+0)x-62500=-22500$	实	-22500
上	$x+0=200$	上	$x+200=400$
隅	1	隅	1

次商 $x=50$

一变	次商 $x=50$
实	$(x+400)x-22500=0$
上	$x+400=450$
隅	1

得 250 人；以人立 8 尺乘之，得方面 200 丈；

置 200 丈，加半倍 100 丈，得 300 丈，为锐阵后阔，亦为锐阵道长；以人立 8 尺约之，得 375 人，为锐后阔布兵。今验之：以 375 加 1，余 374，以乘 375，以半之，得 70500 人，为锐阵布兵人数。总兵人数 62500，多 8000 人，乃骑路容人数也，倍之，得 16000，为骑路实。

以 4 约锐后阔布兵 375 人，得 93 人 4 人分之 3，为外锐两广一边人数（待调整）；内锐阵广人数为 187 人 2 人分之 1；

以 187 人 2 人分之 1 加 1，得 188 人 2 人分之 1，以加 187 人 2 人分之 1，得 376；以招法之差 4 乘之，得 1504，为骑路法；实如法而一，得 10 人，余 960，与 1504 求等，得 32，约之，得 10 人 47 人分之 30，为锐后阔上骑路一边人数之半；倍之，得 21 人 47 人分之 13，不尽弃之，取 21 人，为锐后阔上骑路一边人数；

以减 187 人 2 人分之 1，得 166 人 94 人分之 21，不尽弃之，取 166 人，为内锐阵广人数（待调整）；以半之，得 83+21/188，不尽弃之，取 83 人，为外锐两广一边人数（待调整）；

复验之：倍 83 得 166 人，倍 21 得 42 人，并之，得 208 人，复加 166 人，得 374 人，为锐后前阔可立人数，与锐后阔布兵 375 人不合；

总兵数		$5 \times 12500 = 62500$ 人
方面立人	250 人	
人立	8 尺	
方面阔		$250 \times 0.8 = 200$ 丈
锐阵后阔		$200 + 200 \div 2 = 300$ 丈
锐阵后阔立人		$300 \times 10 \div 8 = 375$ 人
锐阵立人		$375 \times (375 + 1) \div 2 = 70500$ 人
骑路容人数		$70500 - 62500 = 8000$ 人
骑路实		$2 \times 8000 = 16000$ 人
外锐两广一边人数		$375 \div 4 = 93 + 3/4$ 人（待调整）
内锐阵广人数		$2 \times (93 + 3/4) = 187 + 1/2$ 人（待调整）
招法之差	4	
骑路法		$4 \times [(187 + 1/2 + 1) + 187 + 1/2] = 1504$ 人
骑路一边人数之半		$16000 \div 1504 = 10 + 30/47$ 人
骑路一边人数	21 人	$2 \times (10 + 30/47) = 21 + 13/47$ 人
内锐阵广人数	166 人	$187 + 1/2 - 21 = 166 + 21/94$ 人（待调整）
外锐两广一边人数		$166 \div 2 = 83$ 人（待调整）
锐后阔布兵		375 人
锐后前阔可立人数		$2 \times 83 + 2 \times 21 + 166 = 374$ 人

现以 1 人入内锐阵广人数，得 167 人；复验之：以 167 加 1，得 168，以乘 167，得 28056，以半之，得 14028，为内锐阵人数；以 167 并 42，得 209 人，为中锐阵一边人数；以 209 加 1，得 210，以乘 209，得 43890，以半之，得 21945，为中锐阵人数；以 70500，并 14028，减 21945，得 62583 人，多于总兵 62500 人，仍不合；

内锐阵广人数		调整为 167 人
外锐两广一边人数	83 人	(待调整)
内锐阵人数		$167 \times (167 + 1) \div 2 = 14028$ 人
骑路一边人数	21 人	
中锐阵一边人数		$167 + 2 \times 21 = 209$ 人
中锐阵人数		$209 \times (209 + 1) \div 2 = 21945$ 人
总兵数	62500 人	
估计人数		$70500 + 14028 - 21945 = 62583$ 人，不合

现以外锐两广一边各 1 人，入内锐阵广人数，得 169 人；复验之：以 169 加 1，得 170，以乘 169，得 28730，以半之，得 14365，为内锐阵人数；以 169 并 42，得 211 人，为中锐阵一边人数；以 211 加 1，得 212，以乘 211，得 44732，以半之，得 22366，为中锐阵人数；以 70500，并 14365，减 22366，得 62499 人，少总兵 1 人，此 1 人，权为补兵；

外锐两广一边人数	82 人	减少 1 人
内锐阵广人数		调整为 $167 + 2 = 169$ 人
内锐阵人数		$169 \times (169 + 1) \div 2 = 14365$ 人
骑路一边人数	21 人	
中锐阵一边人数		$169 + 2 \times 21 = 211$ 人
中锐阵人数		$211 \times (211 + 1) \div 2 = 22366$ 人
总兵数	62500 人	
估计人数		$70500 + 14365 - 22366 = 62499$ 人
补兵人数		$62500 - 62499 = 1$ 人

以 70500 减 22366，得 48134 人，为外锐兵人数；

以人立 8 尺，乘 169，得 1352 尺，为内锐阵广；以乘 21，得 168 尺，为锐后阔上骑路一边广；以乘 82，得 656 尺，为外锐两广一边广；合问。

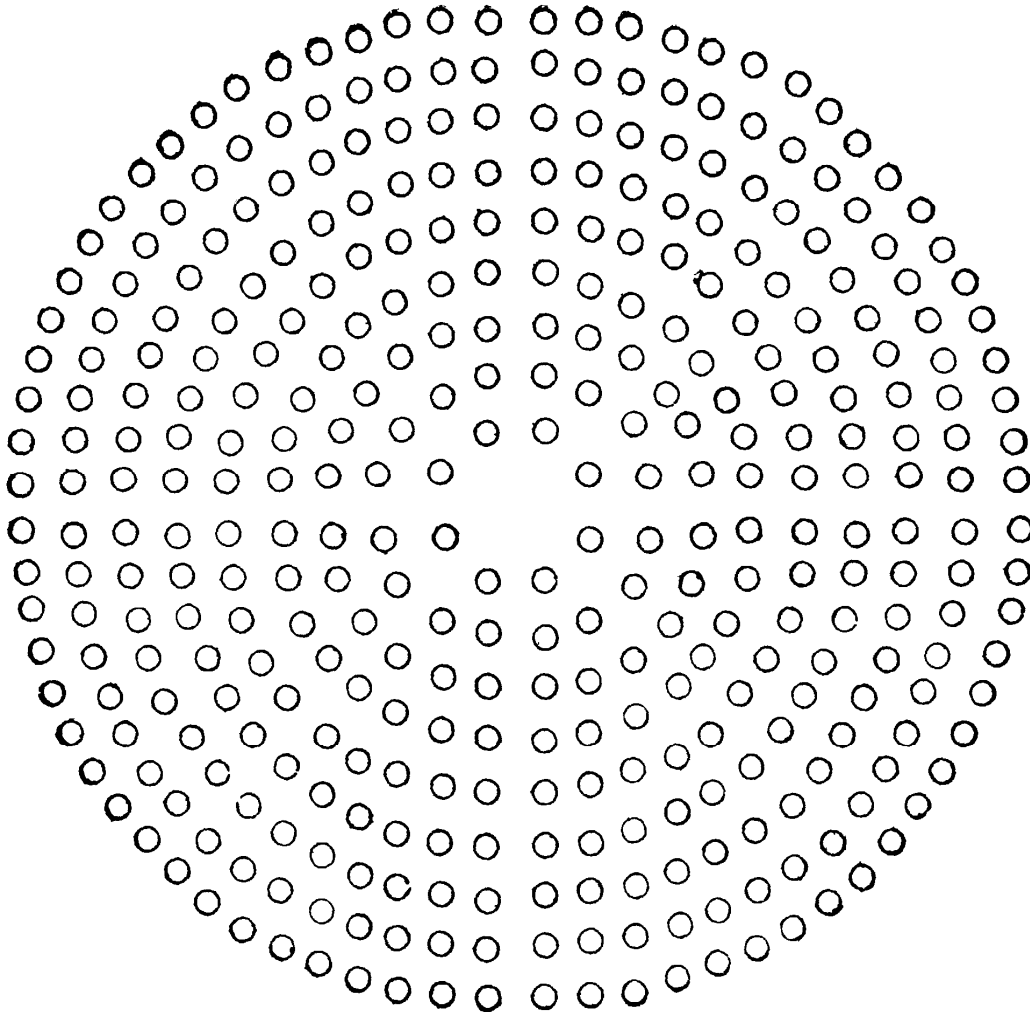
中锐阵人数	22366 人	
外锐兵人数		$70500 - 22366 = 48134$ 人
人立	8 尺	
内锐阵广人数	169 人	
骑路一边人数	21 人	
外锐两广一边人数	82 人	
内锐阵广		$8 \times 169 = 1352$ 尺
骑路一边广		$8 \times 21 = 168$ 尺
外锐两广一边广		$8 \times 82 = 656$ 尺

第 66 题：计布圆阵

问：步卒二千六百人，为圆阵，人立圆九尺，形如车辐，鱼丽布阵；阵重间，倍人立圆边尺数。须令内径七十二丈；圆法用“周三径一”之率。欲知阵重几数，及内周，外周，通径，并其上所立人数，各几何。

答曰：内周二百一十六丈立二百四十人；
外周三百二丈四尺立三百三十六人；
通径一百丈八尺；阵计九重[不尽八人]。

圖 營 圓



术曰：以商功求之。

以圆率因内径，为内周；以人立尺约之，为内周人数；乃以圆求差率为隅；次置内周人，减隅余，约从方，列兵数为实，开平方得重数，不尽为余兵；置重数减一，余因四，又乘圆边尺数，并内径，共为通径，以圆率因通径，得外周。

草曰：以圆率 3 因内径 72 丈，得 2160 尺为内周，以圆边 9 尺约内周，得 240 为内周人数；乃以圆束差 6 为从隅，次置内周 240 人，减隅，余 234，为从方；列兵 2600 为实；

内径	720 尺	
内周		$3 \times 720 = 2160$ 尺
圆边	9 尺	

内周人数		$2160 \div 9 = 240$ 人
圆束差	6	从隅
从方		$240 - 6 = 234$
实	2600	

开平方，步法：从方进一位，隅法超一位，今方、隅皆不可超进，乃于实约商，置 9 重，以商生隅 6 得 54，增入从方内，共得 288，乃命上商 9 重，除实，讫，实余 8 人为余兵（精确值：9.02338222114154）；

一变	首商 $x = 9$	二变	首商 $x = 9$
实	$(6x + 234)x - 2600 = -8$	实	-8
从方	$6x + 234 = 288$	从方	$6x + 288 = 342$
从隅	6	从隅	6

副置 9 重，减 1，余 8，以 4 因之[馆按：9 重 8 间，径两端，应 2 因之，间倍于立步，又应 2 因之，今合为 4 因]，得 32；又乘圆边 9 尺，得 288 尺，并内径 720 尺，得 1008 尺，为通径；

又以圆率 3 因通径，得 3024 尺，为外周；次以圆边 9 尺为法，除外周尺数，得 336 人，为外周人数。合问。

圆边	9 尺	
内径	720 尺	
通径		$4 \times (9 - 1) \times 9 + 720 = 1008$ 尺
外周		$3 \times 1008 = 3024$ 尺
外周人数		$3024 \div 9 = 336$ 人

馆按：圆束环积有内周求重数法：置积为实，圆束差半之为从隅；又以半差减内周，余为从方，开平方，得重数。此圆束环积每层为倍差，故即以圆束差为从隅，减内周为从方也。

又按：周三径一，正与六边形相合，故人数，尺数，俱无奇零也。

第 67 题：圆营敷布

问：周制一军，欲布圆营九重，每卒立圆边六尺，重间相去，比立尺数倍之，于内摘差兵四分之一出奇，不可缩营示弱，须令仍用原营布满余兵。欲知原营内外周，及立人数，并出奇后，每卒立尺数，内、外周人数各几何。

答曰：周制一军：一万二千五百人；

出奇：三千一百二十五人；

原内周：八百四丈立一千三百四十人；

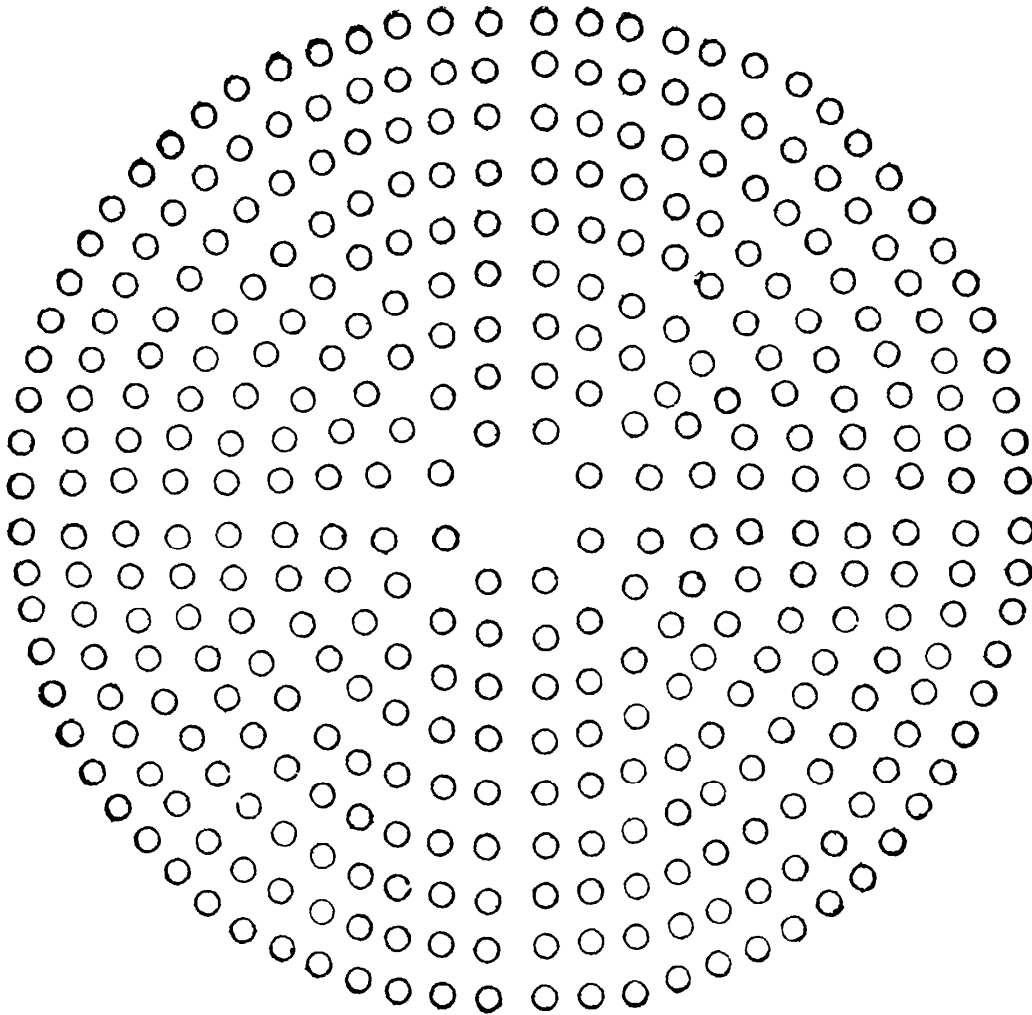
原外周：八百六十一丈六尺立一千四百三十六人；

出奇后，原外周立：一千八十九人；

原内周立：一千一十六人；

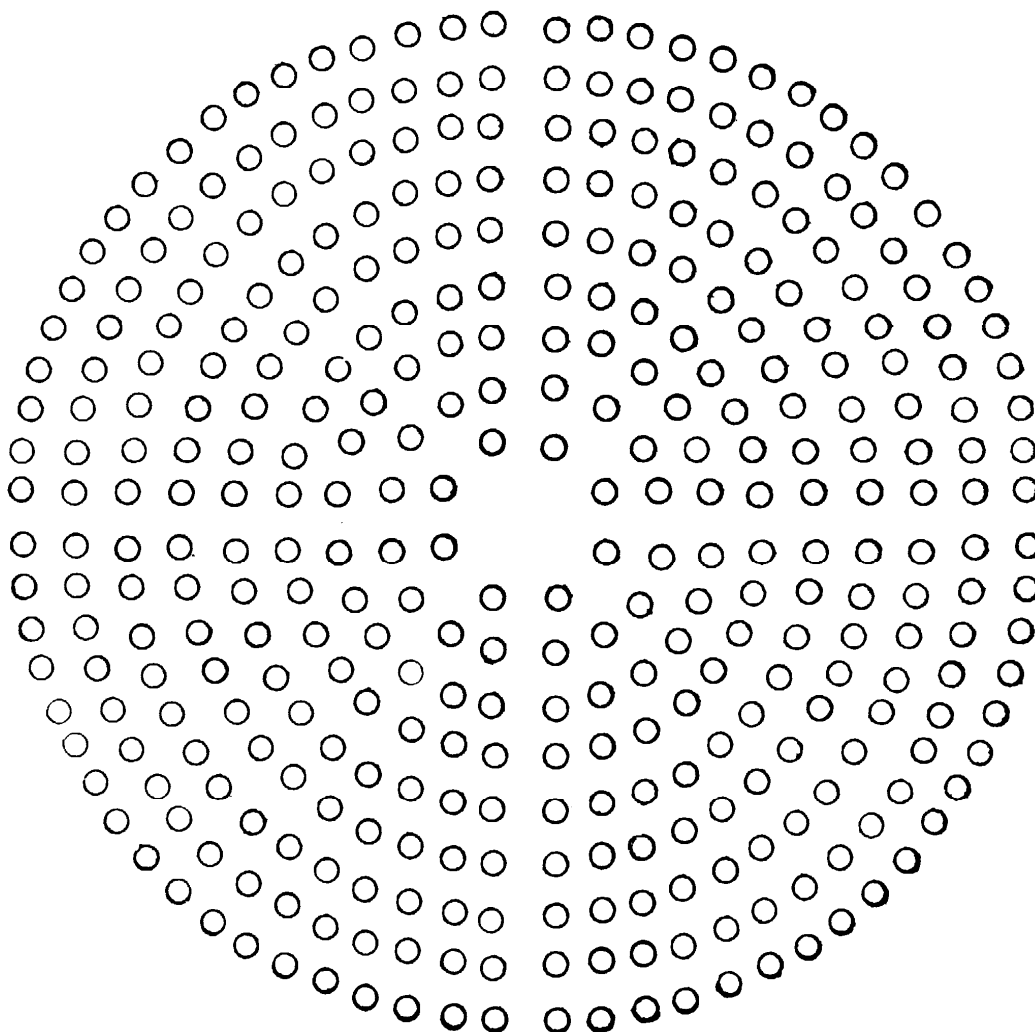
内外周人立：七尺九寸一分；

未 遣 奇 兵 圆 营 图
每 圈 七 人



已遣奇兵圓營圖

每圈六人



術曰：以商功求之。

置重數，減一，余為段；以段乘圓差，為衰；以衰乘重數，為率；

求圓周，以率減兵，余如重數而一，得內周人數，不滿為余兵；

以人立圓邊乘內周人，得內周尺，倍衰，乘圓邊，為泛；

以泛并內周尺，得外周尺，為實；如圓邊而一，得外周人；

求出奇后，以率加存兵，如重數而一，得外周人，不滿為余兵；

以外周人約原外周尺，得后立尺，以后立尺約原內周，得內周人。

館按：求圓陣，草中用圓束法。圓束，實六等邊形，非圓形也。蓋圓形重數相距等，則弧边上相距不等；弧边上相距等，則重數相距不等。惟圓束可并取相等，故用其法。至次陣減人數，不減營周尺數，則各重周上相距不能相等，故草中又以尺數求內周人數。然未免與圓束逐層相差數不合，亦僅取其大略也；又：旧用二圖，各點為圓周九重，今用一圖，點為六等邊形，三重，惟取易見，則二圖九重，其理一也。

草曰：置9重，減1，余8，為段；以乘圓束差6，得48為衰【館按：圓束每層差六，

今内外重数相距，倍于人立相距，则每层差 12 为倍差，常法重数减一，与半差相乘为衰。今倍差，故即与差数相乘为衰也】，乘 9 重，得 432，为率。

重数	9	
圆束差	6	$6 \times (9-1) = 48$ ，为衰
率		$9 \times 48 = 432$

求原周：以率 432，减周制一军 12500，余 12068，为实，如重数 9 而一，得 1340 人，为内周人数，不满 8 人，为余兵；

率	432	
周制一军	12500 人	
实		$12500 - 432 = 12068$
内周人		$12068 \div 9 = 1340 + 8/9$

次以人立圆边 6 尺，乘内周人 1340，得 8040 尺，收作 804 丈，为内周尺数；倍衰 48 得 96，乘圆边 6 尺，得 576 尺，为泛；以泛 576 尺，并内周 8040 尺，得 8616 尺，为外周尺；以外周尺 8616 为实，如圆边 6 尺而一，得 1436 人，为外周人数；

人立圆边	6 尺	
内周尺数		$6 \times 1340 = 8040$ 尺
泛		$2 \times 48 \times 6 = 576$ 尺
外周尺数		$8040 + 576 = 8616$ 尺
外周人数		$8616 \div 6 = 1436$ 人

求出奇后：以奇母 4 约 12500，得 3125，为奇兵，以减总军，余 9375，为存兵；次以率 432 加之，得 9807，为实，如重数 9 而一，得 1089，为外周人数，不尽 6；

奇母	4	
周制一军	12500 人	
奇兵		$12500 \div 4 = 3125$ 人
存兵		$12500 - 3125 = 9375$ 人
率	432	
实		$9375 + 432 = 9807$ 人
外周人数		$9807 \div 9 = 1089 + 6/9$

次以原外周 8616 尺为实，以外周人 1089 约之，得 7 尺 9 寸 1 分，不尽 201，与法 1089 求等，得 3，俱约之，为分下 363 分之 67；

置原内周 8040 尺为实，以后立尺 7 尺 9 寸 1 分约之，得 1016，为内周人数，不尽 344 分，为宽地；

原外周	8616 尺	
外周人数	1089 人	
		$8616 \div 1089 = 7.91184573$ 尺
		$861600 \div 1089 = 791 + 201/1089$ 分 $= 791 + 67/363$ 分
原内周	8040 尺	
后立尺	791 分	
		$804000 \div 791 = 1016.434893$ $= 1016 + 344/791$

本术所求，内外周之人数既定，不拘奇出，奇入，皆以六人为重差，或累差，加减，各得诸重围数，或并九重人，课总军存兵。

第 68 题：馱值推原

问：房廊数足，内一户现日纳一百五十六文八分。为指挥准：未曾经减者，减三分；已曾经减三分者，减二分；已曾经减二分者，更减二分。今本户为累经减者，欲知元额房钱几何。

答曰：元额三百五十文。

术曰：以衰分求之。

列一十分两行，各三位，列减分对减右行，以馱者相乘法；以左行元列相乘，得纳钱为实，实如法而一，得元额钱。

草曰：列 10 分三位于左行，又列 10 分三位于右行；

左行	右行	减分
10	10	3
10	10	2
10	10	2

其右上减去初减 3 分，右中减去次减 2 分，右下减去更减 2 分；

左行	右行	减分
10	7	3
10	8	2
10	8	2

右行余 7、8、8，以相乘得 448 为法；

乃以左行三位 10 分相乘，得 1000 为乘率；

左行	右行	
10	7	
10	8	
10	8	
1000	448	乘率

以因率乘现日纳钱 185 文 8 分，得 156 贯 800 文为实，实如法而一，得 350 文，为本户原额房钱。

左行	右行	
10	7	
10	8	
10	8	
1000	448	乘率
156800	448	350

第 69 题：均敷徭役

问：军戍，差坐烽，摆铺，切虑差徭不均。今诸军共合差一千二百六十人，契勘诸军现管：前军六千一百七十人，右军四千九百三十六人，中军七千四百四人，左军三千七百二人，后军二千四六十八人；欲知：各军合差几何。

答曰：前军差三百一十五人；右军差二百五十二人；

中军差三百七十八人；左军差一百八十九人；后军差一百二十六人；

术曰：以均输求之。

置各军现管人，验可约，求等以约之，为衰副，并为法，以共合差数，乘列衰，各为实，实如法而一，各得。

草曰：置诸军现管求等，得 1234；俱以约现管：前军得 5，右军得 4，中军得 6，左军得 3，后军得 2，列为各衰副；并诸衰，得 20，为法；以共差 1260 人，乘诸衰：前军得 6300，右军得 5040，中军得 7560，左军得 3780，后军得 2520，各为实，皆如法 20 而一，前军合差 315 人，右军合差 252 人，中军合差 378 人，左军合差 189 人，后军合差 126 人。合问。

	前军	右军	中军	左军	后军	
现管	6170	4936	7404	3702	2468	
约 1234	5	4	6	3	2	和 20
× 1260	6300	5040	7560	3780	2520	
÷ 20	315	252	378	189	126	

版
有！
欢
迎
传
播！
禁
止
制
作
为
商
品
销
售！

第 70 题：军器功程

问：今欲造弓，刀各一万副，箭一百万只。据工程：

七人，九日，造弓八张；八人，六日，造刀五副；三人，二日，造箭一百五十只；

作院现管：弓作二百二十五人，刀作五百四十人，箭作二百七十六人；

欲知毕日几何。

答曰：造弓一万张，三百五十日；

造刀一万副，一百七十七日九分日之七；

造箭一百万只，一百四十四日六十九分日之六十四；

术曰：以粟米求之，互换入之。

置各功程，原人率于右行，置原日数于中行，置欲求数为左行，以三行对乘之，为各实；

列右行，置原物数于中行，置现人为左行，以左行乘中行，各为法；以对除右行，各得日数。

草曰：置原造弓 7 人，原造刀 8 人，原造箭 3 人，于右行；

次置原造弓 9 日，原造刀 6 日，原造箭 2 日，列副行；

又置原造弓数 8，原造刀数 5，原造箭数 150，列次行；

又列现管弓作 225 人，刀作 540 人，箭作 276 人，于左行；

	原人	原日	原造数	原效率	现作人	现作效率
弓	7	9	8	$8/(7 \times 9)$	225	$225 \times 8/(7 \times 9)$
刀	8	6	5	$5/(8 \times 6)$	540	$540 \times 5/(8 \times 6)$
箭	3	2	150	$150/(3 \times 2)$	276	$276 \times 150/(3 \times 2)$

【编者注：效率意为“每人每日造数”】

欲造弓 10000，欲造刀 10000，欲造箭 100 万，列左行，以三行对乘，各为实；

次以原造弓 8 张，刀 5 副，箭 150 只，以乘现作人数，得弓法 1800，刀法 2700，箭法 41400；

	欲造数量	实	法	实如法而一	不尽
弓	10000	$7 \times 9 \times 10000$	225×8	350	0
刀	10000	$8 \times 6 \times 10000$	540×5	177	2100
箭	1000000	$3 \times 2 \times 1000000$	276×150	144	38400

[造弓]先以上法 1800，除寄右行弓日实 630000 日，得 350 日，为造弓一万张日数；

[造刀]次以中得 2700，除寄右行刀日实 480000 日，得 177 日，为造刀一万副日数，不尽 2100 日，与法 2700 求等，得 300，俱约之，为 9 分日之 7；

[造箭]次以下法 41400，除寄右行箭日实 6000000 日，得 144 日，为造箭一百万只日数，不尽 38400 日，与法 41400 求等，得 600，俱约之，得 69 分日之 64 为造箭日分，合问。

第 71 题：计造军衣

问：库有布、绵、絮三色，计料，欲制军衣。

其布：六人，八匹，少一百六十四匹；七人，九匹，剩五百六十四匹；

其绵：八人，一百五十两，剩一万六千五百两；九人，一百七十两，剩一万四千四百两；

其絮：四人，一十三斤，少六千八百四斤；五人，一十四斤，适足；

欲知：兵士，及布、绵、絮各几何。

答曰：兵士一万五千一百二十人；布二万匹；绵三十万两；絮四万二千三百二十六斤；

术曰：以盈腩求之。

置人数，于左右之中，置所给物，各于其上，置盈腩，各于其下；令维乘之。

先以人数，互乘其所给率，相减，余为法；次以人数相乘，为寄；

后以盈腩，互乘其上未减者，是谓维乘。

验其下，系一盈一腩，上下皆并之；

其上并之，为物实；其下并之，乘寄，为兵实；如法而一，各得。

次验盈腩数：

其系两盈，或两腩者，以上下皆相减之，其上减之，余，为物实；其下减之，余，乘寄，为兵实；二实皆如法而一，各得；

其或一盈一足，或一腩一足者，其适足，乃以空，互乘其上未减者，去之，只以所用盈腩数互乘其上，为物实；以盈或腩一数，乘寄，为兵实，皆如法而一，各得。

求布草曰：置 6 人于左中，8 匹于左上，腩 160 匹于左下；

置 7 人于右中，9 匹于右上，盈 560，于布下；

求布图 1	左	中	右
布	8		9
兵	6		7
	腩 160		盈 560

先以左右之中 67 互乘；左右之上讫。左上得 55，右上得 54，以相减之，余 2 为法；

次以左右中 67 相乘，得 42 为寄于中；

求布图 2	左	中	右
布	$8 \times 7 = 56$	$56 - 54 = 2$	$9 \times 6 = 54$
兵	6	$6 \times 7 = 42$	7
	腩 160		盈 560

次以左下亏 160，乘右上未减 54 得 8640；

又以右下盈 560，乘左上未减 56 得 31360；

求布图 3	左	中	右
布	$56 \times 560 = 31360$	2	$54 \times 160 = 8640$
兵	6	42	7
	腩 160		盈 560

验得左右之下系一盈一腩，当并之：以 31360，并右上 8640，得 40000 为布实；

次以左下腩 160，并左下盈 560，得 720，乘寄 42 得 30240 为兵实；

二实皆如法 2 而一，得 2 万匹，为布；得 15120 为兵；

求布图 4	左+右=实	中法	实如法 2 而一
布	$31360 + 8640 = 40000$	2	20000
兵	$(160 + 560)42 = 720 \times 42 = 30240$		15120

求绵草曰：置 8 人于左中，绵 150 两于左上，余 16500 两于左下；

次置 9 人于右中，170 两于右上，余 14400 两于右下：

求绵图 1	左	中	右
绵	150		170
兵	8		9
余	16500		14400

以左右中 8，9 互乘各上，讫，左上得 1350，右上得 1360，相减，余 10 为法；

次以中 8，9 相乘得 72，为寄于中；

求绵图 2	左	中	右
绵	$150 \times 9 = 1350$	$1360 - 1350 = 10$	$170 \times 8 = 1360$
兵	8	$8 \times 9 = 72$	9
余	16500		14400

次以左下 16500，乘右上 1360，得 2244 万；

却以右下 14400，乘左上 1350，得 1944 万；

求绵图 3	左	中	右
绵	$14400 \times 1350 = 1944$ 万	10	$16500 \times 1360 = 2244$ 万
兵	8	72	9
余	16500		14400

验其下，系两盈，当相减之；其右上余 300 万，为绵实；

其左、右之下亦相减之，余 2100，乘寄 72，得 151200，为兵实；

二实皆如法 10 而一，绵得 30 万两，兵得 15120 人。

求绵图 4	右 - 左 = 实	中法	实如法 10 而一
绵	300 万	10	30 万
兵	$(16500 - 14400)72 = 2100 \times 72 = 151200$		15120

求絮草曰：置 4 人于左中，13 斤于左上，少 6804 斤于左下；

又置 5 人于右中，14 斤于右上，适足为实，于右下；

求絮图 1	左	中	右
絮	13		14
兵	4		5
	觚 6804		0

以左、右之中 4，5 互乘其上，讫，左上得 65，右上得 56，相减，余 9 为法；

以中 4，5 相乘，得 20，为寄于中；

求絮图 2	左	中	右
絮	$13 \times 5 = 65$	$65 - 56 = 9$	$14 \times 4 = 56$
兵	4	$4 \times 5 = 20$	5
	觚 6804		0

先以左下 6804 互乘右上 56 得 381024，却以右适足之实，乘左上 65，亦为实，乃去之；

求絮图 3	左	中	右
絮	$65 \times 0 = 0$	9	$56 \times 6804 = 381024$
兵	4	20	5
	觚 6804		0

只以右上 381024 斤为絮实；只以左下 6804，乘寄 20 人得 136080 为兵实；

二实皆如法 9 而一，其絮得 42336 斤；其兵得 15120 人，合问。

求絮图 4	左+右=实	中法	实如法 9 而一
絮	381024	9	42336
兵	$6804 \times 20 = 136080$		15120

已上布，绵，絮三项，求人兵数皆同。今仍于各图立算求之，以合本术。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 72 题：先计军程

问：一将将甲、乙、丙三队野训。丙队行军最慢，乙队两倍于丙队，甲队三倍于丙队。今将先行，三队同路追将，且追及后则与将一并前行，直至三队与将会合，即可安营扎寨。途中，甲队行三刻后与将会合；乙队行五刻后与将会合；欲知：丙队需行几刻。

答曰：一十五刻。

术曰：仿盈朒求之。以方程求之。

草曰：依耗时多少罗列甲，乙：

甲少，置于上；乙多，置于下；甲，乙分别相乘，运算如下：

率图	时刻	速度	
甲	3	3	$3 \times 3 = 9$
乙	5	2	$2 \times 5 = 10$
运算	$3 - 5 = -2$		$9 - 10 = -1$

次以所得率虚设一数：速度与时刻之积之差-1置于左下，时刻差-2置于右下；

待求之丙时刻置于中，数值全部为1；

以“甲队速三倍，且三刻追及”解：

甲时刻3置于右上，甲速度与时刻之积9置于左上，视为积；

列数如下：

首图	左行	右行
积	3×3	3
丙	1	1
虚	-1	-2

右行减左行，使右丙为空：

次图	左行	右行
积	9	-6
丙	1	0
虚	-1	-1
运算	不变	右减左

以左行减右行，使左虚为空：

终图	左行	右行
积	15	-6
丙	1	0
虚	0	-1
运算	左减右	不变

左行积值15，即为丙队所需时刻数。

或者：以“乙队速两倍，且五刻追及”解：

乙时刻5置于右上，乙速度与时刻之积10置于左上，视为积；

列数如下：

首图	左行	右行
积	5×2	5
丙	1	1
虚	-1	-2

右行减左行，使右丙为空：

次图	左行	右行
积	10	-5
丙	1	0
虚	-1	-1
运算	不变	右减左

以左行减右行，使左虚为空：

终图	左行	右行
积	15	-5
丙	1	0
虚	0	-1
运算	左减右	不变

左行积值 15，即为丙队所需时刻数。

两种解法，取其中之一即可。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

“军旅第八”现代文翻译

第 64 题：计算方阵边长

问题：军队有 1 帅，领导 4 位将军，每位将军带领 99 队；每队 125 人，包含队长 1 人，队押 2 人，队官 2 人；黄昏时，列队，准备安营扎寨；每人占立的地方按正方形 8 尺计算，在中间留一通道，可容一人通过，队长在中央位置，队押，队官在队长四周，列队完备的阵称为队阵；接着，以队阵为单元，按照队阵的排列要求，排列营阵：只是要求营阵中间留的通道，可容一队阵通过，帅居中央位置，将环绕四周；请问：队阵，营阵一边的人数是多少；队阵，营阵一边的长度是多少。

【编者注：原文有问题：首先，依题意，营阵方显然是 $20 \times 12 \times 8$ 尺，答案取 19×90 尺是错误的；

其次，营阵如何构成？原文语焉不详，所配图显然不正确，与题意“须令队间容队，帅居中央”不合，《文渊阁四库全书·数学九章》虽然注意到这个问题，却没有解决；

第三，原文“一军三将，将三十三队”，意在出现 100 队的的数据，但是，解题却是按照 4×100 队进行的，二者必居其一；我照顾解答的要求，修改已知条件如上；

第四，本题可以直接从最接近人数的平方数去估算，无需动用开平方运算；当然我依然尊重秦九韶的意思去做修改。此段说明故意再现，读者莫怪。

《数书九章新释》504 页的公式（ β ）来历不明，应该是根据“术曰”逆推出的，却与题意不符。】

【原文】计立方营

问一军三将，将三十三队，队一百二十五人，遇暮立营，人占立地方八尺，须令队间容队，帅居中央；欲知营方几何。

第 65 题：方阵变锐阵

问题：步兵 5 个军，每军 12500 人，列作方阵，每人占立的地方按正方形 8 尺计算；要求把方阵变为前阔后锐的锐阵，使得：锐阵阔约比原方阵边长多半倍，在锐阵内部再形成一个内锐阵，内锐阵一条边与原锐阵重合，内锐阵外留一条骑路，宽五丈以上，顺锐形出入；在公共边上，骑路与原锐阵两边的两段分别叫做“外锐广”，两个外锐广长度之和约与内锐阵边长相同；内锐阵加骑路构成中锐阵，作为虚锐阵看待；请问：方阵边长，骑路宽度，内锐阵边长，外锐两广边长，以及前、后锐阵内士兵人数，各是多少。

【编者注：本题有错误，所有版本均未更正。我参考：李兆华“秦九韶方变锐阵题解法改正”，《秦九韶与数书九章》428—432 页的内容修改。】

【原文】方变锐阵

问步兵五军，军一万二千五百人，作方阵，人立地方八尺；欲变为前后锐阵，阵后阔，令：约多原方面半倍，阵间仍容骑路五丈以上，顺锐形出入，求方阵面，锐阵长，及前后锐阵，各布兵几何。

第 66 题：布列圆阵

问题：步兵 2600 人，列为圆阵，每人占立的地方按圆径 9 尺计算，形状如同车的轮辐，鱼鳞一般布阵，圆阵中，相邻两行之间的距离，是人立 9 尺的两倍；要求内圆直径 72 丈。圆周率用“周三径一”。请问：圆阵有多少重；内圆周，外圆周，外圆直径，及其圆周上所站立的人数，各是多少。

【编者注：本题相当于首项为 240，末项为 336，公差为 12 的等差数列问题。】

【原文】计布圆阵

问步卒二千六百人，为圆阵，人立圆九尺，形如车辐，鱼丽布阵；阵重间，倍人立圆边尺数。须令内径七十二丈；圆法用“周三径一”之率。欲知阵重几数，及内周，外周，通径，

并其上所立人数，各几何。

第 67 题：圆营阵上布疑阵

问题：完整编制的一军有 12500 人。现在要布置成圆营阵，有 9 重，每人占立的地方按圆径 6 尺计算，圆阵中，相邻两行之间的距离，是人立 6 尺的两倍；要求从中挑选出四分之一的士兵作为奇兵，但是，不能缩小圆营阵以免暴露，仍然用剩余的士兵布满原来的圆营阵。请问：原来的圆营阵中，内圆周长，外圆周长，及其上站立的人数；派出奇兵后的圆营阵中，内圆周长，外圆周长，及其上站立的人数，内、外圆周上每人占立的地方大小；各是多少。

【编者注：

《周官·夏大司马》：“凡制军，万有二千五百人为军。王六军，大国三军，次国二军，小国一军，军将皆命卿。二千有五百人为师，师帅皆中大夫。五百人为旅，旅帅皆下大夫。百人为卒，卒长皆上士。二十五人为两，两司马皆中士。五人为伍，伍皆有长。一军，则二府，六史，胥十人，徒百人。”

◎成周兵制图

王	六乡六遂	六军（七万五千人）
大国（上公）	三乡三遂	三军（三万七千五百人）
次国（侯、伯）	二乡二遂	二军（二万五千人）
小国（子、男）	一乡一遂	一军（一万二千五百人）
伍（五人）	伍长、公司马	下士（一军，伍长二千五百人，六军共一万五千人）
两（二十五人）	两司马	中士（一军，两司马五百人，六军共三千人）
卒（百人）	卒长	上士（一军，卒长一百二十五人，六军共七百五十人）
旅（五百人）	旅帅	下大夫（一军，旅帅二十五人，六军共一百五十人）
师（二千五百人）	师帅	中大夫（一军，师帅五人，六军共三十人）
军（万二千五百人）	军将	卿（一军，一人，六军共六卿）

【（宋元）马端临《文献通考》卷一百四十九·兵考一·兵制】

宋军是职业军队。宋军的基本单位为营（一般直接称“指挥”），标准的营有 500 人，统计兵力，调动、组编，也以指挥为单位，一般并不拆散。营下有都，标准为 100 人，有都头；都以下的编制应该是什、伍之制，有军头、“十将”（管辖 10 人）等士官的名目。理论上是 5 营编 1 军。“周制一军”应该是由 5 个军（或“将”）构成的： $5 \times 5 \times 500 = 12500$ 人。

范仲淹在陕西主持防务时，为适应作战需要，而重新整编军队：以 5 人为“伍”，5 伍（25 人）为“队”，5 队（125 人）为“阵”，20 阵（2500 人）为“将”。“将”作为独立的战术单位，直接指挥下属。

至 1139 年，与北方的金朝和议成功后，南宋朝廷就裁撤了“大军”的编制，直接由朝廷控制各军，军以下仍然保留将、营、队的基本编制。】

【原文】圆营敷布

问周制一军，欲布圆营九重，每卒立圆边六尺，重间相去，比立尺数倍之，于内摘差兵四分之一出奇，不可缩营示弱，须令仍用原营布满余兵。欲知原营内外周，及立人数，并出奇后，每卒立尺数，内、外周人数各几何。

第 68 题：推算原来的房租

问题：驻营地内房屋充足，其中一户兵士家属现在的租金是 156 文 8 分。因为营里规定：租金没有打折的，现在可减三折；已经打过三折的，现在可减二折；已经打过两折的，现在可再减二折；现在的这一户就属于第三次打折的，请问他原来的租金是多少。

【编者注：原文叙述混乱，“为准指挥”更是不知所云。

“指挥”也称“营”，是宋朝军队的基层单位，调动与参加征讨都是以指挥（营）为单位进行。】

【原文】徕值推原

问房廊数内一户，日纳一百五十六文八分足。为准指挥未曾经减者，减三分；已曾经减三分者，减二分；已曾经减二分者，更减二分。今本户累经减者，欲知元额房钱几何。

第 69 题：公平地摊派徭役

问题：防守边疆的军队，分配士兵去烽火台值班，以及在营地周围站岗警戒，最忌讳的就是摊派徭役的不公平。现在，几支军队合计，一共需要差遣 1260 人；核对几支军队，目前辖制的情况是：前军 6170 人，右军 4936 人，中军 7404 人，左军 3702 人，后军 2468 人；请问：几支军队应该各差遣多少人。

【编者注：戍：防守边疆；坐烽：烽火台值班；“摆粟铺”不知所云，应该是“摆铺”：站岗警戒；徭役：古时官府向人民摊派的无偿劳动；契勘：验证，核对；**】**

【原文】均敷徭役

问军成差坐烽摆粟铺，切虑差徭不均。今诸军共合差一千二百六十人，契勘诸军现管：前军六千一百七十人，右军四千九百三十六人，中军七千四百四人，左军三千七百二人，后军二千四六十八人，各军合差几何。

第 70 题：制作军器的功程安排

问题：如今，需要制造弓，刀，各 1 万副，箭 100 万只。据悉，目前的工作效率是：7 人用 9 日，可以制造弓 8 张；8 人用 6 日，可以制造刀 5 副；3 人用 2 日，可以制造箭 150 只；

制作院内现有工匠：制弓的 200 人，制刀的 540 人，制箭的 276 人；

请问：各需要多少天才能完成。

【编者注：“弓作二百二十五人”馆本为“弓作二百人”，应该是错了。**】**

【原文】军器功程

问今欲造弓，刀各一万副，箭一百万只。据工程：七人，九日，造弓八张；八人，六日，造刀五副；三人，二日，造箭一百五十只；作院现管：弓作二百二十五人，刀作五百四十人，箭作二百七十六人；欲知毕日几何。

第 71 题：制造军衣的安排

问题：库房有三种材料：布、绵、絮，现在需要计料，组织兵士制作军衣。

制布：6 人制 8 匹，少 160 匹；7 人制 9 匹，剩 560 匹；

制绵：8 人制 150 两，剩 16500 两；9 人制 170 两，剩 14400 两；

制絮：4 人制 13 斤，少 6804 斤；5 人制 14 斤，适足；

请问：兵士多少人，以及布、绵、絮各需要多少。

【编者注：“欲知军士”应该是“欲知：兵士”，方与“答曰”相符。**】**

【原文】计造军衣

问库有布绵絮三色，计料欲制军衣。其布：六人，八匹，少一百六十匹；七人，九匹，剩五百六十匹；其绵：八人，一百五十两，剩一万六千五百两；九人，一百七十两，剩一万四千四百两；其絮：四人，一十三斤，少六千八百四斤；五人，一十四斤，适足；欲知：军士，及布、绵、絮各几何。

第 72 题：预先估计行军进程

问题：一位将领，带领甲、乙、丙三只队伍到野外训练。丙队行军速度最慢，乙队的行军速度是丙队的两倍，甲队的行军速度是丙队的三倍。如今，将领先行一段，三只队伍才沿着同一路线追赶将领，并且，追上将领后，就与将领一并向前行进，直至三只队伍都与将领会合，即可安营扎寨。途中，甲队行军 3 刻后，与将领会合；乙队行军用去 5 刻后，与将领会合；请问：丙队行军需要用去几刻，才能与将领会合。

【编者注：本题应该不是秦九韶出的原题，题中“将三十队，队七十五人”是毫无意义

的数据。】

【原文】先计军程

问一军三将，将三十队，队七十五人，每将分左右，兼作九行，爬头拽行，每日六十里，明日路狭，以军拽行，至晚。欲知先宿程里数几何。

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

《数术大略》

鲁郡 秦九韶 撰

淳佑七年（丁未，1247年）

市易第九

73 推求物价，74 均货摊本，75 互易推本，76 菽粟互易，77 推计互易，
78 炼金计值，79 竹围芦束，80 推求典本，81 积木计余，

第 73 题：推求物价

问：榷货务，三次支物，准钱各一百四十七万贯文：

先拨沉香三千五百裹（guǒ），玳瑁（dàimào）二千二百斤，乳香三百七十五套；
次拨沉香二千九百七十裹，玳瑁二千一百三十斤，乳香三千五十六套四分套之一；
后拨沉香三千二百裹，玳瑁一千五百斤，乳香三千七百五十套。

欲求沉，乳，玳瑁裹，套，斤各价几何？

答曰：沉香每裹三百贯文；乳香每套六十四贯文；玳瑁每斤一八一十贯文。

术曰：以方程求之，正负入之。

列积及物数于下，布行数，各对本色；有分者通之，可约者约之，为定率积。

列数每以下项互遍乘之，每视其积，以少减多，其下物数各随积正负之：

类如同名相减，异名相加，正无入，负之，负无入，正之；

其如同名相加，异名相减，正无入，正之，负无入，负之；

使其下项物数得一数者为法，其积为实。实如法而一，所得不计，遍损或益诸积，各得法，实除之。馀仿此。

草曰：置准钱 1470000 贯为三次拨钱，为三行积数。次置先拨沉香 3500 裹，玳瑁 2200 斤，乳香 375 斤为右行物数；又列次拨沉香 2970 裹，玳瑁 2130 斤，乳香 3056 套 4 分套之 1 为中行物；次列沉香 3200 裹，玳瑁 1500 斤，乳香 3750 套为左行之物；各以本色相对列之：

首图	左行	中行	右行
积	1470000	1470000	1470000
沉香	3200	2970	3500
玳瑁	1500	2130	2200
乳香	3750	3056 + 1/4	375
运算		乘 4	

其中行乳香有四分套之一，便以母 4 通中行诸数，只内子 1 入乳香段内，积得 5880000 贯，沉香得 11880 裹，玳瑁得 8520 斤，乳香得 12225 套。

次图	左行	中行	右行
积	1470000	5880000	1470000
沉香	3200	11880	3500
玳瑁	1500	8520	2200
乳香	3750	12225	375
运算	约 5	约 15	约 25

以右行求等，得 25，俱约之，积得 58800 贯，沉香得 140 裹，玳瑁得 88 斤，乳香得 15 套；以中行求等得 15，约之，积得 392000 贯，沉香得 792 裹，玳瑁得 568 斤，乳香得 815 套；以左行求等得 5，约之，积得 29400 贯，沉香得 64 裹，玳瑁得 30 斤，乳香得 75 套；

列为定率图：

定率图	左行	中行	右行
积	29400	392000	58800
沉香	64	792	140
玳瑁	30	568	88
乳香	75	815	15
运算	乘 15	不变	乘 75

三行副置求之，今先欲去定率图下位：乳香套数 15 与左下 75，互乘左右两行，右积得 4410000 贯沉香 10500 裹，玳瑁得 6600 斤，乳香得 1125 套；左积得 4410000 贯沉香得 960 裹，玳瑁得 450 斤，乳香得 1125 套；

维图	左行	中行	右行
积	4410000	392000	4410000
沉香	960	792	10500
玳瑁	450	568	6600
乳香	1125	815	1125
运算	还原	不变	右减左

验左积少，右积多，当以左行直减右行，毕，仍置定率图左行数：
右积得 3969000 贯，沉香得 9540 裹，玳瑁得 6150 斤，乳香空；

音图	左行	中行	右行
积	29400	392000	3969000
沉香	64	792	9540
玳瑁	30	568	6150
乳香	75	815	0
运算	乘 815	乘 75	不变

次验中、左两行，各有下位段，又以左下 75 互乘中行，乃以中行下 815 互乘左行，毕，中积得 29400000 贯，沉香得 59400 裹，玳瑁得 42600 斤，乳香得 61125 套；左积得 23961000 贯，沉香得 52160 斤，玳瑁得 24450 斤，乳香得 61125 套；

爻图	左行	中行	右行
积	23961000	29400000	3969000
沉香	52160	59400	9540
玳瑁	24450	42600	6150
乳香	61125	61125	0
运算	还原	中减左	不变

验左积少，中积多，以左行同名直减中行，毕，中积得 5439000 贯，沉香得 7240 裹，玳瑁得 18150 斤；仍置定率图左行数：

政图	左行	中行	右行
积	29400	5439000	3969000
沉香	64	7240	9540
玳瑁	30	18150	6150
乳香	75	0	0
运算	不变	约 10	约 30

今验右、中两行数多，又求等约之：其右行求得 30，约之，右积得 132300 贯，沉香得 318 裹，玳瑁得 205 斤；中行求得 10，约之，中积得 543900 贯，沉香得 724 裹，玳瑁得 1815

斤；

卜图	左行	中行	右行
积	29400	543900	132300
沉香	64	724	318
玳瑁	30	1815	205
乳香	75	0	0
运算	不变	乘 205	乘 1815

今又欲去中、左行之玳瑁，乃以中行玳瑁 1815 互乘右行，右积得 240124500 贯，沉香得 577170 裹，玳瑁得 372075 套；以下图右玳瑁 205 斤互乘中行，中积 111499500 贯，沉香得 148420 裹，玳瑁得 372075 斤；

宫图	左行	中行	右行
积	29400	111499500	240124500
沉香	64	148420	577170
玳瑁	30	372075	372075
乳香	75	0	0
运算	不变	还原	右减中

今验宫图右积多，中积少，乃以中行直减右行，毕，仍置卜图中行数：

干图	左行	中行	右行
积	29400	543900	128625000
沉香	64	724	428750
玳瑁	30	1815	0
乳香	75	0	0
运算	不变	不变	约 428750

今验干图右行段数，只有沉香 428750 裹，以为法，以右上积 128625000 贯为实，实如法而一，得 300 贯为沉香一裹价；

曜图	左行	中行	右行
积	29400	543900	300
沉香	64	724	1
玳瑁	30	1815	0
乳香	75	0	0
运算	左减右乘 64	中减右乘 724	不变

便以中行沉香 724 乘 300 贯，得 217200 贯，减中行积 543900 贯，余 326700 贯为中积，便减去中行沉香段之数；次以左上沉香 64 乘 300 贯，得 19200 贯，减左积 29400 贯，余 10200 贯，为左积；便减左上沉香裹数，去之；

支图	左行	中行	右行
积	10200	326700	300
沉香	0	0	1
玳瑁	30	1815	0
乳香	75	0	0
运算	不变	约 1815	不变

今验支图：中行其下只有玳瑁 1815 斤，以为法，中积 326700 贯为实，实如法而一，得 180 贯，为玳瑁价。

闰图	左行	中行	右行

积	10200	180	300
沉香	0	0	1
玳瑁	30	1	0
乳香	75	0	0
运算	左减中乘 30	不变	不变

今验闰图：左行有玳瑁 30 斤，以乘价 180 贯得 5400 贯，减左积 10200，贯余 4800 贯为左积；

定图	左行	中行	右行
积	4800	180	300
沉香	0	0	1
玳瑁	0	1	0
乳香	75	0	0
运算	约 75	不变	不变

其下只有乳香 75 套，以为法，以积 4800 贯为实，实如法而一，得 64 贯为乳香套价。

终图	左行	中行	右行
积	64	180	300
沉香	0	0	1
玳瑁	0	1	0
乳香	1	0	0

此题并系，俱正补草。

【编者注：榷（què，官方专营）货务：宋官署名，属太府寺，掌食粮、金帛等贸易。】

禁止制作为
商品销售！

第 74 题：均货推本

问：有海舶，归，赴（市舶）务抽毕，除纳主家货物外，有：

沉香五千八十八两，

胡椒一万四百三十包[包四十斤]，

象牙二百一十二合[大小为合，斤两俱等]；

系甲、乙、丙、丁四人合本博到。缘昨来凑本，互有假借；四人到府求官断，供称：

甲本：金二百两，盐四袋（每袋值钞一十道）；

乙本：银八百两，盐三袋（每袋值钞八十八道）；

丙本：银一千六百七十两，度牒一十五道；

丁本：度牒五十二道，金五十八两八铢；

已上共估值四十二万四千贯。甲借乙钞，乙借丙银，丙借丁度牒，丁借甲金；

今合拨各借物，归原主名下，为率均分上件货物。

欲知金，银，袋盐，度牒原价，及四人各合得香，椒，牙几何。

馆按：题意谓：“甲金，乙盐，丙银，丁牒，原本不同，互借为同。本买得香，椒，牙三色，今有互借，各物及同本贯数，求原本，以分所买之物。”盖方程而廉，衰分之法也。甲，乙二条内，盐，钞二色实即一色，先言盐袋数乃一钞之数，以钞数乘之始为盐数，是钞数既赘，又不明言其故，皆故为隐晦也。

答曰：甲：金，每两四百八十贯文；本，一十二万四千贯文；

合得：沉香一千四百八十八两，

胡椒三千五十包一十一斤五两五十三分两之七，

象牙六十二合；

乙：盐，每袋二百五十贯文；本，七万六千贯文；

合得：

沉香九百一十二两，

胡椒一千八百六十九包二十一斤二两五十三分两之六，

象牙三十八合；

丙：银，每两五十贯文；本，一十二万三千五百贯文；

合得：

沉香一千四百八十二两，

胡椒三千三十七包三十九斤五两五十三分两之二十三，

象牙六十一合四分合之三；

丁：度牒，每道一千五百贯文；本，一十万五百贯文；

合得：

沉香一千二百六两，

胡椒二千四百七十二包八斤三两五十三分两之十七，

象牙五十合分合之一；

术曰：以方程求之，衰分入之，正负入之。

置共钱，以人数约之，得数列入人数，各为行积。

次置诸色各物数为段子（gēzǐ，格子），对本色有分者通之，可约者约之，为定率。

以第一行为右，以第二行为副，以第三行为次，第四行为左；

每以下位互遍乘之，每验其积，以少减多；

如同名相减，异名相加，正无入，负之，负无入，正之；

如同名相加，异名相减，正无入，正之，负无入，负之；

得一段为法，以余积为实，除之，各得诸价；

以诸价列右行，以各物数列左行，以两行对乘，各得本率。

以诸色求等，约之得列衰，并诸衰为总法，以列衰遍乘各物诸数，各为实；

诸实并如总，法而一各得其物；除不尽者，以斤两通而除之，或又分母命之。

草曰：置估值 424000 贯，以四人约之，得 106000 贯为各积，以人数列四位。

次置甲：金 200 两于右上，以 4 袋，乘钞 10 道，得 40 袋[馆按：此条以四袋为一钞，相乘为盐数，是二色止为一色，不如即用盐为正]于右副，为右行；

次置乙：钞 88 道，以 3 袋乘之，得盐 264 袋[馆按：此条以三袋为一钞]，及银 800 两，为副行；

次置丙：银 1670 两，度牒 15 道为次行；

次置丁：度牒 52 道，金 58 两 8 铢为左行，验得首图：

首图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	106000	106000	106000	106000
金	58+1/3	0	0	200
盐	0	0	264	40
银	0	1670	800	0
度牒	52	15	0	0

左行上段，金带 8 铢是 3 分两之 1[编者注：二十四铢为一两]；乃以分母遍乘左行诸数，只以分子 1 纳入左上金内；其左积得 318000 贯，左金得 175 两，左度牒得 156 道，为次图：

次图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	106000	106000	106000
金	175	0	0	200
盐	0	0	264	40
银	0	1670	800	0
度牒	156	15	0	0
等数	1	5	8	40

验次图：四行皆可求等：右行求得 40，约之；副行求得 8，约之；次行求得 5，约之；左行求得 1，约之；各得数，为定率图：

定率图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	21200	13250	2650
金	175	0	0	5
盐	0	0	33	1
银	0	334	100	0
度牒	156	3	0	0
运算	不约	约 5	约 8	约 40

验定率图：右积得 2650 贯，金 5 两，盐 1 袋；副积得 13250 贯，盐 33 袋，银 100 两；次积得 21200 贯，银三 334 两，度牒 3 道；左积得 318000 贯，金 175 两，度牒 156 道。

乃以定图次行度牒 3 因左行，左积得 954000 贯，金 525 两，度牒 468 道；次以定图左下度牒 156 乘次行积得 3307200 贯，银 52104 两，度牒 468 道；得维图：

维图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	954000	3307200	13250	2650
金	525	0	0	5
盐	0	0	33	1
银	0	52104	100	0

度牒	468	468	0	0
运算	乘3	乘156	不变	不变

乃验维图：左及次行之下度牒等，当相减之。以积为端，当以左之少积，减次之多积。按：术曰：同名相减。其次行之金空，而左行之金 525 两，有为正，次空为无，按术曰：“正无入，负之”，即以左行之金正，加入次行金位为负，名成音图：

音图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	2353200	13250	2650
金	175	-525	0	5
盐	0	0	33	1
银	0	52104	100	0
度牒	156	0	0	0
运算	还原	次减左	不变	不变

仍置定图左行诸数，乃验音图：次行积得 2353200 贯正，金 525 两负，银 52104 两为正，余三行皆正。今验音次行之负金，当以右行之正金补之，而其数不等，先以右金 5 约次金 525 得 105，以乘音图右行，毕，其右积得 278250 贯，金 525 两正，盐 105 袋正；其副次左三行如音图，故乃成爻图：

爻图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	2353200	13250	278250
金	175	-525	0	525
盐	0	0	33	105
银	0	52104	100	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	不变	不变	乘105

今视爻图右行之金正，与次行之金负适等，即用右行直加次行；按术：“以同名相加”，乃以右之金正，减其次之金负，为空，按术：“以异名相减之”；其次盐空，为无入，按术：“以正无入，正之”，乃以爻图右积 278250 贯，加次积 2353200 贯内，得 2631450 贯，其次金空，次盐 105 袋正，次银 52104 两正。仍置定图右行数而成政图：

政图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲	本色求等
积	318000	2631450	13250	2650	
金	175	0	0	5	(175,5)=5
盐	0	105	33	1	(105,33)=3
银	0	52104	100	0	(52104,100)=4
度牒	156	0	0	0	
运算	不变	右加次	不变	还原	

今视政图，乃从诸行本色择其可求等者：首金可，盐亦可【编者注：银亦可】。盖金多，盐少【编者注：银亦多。但此判定方法欠佳，因金，银，度牒三本色皆不可用】，乃以政图副、次两行盐数 33 与 105 求等，得 3，故以 3 约 33 得 11，以乘次行；又以 3 约 105 得 35，以乘副行，毕，其副积得 463750 贯，盐 1155 袋，银 3500 两；次积 28945950 贯，盐 1155 袋，银 573144 两，皆正，列成卜图：

卜图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	28945950	463750	2650
金	175	0	0	5
盐	0	1155	1155	1

银	0	573144	3500	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	乘 11	乘 35	不变

及视卜图，副行积少，次行积多，即以副行求减次行。皆是同名，相减之。既毕，副行仍置定率图副行数。其次行乃得积 28482200 贯，银得 569644 两，列为宫图：

宫图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	28482200	13250	2650
金	175	0	0	5
盐	0	0	33	1
银	0	569644	100	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	次减副	还原	不变

验宫图：次行下只有银 569644 两，独一数，以为法，以次积 28482200 贯为实，实如法而一，得 50 贯，为银一两价，而成干图：

干图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	50	13250	2650
金	175	0	0	5
盐	0	0	33	1
银	0	1	100	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	约 569644	不变	不变

乃以干图副行银 100 两，乘银一两价 50 贯，得 5000 贯，以减干图副行之积 13250 贯，讫，副积余 8250 贯，其下盐得三十三袋，银空，而成曜图：

曜图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	50	8250	2650
金	175	0	0	5
盐	0	0	33	1
银	0	1	0	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	不变	副减次乘百	不变

乃以曜图副行之积 8250 贯为盐实，以其下盐 33 袋为法，除之，得 250 贯，为盐一袋价，而成支图：

支图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	50	250	2650
金	175	0	0	5
盐	0	0	1	1
银	0	1	0	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	不变	约 33	不变

乃以支图右行盐 1 袋遍乘副行，毕，其副积只得 250 贯；次以副行直减右行，毕，右积余 2400 贯，金 5 两，盐空，而成闰图：

闰图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	50	250	2400

金	175	0	0	5
盐	0	0	1	0
银	0	1	0	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	不变	不变	右减副

乃以闰图右积 2400 贯为实，金 5 两为法，除之，得 480 贯，为金一两价，成定图：

定图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	318000	50	250	480
金	175	0	0	1
盐	0	0	1	0
银	0	1	0	0
度牒	156	0	0	0
运算	不变	不变	不变	约 5

次以左金 175 两遍乘右行，毕，直减左行，讫，左积得 234000 贯，度牒 156 道，左金空，而成又图：

又图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	234000	50	250	480
金	0	0	0	1
盐	0	0	1	0
银	0	1	0	0
度牒	156	0	0	0
运算	左减右乘 175	不变	不变	不变

今验又图：左积 234000 贯为实，以左下度牒 156 道为法，除之，得 1500 贯，为度牒一道价，而成终图：

终图	左行丁	次行丙	副行乙	右行甲
积	1500	50	250	480
金		0	0	1
盐	0	0	1	0
银	0	1	0	0
度牒	1	0	0	0
运算	约 156	不变	不变	不变

既得金、银两钞每两，盐每袋，度牒每道各色之价，后以首图右金 200 两并左金 58 两 8 铢，得 258 两 8 铢；以 8 铢为 3 分两之 1，通分内子 $[200+58+1/3=775/3]$ ，得 775 于左甲，其右价 480 贯乃以左甲母 3 约之，为 160 贯于左甲；次以右盐 40 袋，并副盐 264 袋得 304 袋于左乙；以盐价 250 贯于右乙；次以副银 800 两并银 1670 两得 2470 两于左丙；以银价 50 贯于右丙，又以次行度牒 15 道并左度牒 52 道得 67 道于左丁，以度牒价 1500 贯于右丁，两行对乘之：

	丁	丙	乙	甲	和	价	价归属
金	58+1/3	0	0	200	775	160	甲
盐	0	0	264	40	304	250	乙
银	0	1670	800	0	2470	50	丙
度牒	52	15	0	0	67	1500	丁

次列甲、乙、丙、丁四人乘之：以右甲 160 乘左甲 775 两得 124000 贯为甲原本；以右乙 250

贯乘左乙 304 袋得 76000 贯为乙原本；以右丙 50 贯乘左丙 2470 两得 123500 贯为丙原本；以右丁 1500 贯乘左丁 67 道得 100500 贯为丁原本。列四人各得原本求等，得 500 贯。皆以 500 贯为法，除之，甲行 248，乙得 152，丙得 247，丁得 201，各为列，衰于右行。并右行列衰，得 848 为总法。

	左行	右行	原本	衰
甲	775	160	124000	248
乙	304	250	76000	152
丙	2470	50	123500	247
丁	67	1500	100500	201
			总等 500	总法 848

次置博到沉香 5088 两，遍乘列衰，甲得 1261824 两；乙得 773376 两；丙得 1256736 两；丁得 1022688 两；各为沉香实；以总法 848 除之，甲得 1488 两；乙得 912 两；丙得 1482 两；丁得 1206 两；为各得沉香两数。

	衰	沉香实	沉香得数
甲	248	1261824	1488
乙	152	773376	912
丙	247	1256736	1482
丁	201	1022688	1206
		乘 5088	除总法 848

次置胡椒 10430 包，亦遍乘列衰，甲得 2586640 包；乙得 1585360 包；丙得 2576210 包；丁得 2096430 包；各为椒实；以总法 848 除之：

甲得 3050 包，不尽 240 包，以包率 40 斤乘之得 960 斤；又以法除之，得 11 斤，不尽 272 斤，以 16 两通之，得 4352 两；又以法除之，得 5 两，不尽 112，求等得 16，约之得 53 分两之 7，故甲得椒 3050 包 11 斤 5 两 53 分两之 7；

乙得 1869 包，不尽 448 包，以 40 斤乘之，得 17920；又以法除之，得 21 斤，不尽 112 斤，以 16 两通之，得 1792 两；又以法除得 2 两，不尽 96 两，求等得 16，约之得 53 分两之 6；故乙合得椒 1869 包 21 斤 2 两 53 分两之 6；

丙得 3037 包，不尽 834，以 40 斤通之得 33360 斤，又以法除之，得 39 斤，不尽 288，以 16 两通之，得 4608 两；又以法除得 5 两，不尽 368 两，求等得 16，约之得 53 分两之 23；故丙合得椒 3037 包 39 斤 5 两 53 分两之 23；

丁得 2472 包，不尽 174，以 40 斤通之得 6960 斤，又以法除之，得 8 斤，不尽 176，以 16 两通之，得 2816 两；又以法除得 3 两，不尽 272 两，求等得 16，约之得 53 分两之 17；故丙合得椒 2472 包 8 斤 8 两 53 分两之 17；

	衰	沉香实	沉香得数 (包)
甲	248	2586640	3050 + 240/848
乙	152	1585360	1869 + 448/848
丙	247	2576210	3037 + 834/848
丁	201	2096430	2472 + 174/848
		乘 10430	除总法 848

次置象牙 424 条，以大小各半之，得 212 合，亦遍乘列衰，甲得 52576 合；乙得 32224 合；丙得 52364 合；丁得 42612 合；各为牙实；以总法 848 除之，甲合得牙 62 合；乙合得牙 38 合；丙合得牙 61 合，不尽 636，求等得 212，约之得 4 分合之 3；丁合得牙 50 合，不尽 212，约之得 4 分合之 1；

	衰	象牙实	象牙得数 (合)

甲	248	52576	62
乙	152	32224	38
丙	247	52364	61+636/848
丁	201	42612	50+212/848
		乘 212	除总法 848

馆按：此条于方程正负之用，通分乘除之变，多所发明，步算虽繁，实有条而不紊也。

【编者注：市舶务，宋、元、及明初在各海港设立的管理海上对外贸易的官府，相当于现在的海关。《宋会要辑稿·职官二七》】

版权所有！
 欢迎传播！
 禁止制作为
 商品销售！

第 75 题：互易推本（易牒知原）

问：出度牒，差人营运，每三道易盐一十三袋，盐二袋易布八十四疋，布一十五疋易绢三疋半，绢六疋易银七两二钱，今赶到银九千一百七十二两八钱。欲知原关度牒道数几何？

答曰：度牒一百八十道。

术曰：以粟米互乘易法求之。

列各数，以本色相对如雁翅，以多一事者相乘为实，以少一事者相乘为法，除之。

草曰：先以度牒 3 道乘盐 2 袋得 6，以乘布 15 得 90；又乘绢 6 疋得 540，乃乘银 91728 钱，得 49533120 钱为实；

次以盐 13 袋乘布 84 得 1092，以乘绢 3 疋 5 分得 3822，乃乘银 7 两 2 钱得 275184 钱，为法，除实，得 180 道，为原关度牒道数。

	上五事相乘为实		度牒 3
		盐 2	盐 13
	布 15	布 84	
	绢 6	绢 3.5	
银 91728	银 7.2	下四事相乘为法	

【编者注：疋 (pǐ)，匹。中国古代计算布帛的单位，四丈为疋；】

版权所有！
欢迎传播！
禁止制作为
商品销售！

第 76 题：菽粟互易（粟米交易）

问：菽三升，易小麦二升；小麦一升五合，易油麻八合；油麻一升二合，易粳米一升八合。今将菽一十四石四斗，欲易油麻，又将小麦二十一石六斗，欲易粳米，问各几何？

答曰：油麻五石一斗二升；粳米一十七石二斗八升；

术曰：以粟米换易求之。

置原易率，本色对列如雁翅，以多一事者相乘为实，以少一事者相乘为法，除之，各得或问数。不干其率者，不置。

草曰：置四色六数，列六位，率如雁翅，皆化为合。

先将菽 14 石 4 斗化作 14400 合，乃对前二句率数四位如雁翅，至欲易油麻止，共五事，为上图；

上图			
以上二事相乘法	菽 30	菽 14400	
	麦 15	麦 20	
	油麻 8	以下三事相乘为实	

次将小麦 21 石 6 斗化为 21600 合，乃对后两句率四位雁翅，至欲粳米止，共五事，为下图；

下图			
以上二事相乘法	麦 15	麦 21600	
	油麻 12	油麻 8	
	粳米 18	以下三事相乘为实	

其上图，以菽 14400 合，乘麦 20 得 288000；又乘油麻 8 合，得 2304000 合，为油麻实；次以菽 30 合，乘麦 15 合，得 450 合，为法，除之，得 5120 合，展为 5 石 1 斗 2 升为油麻。

其下图，以小麦 21600 合，乘油麻 8 合得 172800 合；又乘粳米 18 合，得 3110400 合，为粳米实；次以小麦 15 合，乘油麻 12 合，得 180 合，为法，除之，得 17280，展作 17 石 2 斗 8 升为粳米。

油麻实	$14400 \times 20 \times 8 = 2304000$ 合
油麻法	$30 \times 15 = 450$ 合
油麻	$2304000 \div 450 = 5120$ 合 = 5 石 1 斗 2 升
粳米实	$21600 \times 8 \times 18 = 3110400$ 合
粳米法	$15 \times 12 = 180$ 合
粳米	$3110400 \div 180 = 17280$ 合 = 17 石 2 斗 8 升

第 77 题：推计互易（计米易麦）

问：库率：糯谷七石，出米三石；糯米一斗，易小麦一斗七升；小麦五升，踏麴二斤四两；麴一十一斤，酝糯米一斗三升。

今有糯谷一千七百五十九石三斗八升，欲出谷，做米，易麦，踏麴，还自酝余谷之米，须令适足各合几何？

答曰：共谷一千七百五十九石三斗八升；

出谷九百二十四石；

得米三百九十六石；

易麦六百七十三石二斗；

踏麴三万二百九十四斤；

余谷八百三十五石三斗八升；

酝米三百五十八石二升；

术曰：以粟米换易求之。

置诸率，随本色对列如雁翅。有分者通之，异类者变之，以头位者进乘之，以下位退乘之；得合数。有对者相乘之，无对者直命之，为诸率。

并上、下无对者为法率[诸率可约者又约之]；以今有物遍乘诸率[不乘法率]，各为实；诸实并，如法而一，各得其已变者。复互易，乘除之，即得所求。

草曰：置糯谷 7，出米 3，于右行上、副两位；

次置糯米 1 斗，易麦 1 斗 7 升，于副行副、中两位；

次置小麦 5 升，踏麴 2 斤 4 两，于次行中、次两位；

次置麴 11 斤，酝米 1 斗 3 升，于左行次、下两位；

随本色，对列如雁翅，讫；

原图	左行	次行	副行	右行
上				糯谷 7
副			糯米 10	糯米 3
中		易麦 5	易麦 17	
次	踏麴 11	踏麴 2.25		
下	酝米 13			

乃验次行：2 斤 4 两为 2 斤 4 分斤之 1；以母 4 通次行两位，以子 1 纳次行次位，其中位得 20，次位得 9；

又验左行：下位是糯米，是异类，于糯米合变为糯谷。乃以问中首句“率：谷七米三”变之：以 7 因米 1 斗 3 升，得 9 斗 1 升，于左下为谷；却以米 3 因麴 11 斤，为 33 斤麴，于左行次位，得变图数：

变图	左行	次行	副行	右行
上				糯谷 7
副			糯米 10	糯米 3
中		易麦 20	易麦 17	
次	踏麴 33	踏麴 9		
下	余谷 91			

以左行 33，乘次行 20，得 660；次以得 660，乘副行 10，得 6600；次以 6600，乘右行 7，得 46200，各于原位；却以右行副位 3，因副行 1 斗 7 升，得 5 斗 1 升；又以 5 斗 1 升，乘次行 9，得 459；又以 459，乘左下 91，得 41769；列为合图数。

合图	左行	次行	副行	右行
上				糯谷 46200

副			糯米 6600	糯米 3
中		易麦 660	易麦 51	
次	踏麴 33	踏麴 459		
下	余谷 41769			

乃验合图：四行，其副、中、次三位有对，以对相乘，合之；其右上，左下无对者，直命之，皆为率，列右行，上得 46200，为出糯谷率；副位得 19800，为得糯米率；中得 33660，为易得麦率；次得 15147，为踏到麴率；下得 41769，为余下糯谷率；并上、下率共得 87969，为法率；今六率共求等，得 1，约之，只得原率，为率图，始用。

率图		
上	46200	出谷率
副	19800	糯米率
中	33660	易麦率
次	15147	踏麴率
下	41769	余谷率
	87969	法率
	1759.38	问数

今有糯谷 1759 石 3 斗 8 升，皆化为升，遍乘五率，不乘法率，得 8128335600 升，为出谷实；得 3483572400 升为糯米实；得 5922073080 升为易麦实；得 2664932886 为踏麴实；得 7348754322 升，为余谷实；其五实，皆如法 87969 而一，得 924 石，为出谷；得 396 石，为做到糯米；得 673 石 2 斗，为易到小麦；得 30294 斤，为踏到麴；得 835 石 3 斗 8 升，为余下谷。

	实	实如法 87969 而一
出谷	8128335600 升	92400 升
糯米	3483572400 升	39600 升
易麦	5922073080 升	67320 升
踏麴	2664932886 斤	30294 斤
余谷	7348754322 升	83538 升

今将余下谷变为米：乃以米乘率 3 因余谷 835 石 3 斗 8 升，得 2506 石 1 斗 4 升为实，以糯谷率 7 为法，除之，得 35802 升，合 358 石 2 升，为配米。

米乘率	3
余谷	83538 升
实	250614 升
糯谷率（法）	7
配米	$250614 \div 7 = 35802$ 升 = 358 石 2 升

第 78 题：炼金计值（三合均价）

问：库有三色金，共五千两，内：

八分金：一千二百五十两，两价四百贯文；

七分五厘金：一千六百两，两价三百七十五贯文；

八分五厘金：二千一百五十两，两价四百二十五贯文；

并欲炼为足色，每两工、食、药、炭钱三贯文，耗金九百七十二两五钱。

欲知色分，及两价各几何？

答曰：金色十分；两价：五百三贯七百二十四文五百三十七分文之二百一十二。

术曰：以方田及粟米求之。

置共数，以耗减之，余为法；以三色分数各乘两数，并之为色分实；

以三色价数各乘两数为寄，以工药价乘共金，并寄，共为价实；

二实皆如法而一，即各得。

草曰：置共金 5000 两，减耗 972 两 5 钱，外余 4027 两 5 钱，为法；

次置 1250 两，乘 8 分，得 10000 分，于上；置 1600 两，以 7 分 5 厘乘之得 12000 分，加上，置 2150 两，乘 8 分 5 厘，得 18275 分，又加上，共得 40275 分，为分实；

金色	8 分	7 分 5 厘	8 分 5 厘	
两价	400 贯	375 贯	425 贯	
金重	1250 两	1600 两	2150 两	
金色	10000 分	12000 分	18275 分	40275

次置 1250 两，乘 400 贯，得 50 万贯，为寄；

次置 1600 两，乘价 375 贯，得 60 万贯，加寄；

次置 2150 两，乘价 425 贯，得 913750 贯，又加寄；

金色	8 分	7 分 5 厘	8 分 5 厘	
两价	400 贯	375 贯	425 贯	
金重	1250 两	1600 两	2150 两	
金价	500000 贯	600000 贯	913750 贯	2013750

次置共金 5000 两，乘工药钱 3 贯，得 15000 贯，又加寄；共得 2028750 贯，为价实。

二实皆如法 40275 钱而一；

其色得十分，为足色；

其价，每两得 503724 文 40275 分文之 15900；不尽 15900 与法 40275 求等，得 75，俱约之，为 573 分文之 212。

	实	实如法 40275 钱而一
金色	40275 分	1=100%，即十分。
金价	2028750000 文	503724 文 40275 分文之 15900

【编者注：货币单位：1 贯=1000 文；1 文=10 分；1 分=10 厘；】

第 79 题：竹围芦束

问：受给场交收：竹二千三百七十四把，内：
 篁竹一千一百五十一把，每把外围三十六竿；
 水竹一千二百二十三把，每把外围四十二竿；
 芦三千六十五束，入方形矩中，其芦原样五尺五寸，今纳到围小，每束围五尺；
 欲知：合准原芦几束，及水竹、篁竹各几何。

答曰：篁竹一十四万六千一百七十七竿；
 水竹二十万六千六百八十七竿；
 合准原芦二千五百三十三束一百二十一分束之七。

术曰：以方田及圆率求之。

置原束差，并竹外围竹数，以乘外围；又乘把数为竹实；倍圆束差为竹法，除之，各得二竹数；皆以把数为心，加入各得竹条数，置芦围尺数自乘，以乘芦束为芦实；以芦原尺数自乘为芦法，除实，得所准芦束数。

草曰：置圆束差 6，并篁竹外围 36 竿，得 42 竿，以乘外围 36 竿，得 1512 竿；又乘篁竹 1151 把得 1740312 竿，为篁竹实；倍圆束差 6 得 12 为竹法，除实得 145026 竿；以把数 1151 并之，得 146177 竿，为篁竹；

圆束差	6	
竹法		$2 \times 6 = 12$
篁竹每把外围	36 竿	$36 \times (6 + 36) = 1512$ 竿
篁竹把数	1151 把	
篁竹实		$1512 \times 1151 = 1740312$ 竿
篁竹根数		$1740312 \div 12 + 1151 = 146177$ 竿

又置圆束差 6，并水竹外围 42 竿，得 48 竿，以乘水外围 42 竿，得 2016 竿，又乘水竹 1223 把，得 2466568 竿，为水竹实；亦以竹法 12 除之，得 205464 竿，以水竹把数 1223 并之，得 206687 竿，为水竹数；

圆束差	6	
竹法		$2 \times 6 = 12$
水竹每把外围	42 竿	$42 \times (6 + 42) = 2016$ 竿
水竹把数	1223 把	
水竹实		$2016 \times 1223 = 2466568$ 竿
水竹根数		$2466568 \div 12 + 1223 = 206687$ 竿

次置芦围 5 尺，通为 50 寸，以自乘得 2500 寸，又乘芦束数 3065 束，得 7662500 寸，为芦实；以原样芦围 5 尺 5 寸，亦通为 55 寸，以自乘得 3025 寸，为芦法，除实得 2533 束，不尽 175 寸，与法求等，得 25，俱以约之，得 121 分束之 7，为芦 2533 束 121 分束之 7，合问。

捆扎芦苇每束外围	50 寸	$50^2 = 2500$ 寸
捆扎芦苇束数	3065 束	
捆扎芦苇实		$2500 \times 3065 = 7662500$ 寸
原样芦苇每束外围	55 寸	
原样芦苇法		$55^2 = 3025$ 寸
合原样芦苇束数		$7662500 \div 3025 = 2533 + 7/121$ 束

【编者注：篁竹每把外围 36 竿，每向内一围减少 6 竿， $36 \div 6 = 6$ ，中心只有 1 竿；】

第 80 题：推求典本

问：典库今年二月二十九日，有人取解一号。主家听得当事共算本息一百六十贯八百三十二文，称系前岁头腊月半解，十文月息二分二厘。欲知原本几何？

答曰：本一百二十贯文。

术曰：以粟米求之。

置积日，乘息分数，增三百为法；以三百乘共钱为实，实如法而一，得本。

草曰：置前年头腊月半，系 45 日，并去年 360，又加今年 59 日，共得 464 日为积日。

月息率	$22 \div 1000 = 0.022$
日息率	$0.022 \div 30 = 0.22 \div 300$
积日	$45 + 360 + 59 = 464$

乘息 2 分 2 厘得 102 文 8 厘，增 300 文，得 402 文 8 厘，为法；

利息（文）	$464 \times 0.22 \div 300 = 102.08 \div 300$
法（文）	$102.08 + 300 = 402.08$

以 300 文乘共钱 160 贯 832 文，得 48249 贯 600 文，为实；

共钱 300 倍	$16083200 \times 300 = 4824960000$ 文 = 482496000000 厘
----------	---

实如法而一，得 120 贯文为原本。

实：本息（厘）	482496000000
法（厘）	40208
实如法而一	12000000（厘）=120 贯文

【编者注：原文对 $4824960000 \div 40208$ 给出了详细的演算草图，未解何意；估计这是抄录者补充的内容。

实际上，这就是在解方程： $40208x - 4824960000 = 0$ 。

我们用秦九韶算法解答如下，以资参考：】

以 $\{a_1, a_0\} = \{40208, -4824960000\}$ 进行一变：

商	$x = 100000$
实 a_0	$40208x - 4824960000 = -804160000$
方 a_1	40208

一变结束。取 $x = 20000$ ，以 $\{a_1, a_0\} = \{40208, -804160000\}$ 进行一变：

商	$x = 20000$
实 a_0	$40208x - 804160000 = 0$
方 a_1	40208

实为 0，故 $x = 20000$ 文 = 120 贯文为所求。

换言之，除法运算只作乘法和加、减法运算即可。

第 81 题：积木计余

问：原管杉木一尖塚，从上取用，恰至尖塚中层，见存木一百一十七条；问：原木，用去木，各几何。

答曰：原木一百五十三条；用去木三十六条；

术曰：以少广，招法求之，堆积入之。

以招法定从隅，益方；开平方，得中层木数，亦为中层之层数；

既知中层数，则上层木数可求。

草曰：下层为中层之二倍；

依招法，下层与中层之和为中层三倍；下层与中层之差恰为中层；

即以 3 为从隅，1 为益方，倍见存木 117，得 234，为实，开平方：

一变	首商 $x=9$
实	$(3x-1)x-234=0$
从方	$3x-1=26$
从隅	1

得 9，为中层木数，亦为中层之层数；

次置中面 9 条，减 1，余 8，以乘 9 得 72，以半之得 36，为用去木数；

以加见存木 117 条，得 153，为原木数。合问。

中层木数	9 条	
上层数		$9-1=8$ 层
用去木数		$9(9-1)\div 2=36$ 条
见存木数	117 条	
原木之数		$117+36=153$ 条

“市易第九”现代文翻译

第 73 题：推算物价

问题：现在，榷货务分三批调拨三种货物，每批价值都是 147 万贯：

第一次调拨：沉香 3500 裹（guǒ），玳瑁（dàimào）2200 斤，乳香 375 套；

第二次调拨：沉香二千九百七十裹，玳瑁二千一百三十斤，乳香三千五十六套四分套之一；

第三次调拨：沉香三千二百裹，玳瑁一千五百斤，乳香三千七百五十套。

请问：沉香（裹），乳香（套），玳瑁（斤）的单价各是多少。

【编者注：榷货务，是宋朝管理贸易和税收的机构。】

【原文】推求物价

问榷货务，三次支物，准钱各一百四十七万贯文：先拨沉香三千五百裹（guǒ），玳瑁（dàimào）二千二百斤，乳香三百七十五套；次拨沉香二千九百七十裹，玳瑁二千一百三十斤，乳香三千五十六套四分套之一；后拨沉香三千二百裹，玳瑁一千五百斤，乳香三千七百五十套。欲求沉，乳，玳瑁裹，套，斤各价几何。

第 74 题：推算本钱，均分货物

问题：甲、乙、丙、丁四人租船到海外进行贸易。回来后，先去市舶务（宋朝的海关署）缴纳关税，之后，再扣除给船主家的货物，以抵押租船费用，还剩余：

沈香 5088 两；胡椒 10430 包[每包 40 斤]；象牙 212 合[大小称为合，斤两都相等]；

这是甲、乙、丙、丁四人合伙凑本钱做的一趟生意。凑本钱时，相互之间还有借贷；现在，四人来到官府，请求官府帮助裁断，他们说：

甲出的本钱：金 200 两，盐 4 袋（每袋值钞 18 道）；

乙出的本钱：银 800 两，盐 3 袋（每袋值钞 88 道）；

丙出的本钱：银 1670 两，度牒 15 道；

丁出的本钱：度牒 52 道，金 58 两 8 铢（24 铢为 1 两）；

以上本钱共估值 42 万 4000 贯。甲借盐钞给乙，乙银两借给丙，丙度牒借给丁，丁借金给甲；

现在应该把借的东西归还给原主人名下，再按比率平均分配上述各件货物。

请问：金，银，袋盐，度牒，原来的单价各是多少贯，以及四人应该分得沉香，胡椒，象牙各是多少。

【编者注：市舶务（司），中国宋、元、及明初在各海港设立的管理海上对外贸易的官府机构，相当于现在的海关。市舶务是市舶司的前身。

“甲分到官供称：”没有道理，现修改为“四人到府求官断，供称：”】

【原文】均货推本

问有海舶，归，赴务抽毕，除纳主家货物外，有：沉香五千八十八两，胡椒一万四百三十包[包四十斤]，象牙二百一十二合[大小为合，斤两俱等]；系甲、乙、丙、丁四人合本博到。缘昨来凑本，互有假借，甲分到官供称：甲：本金二百两，盐四袋，钞一十道；乙：本银八百两，盐三袋，钞八十八道；丙：本银一千六百七十两，度牒一十五道；丁：本度牒五十二道，金五十八两八铢；已上共估值四十二万四千贯。甲借乙钞，乙借丙银，丙借丁度牒，丁借甲金；今合拨各借物归原主名下，为率均分上件货物。欲知金，银，袋盐，度牒原价，及四人各合得香，椒，牙几何。

第 75 题：推出倒买倒卖的本钱

问题：出售度牒，差人营运：每 3 道度牒交易到盐 13 袋，每 2 袋盐交易到布 84 匹，每 15 匹布交易到绢 3 匹半，每 6 匹绢交易到白银 7 两 2 钱；如今，总共交易到白银 9172 两 8

钱。请问：原关度牒有多少道。

【编者注：差人营运，相当于让人去倒买倒卖。】

【原文】互易推本（易牒知原）

问出度牒差人营运，每三道易盐一十三袋，盐二袋易布八十四疋，布一十五疋易绢三疋半，绢六疋易银七两二钱，今赶到银九千一百七十二两八钱。欲知原关度牒道数几何。

第 76 题：豆、麦、油麻与米的交易

问题：豆 3 升，交换小麦 2 升；小麦 1 升 5 合，交换芝麻 8 合；芝麻 1 升 2 合，交换粳米 1 升 8 合。现在，打算用豆 14 石 4 斗，交换芝麻；用小麦 21 石 6 斗，交换粳米；请问：各交换得多少。

【编者注：菽（shū），豆类的总称[beans]。

芝麻[sesame]，又称为“脂麻”，“胡麻”，“油麻”；草本植物，茎上部四棱形，花白色，种子有白、黑、黄、褐等不同颜色；用芝麻榨的食用油具有特殊的香味，叫“芝麻油”，俗名“香油”，“麻油”。】

【原文】菽粟互易（粟米交易）

问菽三升，易小麦二升；小麦一升五合，易油麻八合；油麻一升二合，易粳米一升八合。今将菽一十四石四斗，欲易油麻，又将小麦二十一石六斗，欲易粳米，问各几何。

第 77 题：糯米交换小麦酿酒

问题：酒肆的酿酒规格：糯谷 7 石，碾出米 3 石；糯米 1 斗，交换小麦 1 斗 7 升；小麦 5 升，制作酒母 2 斤 4 两；酒母 11 斤，酿糯米酒 1 斗 3 升。

现在，有糯谷 1759 石 3 斗 8 升，打算取出一些糯谷，碾米，交换小麦，制作酒母，用来把剩余的糯谷碾出的米，酿成酒；请问：应该怎样安排各项的数量。

【编者注：

库，宋朝时期的酒肆称库 [wineshop]（卖酒、喝酒的店铺，大多是前铺后厂的经营模式）。

麴（麴、曲，qū），酒母 [leaven;yeast]。踏麴，制作酒母。醞（醞，yùn），酿酒。】

【原文】推计互易（计米易麦）

问库率：糯谷七石，出米三石；糯米一斗，易小麦一斗七升；小麦五升，踏麴二斤四两；麴一十一斤，醞糯米一斗三升。今有糯谷一千七百五十九石三斗八升，欲出谷，做米，易麦，踏麴，还自醞余谷之米；须令适足各合几何。

第 78 题：提纯金子

问题：府库里有三种成色的金，总共 5000 两，其中：

八分金：1250 两，每两价值 400 贯文；

七分五厘金：1600 两，每两价值 375 贯文；

八分五厘金：2150 两，每两价值 425 贯文；

现在，打算把它们提炼为足色金，每两的人工、伙食、药剂、煤炭钱合计 3 贯文，提炼过程中损耗金 972 两 5 钱。

请问：最终得到的金成色达到多少；每两金的价值是多少贯文；

【编者注：《数书九章新释》588 页的【新释】前面一段，与 586 页的内容重复了；并且，其中的“共得 40275 分，为分实；实如法 4027 两 5 钱而一，其色，得 10 分。”和“其色实余尽，得 10 分，为金色。”，以及【新释】中计算出的“得所求成色 $B=40275/4027.5=10$ 分”，都应该是误解了：金的成色十分，应该是指金的纯度为 100%，其数字应该是 $100\%=1$ ，而不是 $=10$ 分；提炼过程中损耗的金又称为“火耗”。】

【原文】炼金计值（三合均价）

问库有三色金，共五千两，内：八分金：一千二百五十两，两价四百贯文；七分五厘金：一千六百两，两价三百七十五贯文；八分五厘金：二千一百五十两，两价四百二十五贯文；

并欲炼为足色，每两工、食、药、炭钱三贯文，耗金九百七十二两五钱。欲知色分，及两价各几何。

第 79 题：关于竹围和芦束的计算

问题：现在，受给场收到：竹子 2374 把，其中包括：筍竹，1151 把，每把外围 36 竿；水竹，1223 把，每把外围 42 竿；

芦苇，3065 束，放入正方形量矩中，未捆扎的原样芦苇，每束边长 5 尺 5 寸，捆扎后边长变小，每束芦苇边长 5 尺；请问：按未捆扎的原样芦苇的每束边长计算，相当于是多少束；水竹、筍竹各多少根。

【编者注：受给场，是宋朝军队的物资供应机构。

原文关于芦苇的叙述含混不清；按照“草曰”意思，将原文调整为：

“芦三千六十五束，入方形矩中，其芦原样五尺五寸，今纳到围小，每束围五尺；

欲知：合准原芦几束，及水竹、筍竹各几何。”】

【原文】竹围芦束

问受给场交收：竹二千三百七十四把，内：筍竹一千一百五十一把，每把外围三十六竿；水竹一千二百二十三把，每把外围四十二竿；芦三千六十五束，每束围五尺，其芦原样五尺五寸，今纳到围小；合准原芦几束，及水筍竹各几何。

第 80 题：推算典当物品的本金

问题：今年二月二十九日，有人到典当铺来取回典当物品。他听到典当铺掌柜算出的本息是：160 贯 832 文，说是前年十一月十五日来的当，每十文付月息 2 分 2 厘。请问他典当物品的本金是多少。

【编者注：“取解一号主家”当是不知所云。

原文的“去”应该是“十文”，作为月息的计量单位理解，否则，原文中的“取解”与“解去”语义冲突；王守义《数书九章新释》597 页[注]的解释颇为牵强附会；《秦九韶与数书九章》458 页的末行的感叹更是无稽之谈；皆因“十文变去”而起，鲁鱼亥豕，呜呼哀哉。

此非利滚利息，不计复利。计算公式为：

本息 = 原本 $(1 + \text{日息} \times \text{积日})$ ；日息 = 月息 $\div 30$ ；

题中月息为：22/1000，即：每贯息 22 文 = 每十文息 2 分 2 厘。

馆按：题意谓“前年十一月半典钱，去年未取，今年二月二十九日取去，按日计利，共合本息钱 160832 文，月息每千 22 文，问本钱若干。”

法：当以积日乘息 22 文，以三十日除之，得 1000 文之共息，加 1000 文为一千文之本息共数，然后置今本息共数，以 1000 乘之，一千之本息共数除之，即得今本钱数。

草中以 10 文为本，以 2 分 2 厘为息，不以三十除之为共息，而以 30 乘 10 文得 300 为本，其理一也。】

【原文】推求典本

问典库今年二月二十九日，有人取解一号主家，听得当事共算本息一百六十贯八百三十二文，称系前岁头腊月半解去，月息利二分二厘。欲知原本几何？

第 81 题：积木计余

问题：圆柱形杉木，堆积成尖垛的形状，从上面往下取出使用，恰好用至尖垛的中间一层，现在，剩余的杉木有 117 条；请问：原有的杉木数目，已经用去的杉木数目，各是多少。

【编者注：原题应该不是秦九韶出的。现增加一点难度，修改如上。】

【原文】积木计余

问原管杉木一尖垛，偶不记数。从上取用至中间，见存九条为面，问：原木，及见存，各几何。