Some for Erdős-Straus conjecture

Hajime Mashima

May 24, 2016

Abstract

This is the expectation that "two or more of the natural number $\frac{4}{n}$ will be represented by the sum of the three unit fractions".

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (n \geq 2)$$

Contents

1 introduction

これは $n = 24k + 1 \quad (1 \leq k)$ を除いては比較的見つけやすい。その他のアプローチについていくつか示す。

1.1 $n = 24k' + 1$ のいくつかの規則性

$120k' + 25$、$120k' + 73$、$120k' + 97$ は $120k'(0 \leq k')$ の和において規則的であるが、$120k' + 49$、$120k' + 121$ については、この限りでないようである。

1.1.1 $n = 120k' + 25$

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,(2+8k')} + \frac{1}{10+40k'} \\
\frac{4}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{10+48k'} \\
\frac{4}{n+120} &= \frac{1}{(120\,(k'+1)+25)\,(8+6k')} + \frac{1}{(120\,(k'+1)+25)\,(4+3k')} + \frac{1}{40+30k'}
\end{aligned}
$$

1.1.2 $n = 120k' + 73$

$$
\frac{4}{n} = \frac{1}{n\,(10+15k')} + \frac{1}{n\,(4+6k')} + \frac{1}{20+30k'}
$$

1.1.3 $n = 120k' + 97$

$$
\frac{4}{n} = \frac{1}{n\,(50+60k')} + \frac{1}{n\,(10+12k')} + \frac{1}{25+30k'}
$$

1.2 $n = p$ と約数に関する規則性

Proposition 1 $p+1$(p は素数) の約数に $4k-1$ を含むものは成り立つ。

Example 2 $p+1 = 102$

divisor(1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102)

$4k-1 = 3$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{101} &= \frac{4}{1 \cdot 101} \\
&= \frac{3}{1 \cdot 101} + \frac{1}{1 \cdot 101} \\
&= \frac{102}{34 \cdot 1 \cdot 101} + \frac{1}{1 \cdot 101} \\
&= \frac{1}{34 \cdot 1 \cdot 101} + \frac{101}{34 \cdot 1 \cdot 101} + \frac{1}{1 \cdot 101} \\
&= \frac{1}{34 \cdot 1 \cdot 101} + \frac{1}{34 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 101}
\end{aligned}$$

$4k-1 = 51$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{101} &= \frac{52}{13 \cdot 101} \\
&= \frac{51}{13 \cdot 101} + \frac{1}{13 \cdot 101} \\
&= \frac{102}{2 \cdot 13 \cdot 101} + \frac{1}{13 \cdot 101} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 13 \cdot 101} + \frac{101}{2 \cdot 13 \cdot 101} + \frac{1}{13 \cdot 101} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 13 \cdot 101} + \frac{1}{2 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 101}
\end{aligned}$$

1.3 $n = p$ における導出

Definition 3 r を公約数、$a, b, c, N \in \mathbb{N}$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{4abc}{rp \cdot abc} &= \frac{4abc - b}{rp \cdot abc} + \frac{1}{rp \cdot ac} \\ &= \frac{4abc - (b+c)}{rp \cdot abc} + \frac{1}{rp \cdot ab} + \frac{1}{rp \cdot ac}\end{aligned}$$

$\frac{1}{rp \cdot ab} + \frac{1}{rp \cdot ac}$ の単位分数は確定しているから、ここまでの a, b, c は任意の値を取り得る。
$b + c = aN$ とおくと

$$b + c \equiv 0 \pmod{N} \tag{1}$$

$$\frac{4abc - (b+c)}{rp \cdot abc} = \frac{4bc - N}{rp \cdot bc}$$

さらに

$$rp = 4bc - N \tag{2}$$

とおくと

$$\frac{4}{rp} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{rp \cdot ab} + \frac{1}{rp \cdot ac}$$

$\frac{4}{p}$ 考えたいので

$$bc \equiv 0 \pmod{r} \tag{3}$$

(1) より

$$b + c \geq N \tag{4}$$

従って、(2)(4) を定義域として (1)(3) の条件を考えれば良いことになる。
$p = 4k + 3$ は $p = 4bc - 1$ に対応できるので、$r, N = 1$ として (1)(3) の条件を満たす。
$p = 4k + 1$ は $r = 1$ を調べて、存在しなければ $r = 2, 3 \cdots$ と順に調べる。

r	p	rp	bc	b	c	N	a	$b+c, aN$
2	13	26	8	4	2	6	1	6
1	17	17	5	5	1	3	2	6
1	29	29	8	8	1	3	3	9
2	37	74	20	10	2	6	2	12
1	41	41	11	11	1	3	4	12
1	53	53	14	14	1	3	5	15
1	61	61	18	9	2	11	1	11
2	73	146	40	10	4	14	1	14
1	89	89	23	23	1	3	8	24
2	97	194	52	26	2	14	2	28