Short Note n°3: Number Pi

Edgar Valdebenito

abstract

In this note we show some formulas related with: Number Pi

Fórmula para Pi

E.Valdebenito

28-03-2015 12:12:47

Resumen-Abstract

En esta nota mostramos una fórmula para la constante Pi: $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 3.1415 \ldots$

Introducción

El número $t = \tan\left(\frac{15\pi}{64}\right)$, es una raíz de la ecuación polinomial:

(1) $t^{16} - 16t^{15} - 120t^{14} + 560t^{13} + 1820t^{12} - 4368t^{11} - 8008t^{10} + 11440t^{9} + 12870t^{8} - 11440t^{7} - 8008t^{6} + 4368t^{5} + 1820t^{4} - 560t^{3} - 120t^{2} + 16t + 1 = 0$

El número t , se puede expresar en función de radicales:

(2) $$t = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} - \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$$

Sea s el número real que satisface las siguientes condiciones:

(3) $0 < s < 1 \quad \wedge \quad s - t\ \sinh s = 0$

El valor aproximado de s es:

(4) $s = 0.775642346283 \ldots$

Sea s_n , $n \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por:

(5) $s_{n+1} = \sinh^{-1}(s_n/t)$, $s_1 = 1$

La sucesión s_n , satisface la siguiente igualdad:

(6) $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Fórmula Para Pi

La siguiente fórmula es válida:

(7)

$$\pi = \frac{128}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)s}\sin\left((2n+1)\sin^{-1}s\right) =$$

$$\frac{128}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)s}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}s^{2k+1}(1-s^2)^{n-k} =$$

$$\frac{128}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{t}{s+\sqrt{t^2+s^2}}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}s^{2k+1}(1-s^2)^{n-k}$$

Referencias

[1] Abramowitz, M., and Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. Nueva York: Dover , 1965.

[2] Boros, G., Moll, V.: Irresistible Integrals.Cambridge University Press,2004.

[3] Gradshteyn, I.S., and Ryzhik, I.M.: Table of Integrals,Series and Products. 5th ed.,ed. Alan Jeffrey. Academic Press, 1994.

[4] Spiegel,M.R.: Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Company , New York , 1968.

[5] Valdebenito, E.:, Pi Handbook , manuscript , unpublished , 1989 , (20000 formulas).