La Conjecture de BEAL: Une Démonstration Complète

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl. Ing.

Email:abenhadjsalem@gmail.com

6, Rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia.

Abstract

In 1997, Andrew Beal [1] announced the following conjecture : *Let $A, B, C, m, n,$ and l be positive integers with $m, n, l > 2$. If $A^m + B^n = C^l$ then $A, B,$ and C have a common factor.* We begin to construct the polynomial $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ with p, q integers depending of A^m, B^n and C^l. We resolve $x^3 - px + q = 0$ and we obtain the three roots x_1, x_2, x_3 as functions of p, q and a parameter θ. Since $A^m, B^n, -C^l$ are the only roots of $x^3 - px + q = 0$, we discuss the conditions that x_1, x_2, x_3 are integers. Three numerical examples are also given.

Keywords: Prime numbers, divisibility, roots of polynomials of third degree.

O my Lord! Increase me further in knowledge.

(Holy Quran, Surah Ta Ha, 20:114.)

A mon épouse Wahida

1 Introduction

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante:

Conjecture 1.1. Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si:

$$A^m + B^n = C^l \tag{1.1}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur commun.

Dans ce papier, nous allons donner une démonstration complète de la conjecture de Beal. Notre idée est de considérer un polynôme $P(x)$ de troisième degré ayant comme racines les nombres A^m, B^n et $-C^l$ en tenant compte de la condition (1.1). Le papier est organisé comme suit: dans la section 2, nous exprimons les racines de $P(x) = x^3 - px + q = 0$ en fonction de deux paramètres ρ, θ qui dépendent de A^m, B^n et C^l. La section 3 représente la partie importante du papier, nous obtenons que $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}cos^2\dfrac{\theta}{3}$. Comme A^{2m} est un entier, il s'ensuit que $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ doit être écrit comme une fraction $\frac{a}{b}$ où a, b sont deux entiers positifs non nuls copremiers. Nous discutons alors les conditions de divisibilité de p, a, b telles que l'expression de A^{2m} soit un entier. Suivant les cas étudiés, nous obtenons que A, B, C aient ou non un facteur commun. Dans la section 4, trois exemples numériques sont présentés et nous finissons par la conclusion en section 5.

1.1 Cas trivial

Nous commençons avec le cas trivial où $A^m = B^n$. L'équation (1.1) devient:

$$2A^m = C^l \tag{1.2}$$

Comme $l > 2$, nous déduisons facilement que 2 est un facteur commun. La conjecture (1.1) est vérifiée.

Nous supposons dans la suite que $A^m > B^n$.

2 Calculs Préliminaires

Nous supposons la donnée de $m, n, l \in \mathcal{N}^* \ > 2$ et $A, B, C \in \mathcal{N}^*$ tels que:

$$A^m + B^n = C^l \tag{2.1}$$

Nous appelerons :

$$P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) \tag{2.2}$$

Utilisant l'équation (2.1), $P(x)$ peut s'écrire:

$$P(x) = x^3 + x[A^m B^n - (A^m + B^n)^2] + A^m B^n (A^m + B^n) \tag{2.3}$$

Nous introduisons les notations:

$$p = (A^m + B^n)^2 - A^m B^n; \quad q = A^m B^n (A^m + B^n) \tag{2.4}$$

Comme $A^m \neq B^n$, nous obtenons $p > 0$. L'équation (2.3) devient:

$$P(x) = x^3 - px + q \tag{2.5}$$

en utilisant l'équation (2.2), $P(x) = 0$ a trois racines réelles différentes : A^m, B^n et $-C^l$. Maintenant, résolvons l'équation:

$$P(x) = x^3 - px + q = 0 \tag{2.6}$$

Pour résoudre (2.6), posons:

$$x = u + v; \quad \alpha = A^m B^n > 0; \quad \beta = (A^m + B^n)^2 \tag{2.7}$$

Alors $P(x) = 0$ donne les deux conditions sur u et v:

$$u^3 + v^3 = -q; \quad uv = p/3 > 0 \tag{2.8}$$

Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré:

$$X^2 + qX + p^3/27 = 0 \tag{2.9}$$

Son descriminant Δ s'écrit :

$$\Delta = q^2 - 4p^3/27 = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{\overline{\Delta}}{27}$$

avec:

$$\overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27\alpha^2\beta - 4(\beta - \alpha)^3$$

Comme $\alpha \neq 0$, nous pouvons aussi re-écrire l'équation précédente comme :

$$\overline{\Delta} = \alpha^3 \left(27\frac{\beta}{\alpha} - 4\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^3 \right)$$

Nous appelons t le paramètre $\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\overline{\Delta}$ devient :

$$\overline{\Delta} = \alpha^3(27t - 4(t-1)^3)$$

Notons :

$$y = y(t) = 27t - 4(t-1)^3 \tag{2.10}$$

Comme $\alpha > 0$, le signe de $\overline{\Delta}$ est aussi le signe de $y(t)$. L'étude du signe de la fonction y montre que $y < 0$ pour $t > 4$. Dans notre cas, nous sommes intéressés à $t > 0$. Pour $t = 4$ nous obtenons $y(4) = 0$ et pour $t \in]0, 4[\ y > 0$. Comme nous avons $t = \frac{\beta}{\alpha} > 4$ parce que $A^m \neq B^n$:

$$(A^m - B^n)^2 > 0 \Longrightarrow \beta = (A^m + B^n)^2 > 4\alpha = 4A^mB^n \tag{2.11}$$

Alors $y < 0 \Longrightarrow \overline{\Delta} < 0 \Longrightarrow \Delta < 0$. Alors l'équation (2.9) n'a pas de racines réelles u^3 et v^3. Retrouvons les solutions u et v avec $x = u + v$ un réel positif ou négatif et $u.v = p/3$.

2.1 Démonstration

Proof. Les solutions de l'équation (2.9) sont:

$$X_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad X_2 = \overline{X_1} = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Nous devons résoudre:

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad v^3 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Ecrivons X_1 sous la forme $X_1 = \rho e^{i\theta}$ avec:

$$\rho = \frac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2} = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}; \quad sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} > 0; \quad cos\theta = -\frac{q}{2\rho} < 0 \tag{2.12}$$

alors $\theta\,[2\pi] \in]+\dfrac{\pi}{2}, +\pi[$, soit:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < +\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < cos\frac{\theta}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{2.13}$$

et:

$$\boxed{\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} < \frac{3}{4}} \tag{2.14}$$

d'où l'expression de X_2: $X_2 = \rho e^{-i\theta}$. Posons :

$$u = re^{i\psi}\,; \quad \text{et } j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \tag{2.15}$$

avec j est une racine complexe cubique de l'unité, alors les solutions u et v sont:

$$\begin{cases} u_1 = re^{i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}} \\ u_2 = re^{i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}je^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \\ u_3 = re^{i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{+i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \end{cases} \tag{2.16}$$

et similairement:

$$\begin{cases} v_1 = re^{-i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{-i\frac{\theta}{3}} \\ v_2 = re^{-i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi-\theta}{3}} \\ v_3 = re^{-i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}je^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{2\pi-\theta}{3}} \end{cases} \tag{2.17}$$

Nous devons choisir u_k et v_h tels que $u_k + v_h$ soit réel. Dans ce cas, nous avons nécessairement :

$$v_1 = \overline{u_1}; \quad v_2 = \overline{u_2}; \quad v_3 = \overline{u_3}$$

Nous obtenons comme solutions réelles de l'équation (2.6):

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3} > 0 \\ x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) < 0 \\ x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) > 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Comparant les expressions de x_1 et x_3, nous obtenons facilement $x_1 > x_3$. Comme A^m, B^n et $-C^l$ sont les seules solutions réelles de (2.6), nous considérons, comme A^m est supposé supérieur à B^n, les expressions:

$$\boxed{\begin{cases} A^m = x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3} \\ B^n = x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) \\ -C^l = x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) \end{cases}} \tag{2.19}$$

□

3 La Démonstration du Principal Théorème

Théorème 3.1. *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si:*

$$A^m + B^n = C^l \tag{3.1}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur commun.

Proof. $A^m = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3}$ est un entier $\Rightarrow A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\dfrac{\theta}{3}$ est un entier. Mais:

$$\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3} \tag{3.2}$$

Alors:

$$A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3} = 4\frac{p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} \tag{3.3}$$

Comme A^{2m} est un entier, et p est un entier, alors $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ doit être écrit sous la forme:

$$\boxed{cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{1}{b} \quad ou \quad cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}} \tag{3.4}$$

avec $b \in \mathcal{N}^*$, pour la dernière condition $a \in \mathcal{N}^*$ et a, b copremiers.

3.1 Cas $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{1}{b}$

Nous obtenons :

$$A^{2m} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3.b} \tag{3.5}$$

Comme $\dfrac{1}{4} < cos^2\dfrac{\theta}{3} < \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{3}{4} \Rightarrow b < 4 < 3b \Rightarrow b = 1, 2, 3.$

3.1.1 $b = 1$

$b = 1 \Rightarrow 4 < 3$ ce qui est impossible.

3.1.2 $b = 2$

$b = 2 \Rightarrow A^{2m} = p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{2.p}{3} \Rightarrow 3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parceque $3 \ll p$, nous obtenons:

$$A^{2m} = (A^m)^2 = \frac{2p}{3} = 2.p' = 4p"^2 \quad avec \quad p' = 2p"^2 \tag{3.6}$$

et :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = p' = 2p"^2 \tag{3.7}$$

Il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1) est vraie dans ce cas.

3.1.3 $b = 3$

$b = 3 \Rightarrow A^{2m} = p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{4p}{9} \Rightarrow 9|p \Rightarrow p = 9p'$ avec $p' \neq 1$ comme $9 \ll p$ then $A^{2m} = 4p' \Longrightarrow p'$ n'est pas premier. Or $B^nC^l = 5p'$, là aussi, il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1) est vraie.

3.2 Cas $a > 1,\ cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b}$

Nous avons donc:

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}\,; \quad A^{2m} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p.a}{3.b} \tag{3.8}$$

où a, b vérifient l'une des deux conditions:

$$\boxed{\{3|p \quad et \quad b|4p\}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{3|a \quad et \quad b|4p\}} \tag{3.9}$$

et en utilisant l'équation (2.14), nous obtenons une troisième condition:

$$\boxed{b < 4a < 3b} \tag{3.10}$$

Pour ces conditions, $A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3} = 4\dfrac{p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3}$ est un entier.

Etudions alors les conditions données par l'équation (3.9).

3.2.1 Hypothèse: $\{3|p \quad et \quad b|4p\}$

3.2.1.1. Cas $b = 2$ et $3|p$ $3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, et $b = 2$, nous obtenons:

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3b} = \frac{4.p'.a}{2} = 2.p'.a \tag{3.11}$$

Comme:

$$\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a = 1 \tag{3.12}$$

mais $a > 1$ alors le cas $b = 2$ et $3|p$ est impossible.

3.2.1.2. Cas $b = 4$ et $3|p$ Nous avons $3|p \Longrightarrow p = 3p'$ avec $p' \in \mathcal{N}^*$, il s'ensuit:

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3 \times 4} = p'.a \tag{3.13}$$

et:

$$\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow 1 < a < 3 \Rightarrow a = 2 \tag{3.14}$$

mais a, b sont copremiers. Alors le cas $b = 4$ et $3|p$ est impossible.

3.2.1.3. Cas: $b \neq 2, b \neq 4,\ b|p$ et $3|p$ Comme $3|p$ alors $p = 3p'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3}\frac{a}{b} = \frac{4p'a}{b} \tag{3.15}$$

Nous considérons le cas: $b|p' \Longrightarrow p' = bp"$ et $p" \neq 1$ (si $p" = 1$, alors $p = 3b$, voir paragraphe **3.2.1.8.** cas **A.2.**). Finalement, nous obtenons:

$$A^{2m} = \frac{4bp"a}{b} = 4ap"\,; \quad B^nC^l = p".(3b - 4a) \tag{3.16}$$

Là aussi, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.

Vérifions la condition (3.10) donnée par $b < 4a < 3b$. Dans notre cas, la condition devient :

$$p < 3A^{2m} < 3p \quad avec \quad p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \tag{3.17}$$

et $3A^{2m} < 3p \Longrightarrow A^{2m} < p$ est donc vérifié. Si :

$$p < 3A^{2m} \Longrightarrow 2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} \overbrace{>}^{?} 0$$

En étudiant le signe du polynôme $Q(Y) = 2Y^2 - B^n Y - B^{2n}$ et en prenant $Y = A^m > B^n$, la condition $2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} > 0$ est vérifiée, par suite, la condition $b < 4a < 3b$ est vraie.

Dans la suite du papier, nous vérifions facilement que la condition $b < 4a < 3b$ implique à vérifier $A^m > B^n$ ce qu'est vrai.

3.2.1.4. Cas $b = 3$ et $3|p$: comme $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, nous écrivons :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3}\frac{a}{3} = \frac{4p'a}{3} \tag{3.18}$$

Comme A^{2m} est un entier et que a et b sont copremiers et $cos^2 \dfrac{\theta}{3}$ ne peut pas prendre la valeur 1 en référence à l'équation (2.13), alors nous avons nécessairement $3|p' \Longrightarrow p' = 3p"$ avec $p" \neq 1$, si non $p = 3p' = 3 \times 3p" = 9$ mais $9 \ll (p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n)$, l'hypothèse $p" = 1$ est impossible, alors $p" > 1$. D'où:

$$A^{2m} = \frac{4p'a}{3} = \frac{4 \times 3p"a}{3} = 4p"a\,; \quad B^n C^l = p".(9 - 4a) \tag{3.19}$$

Comme $\dfrac{1}{4} < cos^2 \dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{3} < \dfrac{3}{4} \Longrightarrow 3 < 4a < 9 \Longrightarrow$ comme $a > 1, a = 2$ et nous obtenons:

$$A^{2m} = 4p"a = 8p"\,; \quad B^n C^l = \frac{3p"(9 - 4a)}{3} = p" \tag{3.20}$$

Les 2 dernières équations ci-dessus impliquent que $p"$ n'est pas premier. Là aussi, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.

3.2.1.5. Cas $3|p$ et $b = p$ Nous avons $cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{p}$ et:

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{p} = \frac{4a}{3} \tag{3.21}$$

Comme A^{2m} est un entier, ce-ci implique que $3|a$, mais $3|p \Longrightarrow 3|b$. Comme a et b sont copremiers, d'où la contradiction. Alors le cas $3|p$ et $b = p$ est impossible.

3.2.1.6. Cas $3|p$ et $b = 4p$ $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, par suite $b = 4p = 12p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{a}{3} \Longrightarrow 3|a \tag{3.22}$$

car A^{2m} est un entier. Mais $3|p \Longrightarrow 3|\,[(4p) = b]$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b copremiers. Alors le cas $b = 4p$ est impossible.

3.2.1.7. Cas $3|p$ et $b=2p$ $3|p \Longrightarrow p=3p'$, $p'\neq 1$ car $3\ll p$, d'où $b=2p=6p'$.

$$A^{2m}=\frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{4p}{3}\frac{a}{b}=\frac{2a}{3}\Longrightarrow 3|a \tag{3.23}$$

car A^{2m} est un entier, mais $3|p \Longrightarrow 3|(2p) \Longrightarrow 3|b$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a,b sont copremiers. Alors le cas $b=2p$ est impossible.

3.2.1.8. Cas $3|p$ et $b\neq 3$ est un diviseur de p Nous avons $b=p'\neq 3$, et p s'écrit $p=kp'$ *avec* $3|k \Longrightarrow k=3k'$ et :

$$A^{2m}=\frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{4p}{3}.\frac{a}{b}=4ak'\,;\quad B^nC^l=\frac{p}{3}.\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)=k'(3p'-4a) \tag{3.24}$$

A.1. $k'\neq 1$: là aussi, il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1) est vraie.
A.2. $k'=1$: Si $k'=1 \Longrightarrow p=3b$, alors nous avons $A^{2m}=4a$, par suite a est pair et :

$$A^mB^n=2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3}.\sqrt[3]{\rho}\left(\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}-cos\frac{\theta}{3}\right)=\frac{p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3}-2a$$

ou encore:

$$A^{2m}+2A^mB^n=\frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3}=2b\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{3.25}$$

Le membre à gauche de (3.25) est un entier et b aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme:

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3}=\frac{k_1}{k_2} \tag{3.26}$$

où k_1,k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|b \Longrightarrow b=k_2.k_3$.

A.2.1. $k'=1$ et $k_3\neq 1$: alors :

$$A^{2m}+2A^mB^n=k_3.k_1 \tag{3.27}$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_3$. Si $\mu=2 \Rightarrow 2|b$ mais $2|a$ ce-ci est en contradiction avec a,b copremiers. Nous supposons donc $\mu\neq 2$ et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m+2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m+2B^n)$.

A.2.1.1. $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|4a \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_3 \Longrightarrow \mu|b$ et que a,b sont copremiers d'où la contradiction.

A.2.1.2. $\mu|(A^m+2B^n)$: Si $\mu|(A^m+2B^n) \Longrightarrow \mu\nmid A^m$ et $\mu\nmid 2B^n$ alors $\mu\neq 2$ et $\mu\nmid B^n$. $\mu|(A^m+2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m+2B^n=\mu.t'$ $t'\in\mathcal{N}^*$. Il s'ensuit:

$$A^m+B^n=\mu t'-B^n \Longrightarrow A^{2m}+B^{2n}+2A^mB^n=\mu^2t'^2-2t'\mu B^n+B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p, nous obtenons:

$$p=t'^2\mu^2-2t'B^n\mu+B^n(B^n-A^m)$$

Comme $p=3b=3k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ d'où $\mu|p \Longrightarrow p=\mu\mu'$, alors nous avons :

$$\mu'\mu=\mu(\mu t'^2-2t'B^n)+B^n(B^n-A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

A.2.1.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec **A.2.1.2.**

A.2.1.2.2. $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons $\mu|3B^n \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu = 3$.
A.2.1.2.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec **A.2.1.2.**

A.2.1.2.2.2. $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_3 \Longrightarrow k_3 = 3k_3'$, et nous avons $b = k_2k_3 = 3k_2k_3'$, il s'ensuit $p = 3b = 9k_2k_3'$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors:

$$9k_2k_3' - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons:

$$3(3k_2k_3' - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2 \tag{3.28}$$

d'où:

$$3|(3k_2k_3' - A^mB^n) \Longrightarrow\ 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m\ ou\ 3|B^n$$

A.2.1.2.2.2.1. $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A$ et nous avons aussi $3|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a \Longrightarrow 3|4a \Longrightarrow 3|a$. Comme $b = 3k_2k_3'$ alors $3|b$, mais a, b sont copremiers d'où la contradiction. Alors $3 \nmid A$.

A.2.1.2.2.2.2. $3|B^m$: Si $3|B^n \Longrightarrow 3|B$, or l'équation (3.28) implique $3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A$. Mais en utilisant le résultat du cas précédent, nous obtenons $3 \nmid A$.

Alors l'hypothèse $k_3 \neq 1$ est impossible.

A.2.2.: Maintenant, nous supposons que $k_3 = 1 \Longrightarrow b = k_2$ et $p = 3b = 3k_2$. nous avons alors:

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \tag{3.29}$$

avec k_1, b copremiers, nous écrivons (3.29) comme :

$$4\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$, nous obtenons:

$$3 \times 4^2.a(b - a) = k_1^2 \tag{3.30}$$

ce qui implique que :

$$3|a \quad ou \quad 3|(b - a)$$

A.2.2.1. $3|a$: Si $3|a$, comme $A^{2m} = 4a \Longrightarrow 3|A^m$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ et que $3|p \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 9|(A^m - B^n)^2$. D'où $9|(p = 3b) \Longrightarrow 3|b$, il s'ensuit la contradiction avec a, b copremiers.

A.2.2.2. $3|(b - a)$: Considérons maintenant que $3|(b - a)$. Comme $k_1 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (3.27) et que $3|k_1 \Longrightarrow 3|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|(A^m + 2B^n)$.

A.2.2.2.1. $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A \Longrightarrow 3|A^{2m}$ alors $3|4a \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

A.2.2.2.2. $3|(A^m + 2B^n)$: Si:

$$3|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \tag{3.31}$$

mais $p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors $p - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 9|(p - 3A^mB^n)$ ou $9|(3b - 3A^mB^n)$, d'où $3|(b - A^mB^n)$ mais $3|(b - a) \Longrightarrow 3|(a - A^mB^n)$. Comme $A^{2m} = 4a = (A^m)^2 \Longrightarrow \exists a' \in \mathcal{N}^*$ et $a = a'^2 \Longrightarrow A^m = 2a'$. Nous arrivons à $3|(a'^2 - 2a'B^n) \Longrightarrow 3|a'(a' - 2B^n)$:

A.2.2.2.2.1. $3|a'$: Si $3|a' \Longrightarrow 3|a'^2 \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b - a) \Longrightarrow 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

A.2.2.2.2.2. $3|(a' - 2B^n)$: Si $3|(a' - 2B^n) \Longrightarrow 3|(2a' - 4B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - 4B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)$, nous retrouvons l'hypothèse de départ (3.31) ci-dessus.

L'étude du cas 3.2.1.8. est donc achevée.

3.2.1.9 Cas $3|p$ et $b|4p$ Comme $3|p \Rightarrow p = 3p'$ et $b|4p \Rightarrow \exists k_1 \in \mathcal{N}^*$ et $4p = 12p' = k_1b$.

B.1. $k_1 = 1$: Si $k_1 = 1$ donc $b = 12p'$, ($p' \neq 1$ sinon $p = 3 \ll A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n$). Mais $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{12p'}{3}\dfrac{a}{b} = \dfrac{4p'.a}{12p'} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow 3|a$ car A^{2m} est un entier, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

B.2. $k_1 = 3$: Si $k_1 = 3$, d'où $b = 4p'$ et $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{k_1.a}{3} = a$. Le calcul de A^mB^n donne $A^mB^n = \dfrac{p\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3} - \dfrac{a}{2}$, soit :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = 2p'\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{3.32}$$

Le membre à gauche de (3.32) est un entier et p' aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme:

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{k_3} \tag{3.33}$$

où k_2, k_3 sont deux entiers copremiers et $k_3|p' \Longrightarrow p' = k_3.k_4$.

B.2.1. $k_4 \neq 1$: Nous supposons $k_4 \neq 1$, alors:

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_2.k_4 \tag{3.34}$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_4$. Alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

B.2.1.1. $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_4 \Longrightarrow \mu|p' \Rightarrow \mu|(4p'=b)$. Or a, b sont copremiers d'où la contradiction.

B.2.1.2. $\mu|(A^m+2B^n)$: Si $\mu|(A^m+2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m+2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m+2B^n = \mu.t'$ $t' \in \mathcal{N}^*$. Il s'ensuit:

$$A^m+B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m}+B^{2n}+2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

Utilisant l'expression de p, nous obtenons $p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$. Comme $p = 3p'$ et $\mu|p' \Rightarrow \mu|(3p') \Rightarrow \mu|p$, on peut écrire :$\exists \mu' \in \mathcal{N}^*$ et $p = \mu\mu'$, alors nous avons :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

B.2.1.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec **B.2.1.2.**

B.2.1.2.2. $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m+2B^n)$, nous obtenons $\mu|3B^n \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu = 3$.

B.2.1.2.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec **B.2.1.2.**

B.2.1.2.2.2. $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_4 \Longrightarrow k_4 = 3k'_4$, et nous avons $p' = k_3k_4 = 3k_3k'_4$, il s'ensuit $p = 3p' = 9k_3k'_4$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors:

$$9k_4k'_5 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons : $3(3k_4k'_5 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2$, d'où : $3|(3k_4k'_5 - A^mB^n) \Longrightarrow 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|B^n$.

B.2.1.2.2.2.1. $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|a$, mais $3|p' \Rightarrow 3|(4p')$ soit $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Alors $3 \nmid A$.

B.2.1.2.2.2.2. $3|B^n$: Si $3|B^n$ or $A^m = \mu t' - 2B^n = 3t' - 2B^n \Longrightarrow 3|A^m$, ce qui est contradictoire. Alors l'hypothèse $k_4 \neq 1$ est impossible.

B.2.2. $k_4 = 1$: Maintenant, nous supposons que $k_4 = 1 \Longrightarrow p' = k_3k_4 = k_3$. Nous avons alors:

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{p'} \tag{3.35}$$

avec k_2, p' copremiers, nous écrivons (3.35) comme :

$$4\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_2}{p'}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$ et $b = 4p'$, nous obtenons:

$$3.a(b-a) = k_2^2 \tag{3.36}$$

ce qui implique que :

$$3|a \quad ou \quad 3|(b-a)$$

B.2.2.1. $3|a$: Si $3|a \Rightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|A$, comme $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ et que $3|p \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)$. Or $3|A$ d'où $3|B^n \Longrightarrow 3|B$, il s'ensuit $9|p \Longrightarrow 3|p' \Longrightarrow 3|(4p' = b)$. D'où la contradiction avec a, b copremiers.

B.2.2.2. $3|(b-a)$: Si $3|(b-a)$. Comme $k_2 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (3.34) et que $3|k_2 \Longrightarrow 3|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|(A^m + 2B^n)$.

B.2.2.2.1. $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

B.2.2.2.2. $3|(A^m + 2B^n)$:

$$3|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \tag{3.37}$$

mais $p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors $p - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 9|(p - 3A^mB^n)$ ou $9|(3p' - 3A^mB^n)$, d'où $3|(p' - A^mB^n) \Rightarrow 3|4(p' - 4A^mB^n) \Rightarrow 3|(b - 4A^mB^n)$ mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|(a - A^mB^n)$. Comme $3|(A^{2m} - 4A^mB^n) \Rightarrow 3|A^m(A^m - 4B^n)$.

B.2.2.2.2.1. $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

B.2.2.2.2.2. $3|(A^m - 4B^n)$: Maintenant si $3|(A^m - 4B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)$, nous retrouvons l'hypothèse de départ (3.37) ci-dessus.

B.3.: Nous supposons $k_1 \neq 3$ et $3|k_1 \Longrightarrow k_1 = 3k'1$ avec $k'_1 \neq 1$, alors $4p = 12p' = k_1b = 3k'_1b \Rightarrow 4p' = k'_1b$. A^{2m} s'écrit $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3k'_1b}{3}\dfrac{a}{b} = k'_1a$ et $B^nC^l = \dfrac{k'_1}{4}(3b - 4a)$. Comme B^nC^l est un entier, on doit avoir $4|(3b-4a)$ ou $4|k'_1$.

B.3.1. $4|(3b-4a)$: On suppose que $4|(3b-4a) \Longrightarrow \dfrac{3b-4a}{4} = c \in \mathcal{N}^*$, et nous avons:

$$A^{2m} = k'_1a$$
$$B^nC^l = k'_1c$$

Il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1) est vraie.

B.3.2. $k'_1 = 4$: On suppose que $k'_1 = 4$. Nous avons alors : $A^{2m} = 4a$ et $B^nC^l = 3b - 4a = 3p' - 4a$. Ce cas a été traité dans le paragraphe **3.2.1.8.** cas **A.2.**.

B.3.3. $k'_1 = 4k"_1$: Si $k'_1 = 4k"_1$ avec $k"_1 > 1$. On a donc:

$$A^{2m} = 4k"_1a \tag{3.38}$$
$$B^nC^l = k"_1(3b - 4a) \tag{3.39}$$

Il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1) est vraie.

3.2.2 Hypothèse : $\{3|a \quad et \quad b|4p\}$

Nous avons donc :

$$3|a \Longrightarrow \exists a' \in \mathcal{N}^* \ / \ a = 3a' \tag{3.40}$$

3.2.2.1. Cas $b = 2$ **et** $3|a$ $\quad A^{2m}$ s'écrit $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{2.p.a}{3}$. En utilisant l'équation (3.40), A^{2m} devient $2.p.a'$, mais $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3a'}{2} > 1$ ce qui est impossible, d'où $b \neq 2$.

3.2.2.2. Cas $b = 4$ **et** $3|a$ $\quad A^{2m}$ s'écrit $p.a'$ et $cos^2\frac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3.a'}{4} < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow a' < 1$ ce qui est impossible. Alors le cas $b = 4$ est impossible.

3.2.2.3. Cas $b = p$ **et** $3|a$ $\quad$ Nous avons $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3a'}{p}$ et:

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{p} = 4a' = (A^m)^2 \Longrightarrow \exists a" \in \mathcal{N}^* \ / \ a' = a"^2 \tag{3.41}$$

Le calcul A^mB^n donne $A^mB^n = p.\dfrac{\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3} - 2a'$ ou encore:

$$A^mB^n + 2a' = p.\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{3.42}$$

Le membre à gauche de (3.42) est un entier et p aussi, alors $2\dfrac{\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ s'écrit sous la forme :

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{3.43}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \Longrightarrow p = b = k_2.k_3$, $k_3 \in \mathcal{N}^*$.

C.1. $k_3 \neq 1$: Nous supposons que $k_3 \neq 1$, nous obtenons $A^m(A^m + 2B^n) = k_1.k_3$. Soit μ un entier premier avec $\mu|k_3$, alors $\mu|b$ et $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

C.1.1. $\mu|A^m$:Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A$ et $\mu|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a' \Longrightarrow \mu|4a' \Longrightarrow (\mu = 2$ mais $2|a')$ ou $(\mu|a')$. Alors $\mu|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

C.1.2. $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. Nous écrivons $\mu|(A^m + 2B^n)$ comme:

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathcal{N}^* \tag{3.44}$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p:

$$p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m) \tag{3.45}$$

Comme $p = b = k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \Longrightarrow \exists\mu' \in \mathcal{N}^*$ et $b = \mu\mu'$, ainsi nous pouvons écrire:

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m) \tag{3.46}$$

De la dernière équation, nous obtenons $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

C.1.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n$ ce qui en contradiction avec $\mu \nmid B^n$ cité ci-dessus en **C.1.2.**.

C.1.2.2. $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous arrivons à $\mu|3B^n \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu = 3$.

C.1.2.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n$ ce qui en contradiction avec $\mu \nmid B^n$ cité ci-dessus en **C.1.2.**.

C.1.2.2.2. $\mu = 3$: Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ alors la contradiction avec a, b copremiers.

C.2. $k_3 = 1$: Nous supposons maintenant $k_3 = 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_1; \quad b = k_2; \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \tag{3.47}$$

Prenons le carré du dernier terme, nous obtenons:

$$\frac{4}{3}sin^2\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2} \Longrightarrow \frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}.\frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

Finalement:

$$4^2a'(p - a) = k_1^2 \tag{3.48}$$

mais $a' = a"^2$, alors $p - a$ est un carré. Soit $\lambda^2 = p - a$. L'équation (3.48) devient :

$$4^2a"^2\lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = 4a"\lambda \tag{3.49}$$

en prenant la racine carrée positive. Mais $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = 2a"(A^m + 2B^n)$, par suite:

$$A^m + 2B^n = 2\lambda \tag{3.50}$$

Soit λ_1 un entier premier $\neq 2$, un diviseur de λ (sinon $(\lambda_1 = 2)|\lambda \Longrightarrow 2|\lambda^2 \Longrightarrow 2|(p - a)$ mais a est pair, alors $2|p \Longrightarrow 2|b$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers). Nous considérons $\lambda_1 \neq 2$ et $\lambda_1|\lambda$ et $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1 \nmid A^m$ sinon $\lambda_1|2B^n$ mais $\lambda_1 \neq 2$ alors $\lambda_1|B^n$, il s'ensuit $\lambda_1|(p = b)$ et $\lambda_1|A^m \Longrightarrow \lambda_1|2a" \Longrightarrow \lambda_1|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons maintenant $\lambda_1 \nmid A^m$. $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(A^m + 2B^n)^2$ c'est-à-dire $\lambda_1|(A^{2m} + 4A^mB^n + 4B^{2n})$ que nous écrivons comme $\lambda_1|(p + 3A^mB^n + 3B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(p + 3B^n(A^m + 2B^n) - 3B^{2n})$. Mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(p - 3B^{2n})$, comme $\lambda_1|(p - a)$ d'où par différence, nous obtenons $\lambda_1|(a - 3B^{2n})$ soit $\lambda_1|(3a' - 3B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|3(a' - B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1 = 3$ ou $\lambda_1|(a' - B^{2n})$.

C.2.1. $\lambda_1 = 3$: Si $\lambda_1 = 3$, mais $3|a \Longrightarrow 3|(p = b)$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

C.2.2. $\lambda_1|(a' - B^{2n})$: Si $\lambda_1|(a' - B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(a"^2 - B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(a" - B^n)(a" + B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(a" + B^n)$ ou $\lambda_1|(a" - B^n)$, car $(a" - B^n) \neq 1$ sinon nous obtenons $a"^2 - B^{2n} = a" + B^n \Longrightarrow a"^2 - a" = B^n - B^{2n}$. Le membre à gauche est positif et celui à droite est négatif, d'où la contradiction.

C.2.2.1. $\lambda_1|(a" - B^n)$: Si $\lambda_1|(a" - B^n) \Longrightarrow \lambda_1|2(a" - B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(A^m - 2B^n)$ mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$ d'où $\lambda_1|2A^m \Longrightarrow \lambda_1|A^m$, $\lambda_1 \neq 2$, il s'ensuit $\lambda_1|A^m$ par suite la contradiction avec $\lambda_1 \nmid A^m$ cité ci-dessus dans **C.2.**.

C.2.2.2. $\lambda_1|(a" + B^n)$: Si $\lambda_1|(a" + B^n) \Longrightarrow \lambda_1|2(a" + B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(A^m + 2B^n)$. Nous retrouvons la condition (3.50) citée en **C.2.**.

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

3.2.2.4. Cas $b|p \Rightarrow p = b.p', p' > 1$**,** $b \neq 2$**,** $b \neq 4$ **et** $3|a$ Nous obtenons $A^{2m} = \dfrac{4.p}{3}.\dfrac{a}{b} = 4.p'a'$ et $B^nC^l = p'(b - 4a')$. Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors $B^nC^l = p'(b - 4a')$ et $A^{2m} = 4.p'.a'$. En discutant p' premier ou non, il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1)est vraie.

3.2.2.5. Cas $b = 2p$ **et** $3|a$ Nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2p} \Longrightarrow A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{2p} = 2a' \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|a \Longrightarrow 2|a'$$

Alors $2|a$ et $2|b$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers.

3.2.2.6. Cas $b = 4p$ **et** $3|a$ **:** Nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{4p} \Longrightarrow A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{4p} = a'$$

Calculons A^mB^n, nous obtenons $A^mB^n = \dfrac{p\sqrt{3}}{3}.sin\dfrac{2\theta}{3} - \dfrac{2p}{3}cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{p\sqrt{3}}{3}.sin\dfrac{2\theta}{3} - \dfrac{a'}{2} \Longrightarrow A^mB^n + \dfrac{A^{2m}}{2} = \dfrac{p\sqrt{3}}{3}.sin\dfrac{2\theta}{3}$. Soit:

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{3.51}$$

Le membre à gauche de (3.51) est un entier et p est un entier, alors $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ sera écrit :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{3.52}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \Longrightarrow p = k_2.k_3$.

D.1. $k_3 \neq 1$: Nous supposons que $k_3 \neq 1$. D'où $A^{2m} + 2A^mB^n = k_3.k_1$. Soit μ un entier premier et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

D.1.1. $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|a' \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_3 \Longrightarrow \mu|p \Longrightarrow \mu|(4p = b)$. D'où la contradiction avec a, b copremiers.

D.1.2. $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors:

$$\mu \neq 2 \quad et \quad \mu \nmid B^n \tag{3.53}$$

$\mu|(A^m + 2B^n)$, nous écrivons $A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathcal{N}^*$ Alors: $A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n} \Longrightarrow p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$. Comme $b = 4p = 4k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \Longrightarrow \exists \mu' \in \mathcal{N}^*$ tel que $b = \mu\mu'$, nous obtenons:

$$\mu'\mu = \mu(4\mu t'^2 - 8t'B^n) + 4B^n(B^n - A^m) \tag{3.54}$$

La dernière équation implique $\mu|4B^n(B^n - A^m)$, mais $\mu \neq 2$ alors $\mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

D.1.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow$ c'est la contradiction avec (3.53).

D.1.2.2. $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et en utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons $\mu|3B^n$.

D.1.2.2.1. $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n$ c'est contradictoire avec 3.53.

D.1.2.2.2. $\mu = 3$: Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers.

D.2. $k_3 = 1$: Nous supposons maintenant que $k_3 = 1$, d'où:

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_1; \quad p = k_2; \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{p} \tag{3.55}$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons $\frac{4}{3}sin^2\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$, soit $\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}.\frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{p^2}$. Finalement:

$$a'(4p - 3a') = k_1^2 \tag{3.56}$$

mais $a' = a"^2$ alors $4p - 3a'$ est un carré. Soit $\lambda^2 = 4p - 3a' = 4p - a = b - a$. L'équation (3.56) devient :

$$a"^2\lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = a"\lambda \tag{3.57}$$

en prenons la racine carrée positive. Utilisant (3.57), nous obtenons $k_1 = a"\lambda$, mais $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = a"(A^m + 2B^n)$, par suite:

$$(A^m + 2B^n) = \lambda \tag{3.58}$$

Soit λ_1 un entier premier $\neq 2$ un diviseur de λ (sinon $\lambda_1 = 2|\lambda \Longrightarrow 2|\lambda^2$. Comme $2|(b = 4p) \Longrightarrow 2|(a = 3a')$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers).

Nous considérons donc $\lambda_1 \neq 2$ et :

$$\lambda_1|\lambda \Longrightarrow \lambda_1|(A^m + 2B^n) \tag{3.59}$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 \nmid A^m \quad sinon \quad \lambda_1|2B^n \tag{3.60}$$

mais $\lambda_1 \neq 2$ d'où $\lambda_1|B^n \Longrightarrow \lambda_1|B$, par suite $\lambda_1|(b = 4p)$ et $\lambda_1|A^m \Longrightarrow \lambda_1|2a" \Longrightarrow \lambda_1|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

Nous assumons maintenant que $\lambda_1 \nmid A^m$. Donc $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(A^m + 2B^n)^2$ c'est-à-dire $\lambda_1|(A^{2m} + 4A^mB^n + 4B^{2n})$, nous écrivons cela comme $\lambda_1|(p + 3A^mB^n + 3B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(p + 3B^n(A^m + 2B^n) - 3B^{2n})$. Mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(p-3B^{2n})$, Comme $\lambda_1|(4p-a)$ d'où par différence, nous obtenons $\lambda_1|(a-3(B^{2n}+p))$ ou $\lambda_1|(3a'-3(B^{2n}+p)) \Longrightarrow \lambda_1|3(a'-B^{2n}-p) \Longrightarrow \lambda_1 = 3$ ou $\lambda_1|(a'-(B^{2n}+p))$.

D.2.1. $\lambda_1 = 3$: Si $(\lambda_1 = 3)|\lambda \Rightarrow 3|\lambda^2 \Rightarrow 3|(b-a)$ mais $3|a \Longrightarrow 3|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

D.2.2. $\lambda_1|(a' - (B^{2n} + p))$: Si $\lambda_1|(a' - B^{2n} - p) \Longrightarrow \lambda_1|(A^mB^n + B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|B^n(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|B^n$ ou $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$.

D.2.2.1. $\lambda_1|B^n$: Si $\lambda_1|B^n$, comme $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|A^m$ ce qu' est en contradiction avec l'hypothèse $\lambda_1 \nmid A^m$ dans **D.2.** ci-dessus.

D.2.2.2. $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$, nous retrouvons la condition (3.59).

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

3.2.2.7. Cas $3|a$ **et** $b = 2p'$ $b \neq 2$ **avec** $p'|p$ $\quad 3|a \Longrightarrow a = 3a'$, $b = 2p'$ avec $p = k.p'$, d'où $A^{2m} = \dfrac{4.p}{3}.\dfrac{a}{b} = 2.k.a'$. Le calcul de B^nC^l donne $B^nC^l = k(p' - 2a')$. Comme $p = b.p'$ et $p' > 1$, nous avons alors:

$$B^nC^l = k(p' - 2a')$$
$$\text{et} \quad A^{2m} = 2k.a'$$

En discutant k premier ou non, il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1) est vraie.

3.2.2.8. Cas $3|a$ **et** $b = 4p'$ $b \neq 2$ **avec** $p'|p$ $\quad 3|a \Longrightarrow a = 3a'$, $b = 4p'$ avec $p = k.p'$, $k \neq 1$ sinon $b = 4p$, ce cas a été étudié (voir paragraphe **3.2.2.6.**), alors nous avons $A^{2m} = k.a'$ et $B^nC^l = k(p' - a')$. Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons :

$$B^nC^l = k(p' - 2a')$$
$$\text{et} \quad A^{2m} = 2k.a'$$

En discutant k premier ou non, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.

3.2.2.9. Cas $3|a$ **et** $b|4p$ $a = 3a'$ et $4p = k_1 b$. Comme $A^{2m} = k_1 a'$ et $B^n C^l = \frac{k_1}{4}(b - 4a')$ et $B^n C^l$ est un entier, on doit avoir $4|k_1$ ou $4|(b - 4a')$.

E.1. $k_1 = 1$: Si $k_1 = 1 \Rightarrow b = 4p$: c'est le cas (**3.2.2.6.**).

E.2. $k_1 = 4$: Si $k_1 = 4 \Rightarrow p = b$: c'est le cas (**3.2.2.3**).

E.3. $4|k_1$: On suppose que $4|k_1$ avec $k_1 > 4 \Rightarrow k_1 = 4k'_1$, on a donc:

$$\begin{aligned} A^{2m} &= 4k'_1 a' \\ B^n C^l &= k'_1(b - 4a') \end{aligned}$$

Il s'ensuit facilement que la conjecture (1.1) est vraie.

E.4. $4|(b - 4a')$: Si $4|(b - 4a') \Rightarrow (b - 4a') = 4c$, avec $c \in \mathcal{N}^*$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} A^{2m} &= k_1 a' \\ B^n C^l &= k_1 c \end{aligned}$$

Il s'ensuit facilement que la conjecture (2.1) est vraie. □

Tous les cas possibles ont été étudiés, **le principal théorème est donc démontré**.

4 Exemples Numériques

4.1 Example 1:

Soit l'exemple $6^3 + 3^3 = 3^5$ avec $A^m = 6^3$, $B^n = 3^3$ et $C^l = 3^5$. Avec les notations utilisées dans le papier, nous obtenons:

$$p = 3^6 \times 73, \quad q = 8 \times 3^{11}, \quad \overline{\Delta} = 4 \times 3^{18}(3^7 \times 4^2 - 73^3) < 0 \tag{4.1}$$

$$\rho = \tfrac{3^8 \times 73\sqrt{73}}{3} \quad cos\theta = -\frac{4 \times 3^3 \times \sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \tag{4.2}$$

Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{3 \times 2^4}{73} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 3 \times 2^4,\ b = 73$; alors:

$$cos\frac{\theta}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}}, \quad p = 3^6.b \tag{4.3}$$

On vérifie facilement l'équation (4.2) utilisant (4.3). Pour cet exemple, nous pouvons utiliser les deux conditions de (3.9) comme $3|p$,$b|4p$ et $3|a$. Les cas **3.2.1.3** et **3.2.2.4** sont respectivement utilisés. Nous trouvons pour les deux cas que A^m, B^n et C^l de l'exemple 1 ont un facteur commun ce qui est vrai.

4.2 Exemple 2:

Soit le deuxième exemple $7^4 + 7^3 = 14^3$. Nous prenons $A^m = 7^4$, $B^n = 7^3$, $C^l = 14^3$. Nous obtenons $p = 57 \times 7^6 = 3 \times 19 \times 7^6$, $q = 8 \times 7^{10}$, $\overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 =$

$27 \times 4 \times 7^{18}(16 \times 49 - 19^3) = -27 \times 4 \times 7^{18} \times 6075 < 0\,, \quad \rho = 19 \times 7^9 \times \sqrt{19}\,, \quad cos\theta = -\dfrac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$. Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{7^2}{4 \times 19} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 7^2,\ b = 4 \times 19$, alors $cos\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{7}{2\sqrt{19}}$ et nous avons le cas $3|p$ et $b|(4p)$. Le calcul de $cos\theta$ à partir de l'expression de $cos\dfrac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessous:

$$cos\theta = cos3(\theta/3) = 4cos^3\frac{\theta}{3} - 3cos\frac{\theta}{3} = 4\left(\frac{7}{2\sqrt{19}}\right)^3 - 3\frac{7}{2\sqrt{19}} = -\frac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$$

Nous obtenons donc $3|p \Rightarrow p = 3p'$, $b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ alors $12p' = k_1 b = 3 \times 7^6 b$. Ceci concerne le paragraphe **3.2.1.9.** de la première hypothèse. Comme $k_1 = 3 \times 7^6 = 3k'_1$ avec $k'_1 = 7^6 \neq 1$. C'est le cas **B.3.1.** avec la condition $4|(3b - 4a)$. Vérifions alors:

$$3b - 4a = 3 \times 4 \times 19 - 4 \times 7^2 = 32 \Longrightarrow 4|(3b - 4a) \tag{4.4}$$

avec $A^{2m} = 7^8 = 7^6 \times 7^2 = k'_1.a$ et k'_1 non premier. Nous retrouvons bien que A, B et C de l'exemple 2 ont un facteur commun à savoir le nombre premier 7 un diviseur de $k'_1 = 7^6$!.

4.3 Example 3:

Enfin soit l'exemple $7^2 + 2^5 = 3^4$, avec $A^m = 7^2; B^n = 2^5; C^l = 3^4$. Nous obtenons $p = 4999$ un nombre premier, $q = 2^5 \times 7^2 \times 3^4 = 127008 \gg p$. Par suite, nous trouvons que $\overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 > 0$. Alors, nous ne pouvons appliquer les conditions du papier à cet exemple, car nous avons un exposant égal à 2. Alors la condition que $m, n, l > 2$ est importante dans l'énoncé de la conjecture de Beal.

5 Conclusion

La méthode utilisée pour prouver que la conjecture de Beal est vraie est certe du niveau de la première année universitaire, a demandé l'étude de plusieurs cas possibles. Nous avons confirmé la méthode par les trois exemples présentés. En conclusion, nous annoncerions le théorème:

Théorème 5.1. ***(A. Ben Hadj Salem, A. Beal, 2016):*** *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si:*

$$A^m + B^n = C^l \tag{5.1}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur en commun.

References

[1] R. Daniel Mauldin. *A Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal Conjecture et Prize Problem.* Notice of AMS, Vol 44, $n°11$, 1997, pp 1436-1437.